

修正課程標準適用

初中三角法

全一冊

編者 張鵬飛

校者 華襄治



上海中華書局印行

民國二十六年八月初版

有 不 著 准 作 翻 權 印

修正

初中

◎實價國幣

(郵運匯費)

編者

張 鵬

校者

華 襄

發行者

中華書局有限公司
代表人 路錫三

印刷者

上海中華書局
澳門印刷所

總發行處

上海中華書局
福州發行所

分發行處

各埠中華書局

377.5
G165
62918

編輯大意

一、本書遵照教育部最近頒布的初級中學算學課程標準編輯，供初級中學教學三角法之用。

二、初級中學的算學，不但要助長學生的知識，還要啓發他們的思想；所以本書依照學生程度，說明公式和各表的由來，於訓練推理中，使思想繼續進展。

三、初級中學的算學，不但要助長學生的經驗，還要增加他們的能力；所以指示學生從題得解的關鍵，使經驗逐漸豐富，以期其能力不斷增加。

四、初級中學三角法，不是普通的測量學；所以本書略講簡易測量，不越出範圍之外，致侵佔其他功課教學的時間。

五、三角法須應用幾何的理性和代數的方法，所以在算術代數幾何之後，繼續教學，本書對於算術代數幾何，都有很深切的聯絡，使學生更多復習機會。

六、初級中學沒有立體幾何，祇在實驗幾何部份，略講空間幾何形象，所以本書關於測量部份，也祇從直觀上，說明鉛垂面等的意義，使學生容易明白，以免發生障礙。

七、三角函數記號和普通數號不同，初學容易誤會，所以在記號的前後，略留少許空隙，不和其它數號相混。

八、本書限於篇幅和時間，恐有未能盡善之處，務希

閱者教之。

修正課程標準適用

初中三角法目次

標桿圖 經緯儀圖 測鏈圖 測針圖

第一章 開端 頁數

- 1. 三角法的定義.....1
- 2. 三角形的邊角符號.....3
- 3. 三角形的三角關係.....5
- 4. 直角三角形的三邊關係.....5
- 5. 直角三角形邊和角的關係——三角函數.....7
- 6. 三角函數的符號.....8

第二章 特別銳角的三角函數

- 1. 一個角的三角函數.....10
- 2. 45° 角的三角函數.....12
- 3. 30° 角的三角函數.....13
- 4. 60° 角的三角函數.....13
- 5. 正切或餘切是1的角.....15
- 6. 正弦是 $\frac{1}{2}$ 或餘割是2的角.....16
- 7. 餘弦是 $\frac{1}{2}$ 或正割是2的角.....16
- 8. 特別銳角的三角函數表.....18

第三章 一般銳角的三角函數

1. 一定角度的三角函數	20
2. 一定三角函數的角	21
第四章 同銳角或異銳角的三角函數	
1. 同角的異名函數	24
2. 互餘兩角的函數	27
3. 異角的同名函數	29
第五章 三角函數表的用法	
1. 三角函數表	33
2. 用表求函數一	33
3. 用表求函數二	34
4. 用表求角一	36
5. 用表求角二	37
第六章 直角三角形的解法	
1. 求角	40
2. 求邊	42
3. 解直角三角形的公式	46
第七章 直角三角形的簡易應用	
1. 測量上的水平綫面	48
2. 用水準驗水平綫面	48
3. 測量水平面的綫角	49
4. 水平面內的簡便測量	50

5. 測量上的鉛垂綫面.....54

6. 用鉛錘驗鉛垂綫面.....54

7. 測量鉛垂面的綫角.....55

8. 鉛垂面的簡便測量.....55

9. 幾何圖形的計算和證明.....59

附錄 I. 斜角三角形的解法

1. 在斜角三角形裏,已知任意兩角求餘一角.....62

2. 在斜角三角形裏,已知牠的三邊求牠的任意一角.....62

3. 在斜角三角形裏,已知任意兩邊和任意一角求餘兩角的任意一角.....64

4. 在斜角三角形裏,已知任意兩角和任意一邊,求餘兩邊的任意一邊.....67

5. 在斜角三角形裏,已知任意兩邊和任意一角求餘一邊.....68

附錄 II. 斜角三角形的簡易應用

1. 水平面的簡便測量.....72

2. 幾何圖形的計算和證明.....74

附錄 III. 三角函數表

中西名詞對照表

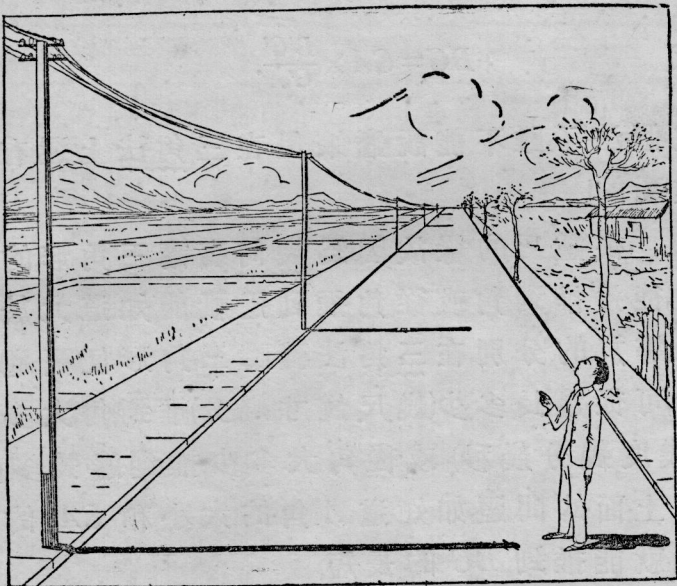
修正課程標準適用

初中三角法

第一章

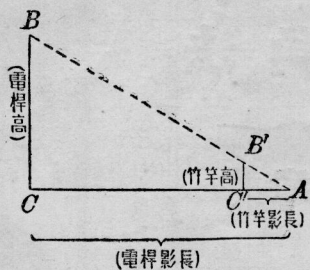
開端

1. 三角法的定義



看見路旁高而直的電桿,要曉得牠的高,沒有幾何知識的人,必定搬梯子來,直接去量,那就

蠢笨極了。有幾何知識的人，就照下圖，在電桿的前面立一根短竹竿(或短木桿)，量竿高和竿影的長，並量電桿影子的長，用下面的式子，可以求出牠的高來。



$$BC : B'C' = CA : C'A,$$

或
$$BC : CA = B'C' : C'A,$$

或
$$BC = CA \times \frac{B'C'}{C'A}.$$

這個法子，雖不能說蠢笨，但在三角法上還有很靈巧的！

很靈巧的緣故，因為幾何裏講三角形的時候，從邊推到角或從角推到邊，祇能知道大於，小於，等於的分別，在三角法裏講三角形，便更進一步，可從邊長多少(幾尺幾寸幾分)推到角大多少(幾度幾分幾秒)，或從角大多少推到邊長多少。在上面的問題，如知道 A 角的大小和 CA 的長短，就能推到 BC 的長短。

所以三角法的定義是：

根據幾何的理性和代數的方法，更詳細講

明三角形的邊角關係,拿來做解決三角形問題的方法的。

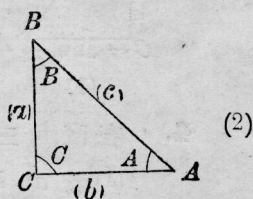
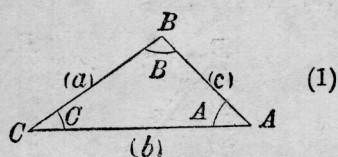
【註】 古代作曆征稅,都用三角形來測日月,量田地;所以我國和希臘,三角形和三角法的發明很早。

2. 三角形的邊角符號.

在三角法裏,處處都講到三角形,我們爲簡便起見,對於三角形和各角的大小,各邊的長短都有一定的代表符號,像下表所列。

三角形	$\triangle ABC$		
角含的	$\angle BAC$ 含的	$\angle CBA$ 含的	$\angle ACB$ 含的
度分秒	A	B	C
邊含的	BC 含的	CA 含的	AB 含的
同單位數	a	b	c

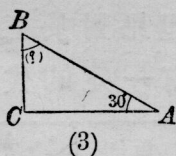
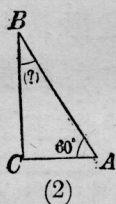
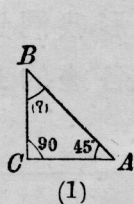
假如三角形是直角三角形 ABC ,就拿 C 表 90 度或 90° . 在 a, b, c 之內:若 a 表公尺數, b, c 也都表公尺數; a 表尺數, b, c 也都表尺數;其餘都可照此推去。



【注意】 本書對於三角形角的大小或邊的長短，在容易明瞭的地方，有時簡稱角或邊。

習題 A

1. 下面直角三角形裏， B 角的大小怎樣？



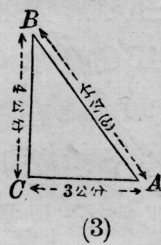
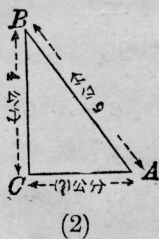
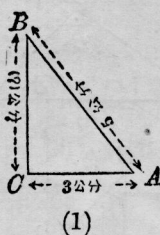
2. 在三角形 ABC 裏：

(1) 若 $B=30^\circ, C=70^\circ$ ，那麼 $A=?$ 。

(2) 若 $C=75^\circ, A=75^\circ$ ，那麼 $B=?$ 。

(3) 若 $A=98^\circ, B=12^\circ$ ，那麼 $C=?$ 。

3. 下面直角三角形裏，已知二邊長短，餘一邊怎樣？



4. 在直角三角形 ABC 裏：

(1) 若 $a=12, b=5$ ，那麼 $c=?$ 。

(2) 若 $b=5$, $c=13$, 那麼 $a=?$.

(3) 若 $c=13$, $a=12$, 那麼 $b=?$.

【注意】 上面各題的答,可先畫準確的圖而後用量角器和公尺市尺去量,也可用幾何理性去推.

3. 三角形的三角關係.

在幾何裏,曉得三角形三角的和都等於二直角;所以在三角形 ABC 裏,

$$A+B+C=180^\circ.$$

若 $C=90^\circ$,

那麼 $A+B=90^\circ$.

根據這個關係,可以從三角形這角大小,推得那角大小;或從兩角的大小推得餘一角大小.

4. 直角三角形的三邊關係.

在幾何裏,曉得直角三角形,拿直角邊做邊的兩個正方形和都等於拿斜邊做邊的正方形;所以在直角三角形 ABC 裏,

$$a^2+b^2=c^2.$$

根據這個關係,可以從直角三角形兩邊的長短,推得餘一邊的長短.

習題 B

1. 在直角三角形 ABC 裏:

(1) 若 $A < 45^\circ$, 那麼 B 是多少?

(2) 若 $A = 45^\circ$, 那麼 B 是多少?

(3) 若 $A > 45^\circ$, 那麼 B 是多少?

舉例 $B = 90^\circ - A$, 所以 (1) 的 $B > 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$.

2. 在直角三角形 ABC 裏:

(1) 若 $a = 3, b = 4$, 那麼 $c = ?$.

(2) 若 $a = 3, b = 5$, 那麼 $c = ?$.

(3) 若 $a = 3, b = 6$, 那麼 $c = ?$.

(4) 若 $b = 4, c = 5$, 那麼 $a = ?$.

(5) 若 $b = 4, c = 6$, 那麼 $a = ?$.

(6) 若 $b = 4, c = 7$, 那麼 $a = ?$.

(7) 若 $c = 5, a = 3$, 那麼 $b = ?$.

(8) 若 $c = 5, a = 4$, 那麼 $b = ?$.

(9) 若 $c = 5, a = 2$, 那麼 $b = ?$.

3. 試合前題的 (1)、(2)、(3), 或 (4)、(5)、(6), 或 (7)、(8)、(9), 作公用一邊的三個直角三角形! 但 a, b, c 都表寸數.

4. 若 $C = 90^\circ$, 那麼 $(c+a)(c-a) = ?$.

5. 若 $C = 90^\circ$, 那麼 $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = ?$.

6. 若 $C = 90^\circ$, 那麼 $\sqrt{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2} = ?$.

7. 試畫兩個直角三角形 $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2$, 使

$$\angle C_1 = \text{直角} = \angle C_2,$$

$$B_1C_1 = 4 \text{ 公寸}, \quad C_1A_1 = 3 \text{ 公寸},$$

$$B_2C_2 = 4 \text{ 寸}, \quad C_2A_2 = 3 \text{ 寸},$$

並量 $\angle A_1, B_1, A_2, B_2$ 和 A_1B_1, A_2B_2 , 求 A_1B_1, A_2B_2 的比率!

8. 試畫兩個直角三角形 $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2$, 使

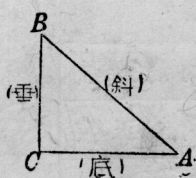
$$\angle C_1 = \text{直角} = \angle C_2$$

$$A_1B_1 = 13 \text{ 公寸}, \quad B_1C_1 = 12 \text{ 公寸},$$

$$A_2B_2 = 13 \text{ 寸}, \quad B_2C_2 = 12 \text{ 寸},$$

並量 $\angle A_1, B_1, A_2, B_2$ 和 C_1A_1, C_2A_2 , 求 C_2A_2, C_1A_1 的比率!

5. 直角三角形邊和角的關係——三角函數。



在三角法裏, 直角三角形任兩邊的比率對於一個銳角, 都有一個名稱; 像在直角三角形 ABC 裏 AB 爲斜邊, 又就 A 角說, BC

爲垂綫, CA 爲底邊, 牠們的比率如下表:

$\left(\begin{smallmatrix} \text{垂} \\ \text{斜} \end{smallmatrix}\right) \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$	A 角的正弦或 B 角的餘弦
$\left(\begin{smallmatrix} \text{底} \\ \text{斜} \end{smallmatrix}\right) \frac{CA}{AB} = \frac{b}{c}$	A 角的餘弦或 B 角的正弦
$\left(\begin{smallmatrix} \text{垂} \\ \text{底} \end{smallmatrix}\right) \frac{BC}{CA} = \frac{a}{b}$	A 角的正切或 B 角的餘切
$\left(\begin{smallmatrix} \text{斜} \\ \text{垂} \end{smallmatrix}\right) \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}$	A 角的餘割或 B 角的正割
$\left(\begin{smallmatrix} \text{斜} \\ \text{底} \end{smallmatrix}\right) \frac{AB}{CA} = \frac{c}{b}$	A 角的正割或 B 角的餘割
$\left(\begin{smallmatrix} \text{底} \\ \text{垂} \end{smallmatrix}\right) \frac{CA}{BC} = \frac{b}{a}$	A 角的餘切或 B 角的正切

這裏六個比率,都是三角函數。在第二章裏,可以知道從一個銳角的大小,能推得六個三角函數,從一個三角函數能推得兩個銳角的大小。第1段裏的 $\frac{B'C'}{C'A}$ 就是A角的正切,在三角法裏,祇要量A角就可曉得,不要量B'C'、C'A了!

6. 三角函數的符號。

三角函數,爲圖簡便起見,也有一定的代表符號;像

A 角的正弦	$\sin A$	$\cos B$	B 角的餘弦
A 角的餘弦	$\cos A$	$\sin B$	B 角的正弦
A 角的正切	$\tan A$	$\cot B$	B 角的餘切
A 角的餘割	$\csc A$	$\sec B$	B 角的正割
A 角的正割	$\sec A$	$\csc B$	B 角的餘割
A 角的餘切	$\cot A$	$\tan B$	B 角的正切

表裏符號 \sin , \cos , \tan , \csc , \sec , \cot , 等符號, 就是英名 *Sine*, *Cosine*, *Tangent*, *Cosecant*, *Secant*, *Cotangent* 的縮寫

【注意】 在別種書裏,或用 Tg 代 \tan , 用 Cosec 代 \csc , 用 Ctn 代 \cot . 各符號的第一字母,也可以用小寫。

習題 C

1. 在直角三角形 ABC 裏, 若 $a=4, b=3$,

那麼

$$\sin A = ?, \quad \csc A = ?,$$

$$\cos A = ?, \quad \sec A = ?,$$

$$\tan A = ?, \quad \cot A = ?,$$

$$\cos B = ?, \quad \sec B = ?,$$

$$\sin B = ?, \quad \csc B = ?,$$

$$\cot B = ?, \quad \tan B = ?.$$

舉例 $\sin A = \frac{a}{c} = \frac{4}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{4}{5},$

$$\csc A = \frac{c}{a} = \frac{5}{4} = 1 \frac{1}{4}.$$

2. 若 $a=12, b=5$, 那麼前題怎樣?
 3. 若 $a=1, b=1$, 那麼前題怎樣?
 4. 若 $a = \frac{1}{2}\sqrt{3}, b = \frac{1}{2}$, 那麼前題怎樣?



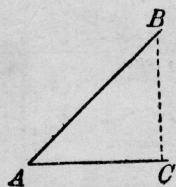
第二章

特別銳角的三角函數

1. 一個角的三角函數.

三角函數是角的函數:前章第1段竹竿的高和竿影的長,無論怎樣改變,就是直角三角形 $AB'C'$ 無論怎樣變動, $\frac{B'C'}{C'A}$ 都是 A 角的正切.

所以任意從銳角的一邊裏取一點,畫餘一邊的垂綫,成一個直角三角形,這形任兩邊的比率都是這個銳角的三角函數



像 AB 是 $\angle CAB$ 的任意一邊, B 是 AB 裏任意一點, BC 是 AC 的垂綫,那麼

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c},$$

$$\cos A = \frac{CA}{AB} = \frac{b}{c},$$

$$\tan A = \frac{BC}{CA} = \frac{a}{b},$$

.....

習題 A

1. 航海的羅針盤,在北和東,東和南,南和西,西和