碧海书道
BOOK HOUSE

高等学校数学学习辅导丛书

高等数学

学习指导与习题全解

配同济高等数学·少学时

赵振海 编著

INSTRUCTION TEXTBOOK SERIES FOR MATHEMATICS

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

高等数学

学习指导与习题全解

配同济高等数学·少学时

赵振海 编著

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导及习题全解/赵振海编著. —2 版
大连:大连理工大学出版社,2008.8
ISBN 978-7-5611-2771-1

Ⅰ.高… Ⅱ.赵… Ⅲ. 高等数学—高等学校—解题
Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 094607 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市软件园路 80 号 邮政编码:116023
发行:0411-84708842 邮购:0411-84703636 传真:0411-84701466
E-mail:dutp@dutp.cn URL:http://www.dutp.cn
大连理工印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:140mm×203mm 印张:15.5 字数:582 千字
2008 年 8 月第 2 版 2008 年 9 月第 7 次印刷

责任编辑:梁 锋 责任校对:碧 海
封面设计:宋 蕾

ISBN 978-7-5611-2771-1 定 价:24.00 元

前　言

“数学”,不单是科学的工具,更是科学的皇后。作为友人,她定会以其奇妙、神通、思辨启发你的心智,熏陶你的灵魂,并伴随你追寻高远的人生。

万丈高楼平地起,熟能生出百巧来。作者从长期的学习和教学实践中总结出以下学习经验:一看、二做(实践)、三想、四归纳总结。

作者从事高等数学教学40多年,十分了解大学生在高等数学学习中普遍遇到的困惑、疑难问题,本书第一部分针对这些问题进行详细解析,大家可以通过认真研读,从中体会“看书、思考”的方法和乐趣。本书第二部分是习题全解。解题时,先给出思路,指出解题时需要用到的有关概念、性质、定理和公式,解题过程中及时总结经验、传授技巧,以求将作者的解题思路完整地展示给读者,大家可以通过这一部分提高分析问题、解决问题的能力。为加深印象,帮助记忆,书中穿插“传经”、“送宝”、“点拨”、“提醒”等小版块,大家可以从中掌握从具体问题中学习知识,从具体问题中归纳、总结、提高的方法。最终使大家从被动的看书,到主动地“学习”,达到“知识的自组织、自增长”。

最后,引用诺贝尔奖金获得者李政道教授的一段名言作为结尾:

科学研究的是自然现象的规律,对这些客观规律的总结和抽象,是科学家的创造,如牛顿第二运动定律表达为“力等于质量与加速度的乘积”,这是牛顿对力学现象规律性的抽象。这个创造是主观的。同时,他的叙述非常简单。类似情况告诉我们,对自然现象的规律叙述得越简单,应用越广泛,那么这个科学的内容往往就越深刻。

作　者

目 录

第一章 函数与极限

本章知识结构图 /1
第一节 函数 /2
第二节 数列的极限 /10
第三节 函数的极限 /16
第四节 无穷小与无穷大 /22
第五节 极限运算法则 /24
第六节 极限存在准则·两个重要极限 /29
第七节 无穷小的比较 /32
第八节 函数的连续性 /36
第九节 闭区间上连续函数的性质 /44
自我测试 /47
自我测试参考答案 /49

第二章 导数与微分

本章知识结构图 /57
第一节 导数概念 /58
第二节 函数的和、差、积、商的求导法则 /64
第三节 反函数和复合函数的求导法则 /68
第四节 高阶导数 /74
第五节 隐函数的导数以及由参数方程所确定的函数的导数 /78
第六节 变化率问题举例及相关变化率 /87
第七节 函数的微分 /92
第八节 微分的应用 /95
自我测试 /101
自我测试参考答案 /103

第三章 中值定理与导数的应用

本章知识结构图 /109
第一节 中值定理 /109
第二节 洛必达法则 /112
第三节 泰勒中值定理 /118
第四节 函数的单调性和曲线的凹凸性 /121
第五节 函数的极值和最大、最小值 /125
第六节 函数图形的描绘 /134
第七节 曲率 /138
第八节 方程的近似解 /141
自我测试 /143
自我测试参考答案 /145

第四章 不定积分

本章知识结构图 /155
第一节 不定积分的概念与性质 /155
第二节 换元积分法 /160
第三节 分部积分法 /167
第四节 有理函数的不定积分 /175
第五节 积分表的使用 /184
自我测试 /188
自我测试参考答案 /189

第五章 定积分及其应用

本章知识结构图 /197
第一节 定积分的概念与性质 /198
第二节 微积分基本公式 /204
第三节 定积分的换元法及分部积分法 /211
第四节 定积分在几何上的应用 /225
第五节 定积分在物理上的应用 /243
第六节 反常积分 /249
自我测试 /255
自我测试参考答案 /258

第六章 微分方程
本章知识结构图 /270
第一节 微分方程的基本概念 /270
第二节 可分离变量的微分方程 /272
第三节 齐次方程 /277
第四节 一阶线性微分方程 /282
第五节 可降阶的高阶微分方程 /289
第六节 二阶常系数齐次线性微分方程 /293
第七节 二阶常系数非齐次线性微分方程 /300
自我测试 /310
自我测试参考答案 /311
第七章 向量代数与空间解析几何
本章知识结构图 /316
第一节 向量及其线性运算 /316
第二节 点的坐标与向量的坐标 /317
第三节 向量的方向余弦及投影 /320
第四节 数量积·向量积·混合积 /322
第五节 平面及其方程 /326
第六节 空间直线及其方程 /330
第七节 旋转曲面和二次曲面 /337
第八节 空间曲线及其方程 /340
自我测试 /343
自我测试参考答案 /344
第八章 多元函数微分法及其应用
本章知识结构图 /348
第一节 多元函数的基本概念 /348
第二节 偏导数 /351
第三节 全微分 /355
第四节 多元复合函数的求导法则 /357
第五节 隐函数的求导公式 /365
第六节 多元函数微分法的几何应用举例 /370
第七节 多元函数的极值及其求法 /374
自我测试 /377
自我测试参考答案 /377
第九章 重积分及曲线积分
本章知识结构图 /383
第一节 二重积分的概念与性质 /384
第二节 二重积分的计算法 /387
第三节 二重积分的应用 /413
第四节 三重积分 /424
第五节 对弧长的曲线积分 /435
第六节 对坐标的曲线积分 /441
第七节 格林公式及其应用 /446
自我测试 /455
自我测试参考答案 /456
第十章 无穷级数
本章知识结构图 /463
第一节 常数项级数的概念与性质 /463
第二节 常数项级数的审敛法 /466
第三节 幂级数 /471
第四节 函数展开成幂级数 /476
第五节 幂级数在近似计算中的应用 /481
自我测试 /484
自我测试参考答案 /485

第一章　函数与极限

本章知识结构图

- 函数与极限
  - 函数
    - 集合
    - 函数定义
    - 函数的主要特性
      - 有界性
      - 单调性
      - 奇偶性
      - 周期性
    - 反函数
    - 复合函数、初等函数
    - 分段函数
  - 极限
    - 数列极限—[ε-N]定义
    - 函数极限
      - [ε-δ]定义
      - [ε-X]定义
    - 极限存在准则
      - 夹逼准则
      - 单调有界准则
    - 两个重要极限
      - $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$
      - $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$
    - 极限运算法则
  - 无穷小与无穷大
    - 定义
      - 无穷小定义
      - 无穷大定义
    - 无穷小比较
      - 高阶无穷小
      - 低阶无穷小
      - 同阶无穷小
      - 等价无穷小
    - 等价无穷小在求极限中应用
  - 函数连续性
    - 连续的三个定义
    - 间断点定义、求法、类型
    - 连续函数的和、差、积、商连续性
    - 反函数、复合函数连续性、初等函数连续性
    - 闭区间上连续函数性质

第一节 函 数

疑难问题解析

1 教学基本要求指出“理解函数的概念”，要达到这一点，最低应该明确些什么？

答 最低应该明确：

(1)函数的本质是对应关系，即函数关系是对应关系(或映射关系)；

(2)函数定义的两个要素；

(3)函数 $y=f(x)$在点 x_0 处有定义是指函数 $y=f(x)$在 x_0 处有对应值。

2 函数定义的两个要素是什么？

答 (1)定义域$\overset{\text{def}}{=\!=}$使函数 y 有对应值的自变量 x 的取值范围；

(2)对应关系$\overset{\text{def}}{=\!=}$给定 x 值，得出 y 值的某种对应规律。

称(1)、(2)为构成函数概念的两个要素，同时也是判断两个函数是否是同一个函数的准则。

例如，$y=f(x)$与 $s=f(t)$，两个函数是否表示同一函数？为什么？

思路 要判断两个函数是否相同，主要依据函数概念的两个要素：定义域和对应规律。若两个函数的定义域和对应规律都相同，则两个函数是同一个函数，否则就是不同的函数。

函数相同，定义域与对应规律都相同。此题告诉我们一个函数的表示法与构成函数的两个要素有关，而与自变量、因变量用什么字母表示无关。即 $f(x)=f(t)=f(u)=\cdots$简称函数表示法的“无关性”。函数表示法的“无关性”是由 $f[g(x)]$的表达式去求 $f(x)$的表达式的有效方法。

3 函数关系是对应关系在本节有什么应用？

答 1° 在函数符号应用中的应用——由 $f[g(x)]$的表达式求出 $f(x)$的表达式。

【例 1】 设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，试求 $f(x)$。

思路 因为函数的本质是对应关系，所以 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$表示关于“$x+\dfrac{1}{x}$”的对应值。因此它的右端应该是“$x+\dfrac{1}{x}$”的表达式，但是由于化简而变成现在右

端形式。解决这类题型的关键是将 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)$ 的右端表达式恢复为原来的关于"$x+\frac{1}{x}$"的表达式，恢复的方法有两种：(1)凑出法；(2)设出法。

解法 1　凑出法：　$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}+2-2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$

由函数表示法的"无关性"得 $f(x)=x^2-2$。

解法 2　设出法：设 $u=x+\frac{1}{x}$，则 $u^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$；

$x^2+\frac{1}{x^2}=u^2-2$，所以 $f(u)=u^2-2$，即 $f(x)=x^2-2$。

2°　构造复合函数

构造复合函数的实质也是函数符号应用问题。其理论根据仍然是函数的本质是对应关系。函数先与中间变量 u 对应 $y=f(u)$，而 $y=f(u)$ 的定义域恰是中间变量 $u=g(x)$ 的值域。再找出中间变量 u 的值域所对应的自变量 x 的变化域，问题便得到解决。从上述分析知，解这类问题的关键是弄清中间变量的值域，即 $y=f(u)$ 的定义域。

【例 2】　设函数 $y=f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$，则 $f[f(x)]=$______。

解　因为 $f(x)$ 的值域为 $|f(x)|\leqslant 1$，所以

$$f[f(x)]=\begin{cases}1, |f(x)|\leqslant 1\\ 0, |f(x)|>1\end{cases}=1, x\in(-\infty,+\infty)$$

4　函数 $y=f(x)$ 在定义区间 X 上是奇(偶)函数的必要条件是什么？

分析　由函数 $f(x)$ 的奇偶性定义知：对于 $\forall x\in X$，有 $-x\in X$ 且恒有 $f(-x)=-f(x)$ ($f(-x)=f(x)$)，从而得出 $y=f(x)$ 在 X 上是奇(偶)函数的必要条件是定义区间 X 关于坐标原点对称。

5　若 $y=f(x)$ 在包含坐标原点的对称区间 X 上处处有定义，则 $y=f(x)$ 在 X 上是奇函数的必要条件是什么？

分析　由奇函数定义知，对于 $\forall x\in X$，有 $-x\in X$ 且 $f(-x)=-f(x)$。又已知 $0\in X$，由于 x 的任意性，所以取 $x=0$，则上式也成立，即 $f(0)=-f(0)$，故 $f(0)=0$。所以在包含坐标原点的对称区间 X 上 $y=f(x)$ 是奇函数的必要条件是 $f(0)=0$。

6　函数 $y=f(x)$ 在定义域 X 上是周期函数的必要条件是什么？

分析　由周期函数定义知：对 $\forall x\in X$，有 $x\pm T\in X$，对任意的正整数 n，有 $f(x)=f(x+T)=\cdots=f(x+nT)=\cdots=f(x-nT)$。由于 x 及 n 的任意性推得

X 必为$(-\infty,+\infty)$。从而得 $y=f(x)$为周期函数的必要条件是它的定义域为$(-\infty,+\infty)$,即定义域 X 为双向无界区间。

习题 1-1

1. 用区间表示适合下列不等式的变量 x 的变化范围:

(1)$2<x\leqslant 6$　　(2)$|x|<3$　　(3)$|x-2|<\frac{1}{10}$

(4)$|x|>100$　　(5)$0<|x-1|<0.01$

解　(1)$(2,6]$;(2)$(-3,3)$;(3)$-\frac{1}{10}<x-2<\frac{1}{10}$,即$(1.9,2.1)$;

(4)$(-\infty,-100)\cup(100,+\infty)$;(5)$(0.99,1)\cup(1,1.01)$

2. 求邻域半径 δ,使 $x\in U(1,\delta)$时,$|2x-2|<\varepsilon$。又若 ε 分别为 0.1、0.01 时,上述 δ 各等于多少?

解　$|2x-2|<\varepsilon$,$|x-1|<\frac{\varepsilon}{2}$,所以 $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$,$\varepsilon=0.1$ 时 $|x-1|<\frac{0.1}{2}$,故 $\delta=\frac{0.1}{2}$;同理 $\delta=\frac{0.01}{2}$,即 $\delta=0.05,0.005$。

3. 下列各题中,函数 $f(x)$和 $g(x)$是否相同?为什么?

(1)$f(x)=\lg(x^2)$,$g(x)=2\lg x$;　(2)$f(x)=x$,$g(x)=\sqrt{x^2}$;

(3)$f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$,$g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$;

(4)$f(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}$,$g(x)=\sin x$。

解　(1)不同,因为两者定义域不同。$f(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,$g(x)$的定义域为$(0,+\infty)$。

(2)不同,因为两者对应规律不同。$f(x)$的值域为$(-\infty,+\infty)$,而 $g(x)$的值域为$[0,+\infty)$。

(3)相同,两者定义域相同,对应规律也相同,$f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}=x\sqrt[3]{x-1}$。

(4)不同,两者对应规律不同,$f(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}=\sqrt{\sin^2 x}=|\sin x|$。

4. 求下列函数的定义域。

(1)$y=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$;　(2)$y=\frac{2x}{x^2-3x+2}$;(3)$y=\arcsin(x-3)$;

(4)$y=\sqrt{3-x}+\arctan\frac{1}{x}$;(5)$y=\ln(x+1)$;　(6)$y=e^{\frac{1}{x}}$。

解　(1)$\begin{cases}x\neq 0\\1-x^2\geqslant 0\end{cases}$,$\begin{cases}x\neq 0\\|x|\leqslant 1\end{cases}$,所以定义域为$[-1,0)\cup(0,1]$。

(2)$x^2-3x+2\neq 0$ 即 $x^2-3x+2\neq(x-1)(x-2)$,即$(x-1)(x-2)\neq 0$,所以定义域为$(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$。

(3) $|x-3|\leqslant 1,-1\leqslant x-3\leqslant 1,2\leqslant x\leqslant 4$，所以定义域为$[2,4]$。

(4) $\begin{cases}3-x\geqslant 0\\ x\neq 0\end{cases},\begin{cases}x\leqslant 3\\ x\neq 0\end{cases}$，定义域为$(-\infty,0)\cup(0,3]$。

(5) $x+1>0,x>-1$，定义域为$(-1,+\infty)$。

(6) $x\neq 0$，所以定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$。

5. 设 $f(x)=\sqrt{4+x^2}$，求下列函数值：

$$f(0),\quad f(1),\quad f(-1),\quad f\left(\frac{1}{a}\right),\quad f(x_0),\quad f(x_0+h)$$

解　$f(0)=\sqrt{4+0^2}=2,f(1)=\sqrt{4+1^2}=\sqrt{5},f(-1)=\sqrt{4+(-1)^2}=\sqrt{5}$，$f\left(\frac{1}{a}\right)=\sqrt{4+\left(\frac{1}{a}\right)^2}=\frac{\sqrt{4a^2+1}}{|a|}$，　$f(x_0)=\sqrt{4+x_0^2}$，　$f(x_0+h)=\sqrt{4+(x_0+h)^2}$。

6. 设 $\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\frac{\pi}{3}\\ 0, & |x|\geqslant\frac{\pi}{3}\end{cases}$，求 $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right),\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right),\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right),\varphi(-2)$。

解　因为 $|x|=\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{3}$，所以 $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{6}\right|=\frac{1}{2}$，同理 $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{4}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2},\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$。因为$|-2|>\frac{\pi}{3}$，所以 $\varphi(-2)=0$。

7. 设 $f(t)=2t^2+\frac{2}{t^2}+\frac{5}{t}+5t$，证明 $f(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)$。

证明　
$$f\left(\frac{1}{t}\right)=2\left(\frac{1}{t}\right)^2+\frac{2}{\left(\frac{1}{t}\right)^2}+\frac{5}{\left(\frac{1}{t}\right)}+5\left(\frac{1}{t}\right)$$
$$=\frac{2}{t^2}+2t^2+5t+\frac{5}{t}=2t^2+\frac{2}{t^2}+\frac{5}{t}+5t=f(t)$$

8. 设 $F(x)=e^x$，证明 (1) $F(x)\cdot F(y)=F(x+y)$；(2) $\frac{F(x)}{F(y)}=F(x-y)$。

证明　(1) $F(x)\cdot F(y)=e^x\cdot e^y=e^{x+y}=F(x+y)$；

(2) $\frac{F(x)}{F(y)}=\frac{e^x}{e^y}=e^{x-y}=F(x-y)$。

9. 设 $G(x)=\ln x$。证明当 $x>0,y>0$ 时下列等式成立：

(1) $G(x)+G(y)=G(xy)$；　　(2) $G(x)-G(y)=G\left(\frac{x}{y}\right)$。

证明　(1) $G(x)+G(y)=\ln x+\ln y=\ln(xy)=G(xy)$。

(2)$G(x)-G(y)=\ln x-\ln y=\ln\frac{x}{y}=G\left(\frac{x}{y}\right)$。

10. 下列函数中哪些是偶函数，哪些是奇函数，哪些既非奇函数又非偶函数？

(1)$y=x^2(1-x^2)$；(2)$y=3x^2-x^3$；(3)$y=\frac{1-x^2}{1+x^2}$；(4)$y=x(x-1)(x+1)$；

(5)$y=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$；(6)$y=\frac{a^x-a^{-x}}{2}$；(7)$y=|\sin x|$；(8)$y=\sin x-\cos x+1$。

解 (1)设 $y=f(x)=x^2(1-x^2)$，则 $f(-x)=(-x)^2(1-(-x)^2)=x^2(1-x^2)=f(x)$，所以 $f(x)$为偶函数。

(2)设 $y=f(x)=3x^2-x^3$，则 $f(-x)=3(-x)^2-(-x)^3=3x^2+x^3\neq f(x)$ 且 $f(-x)\neq -f(x)$，所以 $f(x)$为非奇非偶函数。

(3)设 $y=f(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$，则 $f(-x)=\frac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}=\frac{1-x^2}{1+x^2}=f(x)$，所以$f(x)$为偶函数。

(4)设 $y=f(x)=x(x-1)(x+1)=x(x^2-1)$，则 $f(-x)=(-x)[(-x)^2-1]=-x(x-1)(x+1)=-f(x)$，所以$f(x)$为奇函数。

(5)设 $y=f(x)=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$，则 $f(-x)=\frac{a^{-x}+a^x}{2}=\frac{a^x+a^{-x}}{2}=f(x)$，所以 $f(x)$为偶函数。

(6)设 $y=f(x)=\frac{a^x-a^{-x}}{2}$，则 $f(-x)=\frac{a^{-x}-a^{-(-x)}}{2}=-\frac{a^x-a^{-x}}{2}=-f(x)$，所以$f(x)$为奇函数。

(7)设 $y=f(x)=|\sin x|$，则 $f(-x)=|\sin(-x)|=|\sin x|=f(x)$，所以 $f(x)$为偶函数。

(8)设 $y=f(x)=\sin x-\cos x+1$，则 $f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)+1=-\sin x-\cos x+1\neq f(x)\neq -f(x)$，所以$f(x)$为非奇非偶函数。

11. 设下面所考虑的函数都是定义在对称区间$(-l,l)$内的。证明：

(1)两个偶函数的和是偶函数，两个奇函数的和是奇函数；

(2)两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，偶函数与奇函数的乘积是奇函数。

证明 (1)设 $y_1=f(x)$，$y_2=g(x)$，$x\in(-l,l)$是两个偶函数，$y(x)=f(x)+g(x)$，$y(-x)=f(-x)+g(-x)=f(x)+g(x)=y(x)$，所以 $y(x)=f(x)+g(x)$是偶函数。

设 $\varphi(x)$，$\psi(x)$是定义在$(-l,l)$上的两个奇函数，且 $\Phi(x)=\varphi(x)+\psi(x)$，则 $\Phi(-x)=\varphi(-x)+\psi(-x)=-\varphi(x)-\psi(x)=-(\varphi(x)+\psi(x))=-\Phi(x)$，所以两个奇函数之和 $\varphi(x)+\psi(x)$是奇函数。

(2)设 $f(x),g(x)$是定义在$(-l,l)$内的两个偶函数,且 $F(x)=f(x)g(x)$,则 $F(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=f(x)\cdot g(x)=F(x)$,所以两个偶函数的积为偶函数。

设 $\varphi(x),\psi(x)$是定义在$(-l,l)$内的两个奇函数,$G(x)=\varphi(x)\cdot\psi(x)$,则 $G(-x)=\varphi(-x)\psi(-x)=[-\varphi(x)][-\psi(x)]=\varphi(x)\psi(x)$,所以两个奇函数的乘积为偶函数。

设 $f(x)$为定义在$(-l,l)$内的偶函数,$g(x)$是定义在$(-l,l)$内的奇函数,$\Phi(x)=f(x)g(x)$,则 $\Phi(-x)=f(-x)g(-x)=f(x)(-g(x))=-f(x)g(x)=-\Phi(x)$,所以偶函数与奇函数的乘积为奇函数。

12. 设 $f(x)$为定义在$(-l,l)$内的奇函数,若 $f(x)$在$(0,l)$内单调增加,证明 $f(x)$在$(-l,0)$内也单调增加。

证明 设$\forall x_1,x_2\in(-l,0)$,且 $x_1<x_2$,则有

$$-x_1,-x_2\in(0,l)\text{且}-x_2<-x_1$$

由题设条件知 $f(x)$在$(0,l)$内单调增加,可得

$$f(-x_2)<f(-x_1)$$

因为 $f(x)$是定义在$(-l,l)$内的奇函数,所以有

$$-f(x_2)<-f(x_1)$$

从而有 $\qquad f(x_1)<f(x_2)\quad x_1,x_2\in(-l,0)\text{且}\ x_1<x_2$

这就说明了对$(-l,0)$内任意的 $x_1<x_2$,都有 $f(x_1)<f(x_2)$,所以 $f(x)$在$(-l,0)$内单调增加。

13. 下列函数中哪些是周期函数;对于周期函数,指出其周期。

(1)$y=\cos(x-2)$; (2)$y=\cos 4x$; (3)$y=1+\sin\pi x$;

(4)$y=x\cos x$; (5)$y=\sin^2 x$。

思路 利用周期函数定义。设 $f(x)$是以 $T>0$ 为周期的函数,则 $f(ax)$ 是以$\dfrac{T}{a}$为周期的函数。

解 (1)设 $y=f(x)=\cos(x-2)$,则 $f(x+2\pi)=\cos(x+2\pi-2)=\cos[(x-2)+2\pi]=\cos(x-2)$,所以 $y=\cos(x-2)$是周期函数,周期 $l=2\pi$。

(2)设 $y=f(x)=\cos 4x$,则 $f(x+\frac{\pi}{2})=\cos(4x+2\pi)=\cos 4\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos 4x$ 是周期函数,周期 $l=\frac{\pi}{2}$。

(3)因为 $\sin x$ 是以 2π 为周期的函数,所以 $\sin\pi x$ 是以 2 为周期的函数,故 $y=1+\sin\pi x$ 是以 2 为周期的函数。

(4)$y=x\cos x$ 不是周期函数。

(5)$y=\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$,因为 $\cos x$ 是以 2π 为周期的函数,所以 $\cos 2x$ 的周

期为 π，即 $y=\sin^2 x$ 是周期函数且周期为 $l=\pi$。

14. 求下列函数的反函数。

(1) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$；　　(2) $y=2\sin 3x, x\in\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{6}\right]$；

(3) $y=1+\ln(x+2)$；　　(4) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$。

思路 $y=f(x)$ 的反函数求法：(1)从 $y=f(x)$ 解出 $x=f^{-1}(y)$；(2)将 x 换为 y，同时将 y 换为 x 得反函数 $y=f^{-1}(x)$。

解 (1) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$，$y+xy=1-x$，$x(1+y)=1-y$，$x=\dfrac{1-y}{1+y}$，从而得反函数 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$；

(2) $y=2\sin 3x$，$\sin 3x=\dfrac{y}{2}$，$3x=\arcsin\dfrac{y}{2}$，$x=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{y}{2}$，所以反函数 $y=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{x}{2}$，$x\in[-2,2]$。

(3) $\ln(x+2)=y-1$，$x+2=e^{y-1}$，$x=e^{y-1}-2$，所以反函数为 $y=e^{x-1}-2$。

(4) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$，$y+2^x y=2^x$，$2^x(1-y)=y$，$2^x=\dfrac{y}{1-y}$，$x=\log_2\dfrac{y}{1-y}$，所以反函数为 $y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$。

15. 在下列各题中，求由所给函数复合而成的函数，并求这函数分别对应于所给自变量 x_1 和 x_2 的函数值：

(1) $y=u^2$，$u=\sin x$，$x_1=\dfrac{\pi}{6}$，$x_2=\dfrac{\pi}{3}$；

(2) $y=\sin u$，$u=2x$，$x_1=\dfrac{\pi}{8}$，$x_2=\dfrac{\pi}{4}$；

(3) $y=\sqrt{u}$，$u=1+x^2$，$x_1=1$，$x_2=2$；

(4) $y=e^u$，$u=x^2$，$x=\tan t$，$t_1=0$，$t_2=\dfrac{\pi}{4}$；

(5) $y=u^2$，$u=e^x$，$x=\tan t$，$t_1=0$，$t_2=\dfrac{\pi}{4}$。

解 (1) $y=\sin^2 x$，$y\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin^2\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{4}$，$y\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin^2\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{3}{4}$。

(2) $y=\sin 2x$，$y\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$。

(3) $y=\sqrt{1+x^2}$，$y(1)=\sqrt{2}$，$y(2)=\sqrt{5}$。

(4) $y=e^{\tan^2 t}$，$y(0)=1$，$y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=e$。

(5) $y=e^{2\tan t}$，$y(0)=1$，$y\left(\frac{\pi}{4}\right)=e^2$。

16. 设 $f(x)$的定义域是$[0,1]$。问(1) $f(x^2)$，(2) $f(\sin x)$，(3) $f(x+a)(a>0)$，(4) $f(x+a)+f(x-a)$，$(a>0)$的定义域各是什么？

解　(1)由 $x^2\leqslant 1$，得$|x|\leqslant 1$，$-1\leqslant x\leqslant 1$，定义域为$[-1,1]$。

(2)由 $0\leqslant \sin x\leqslant 1$ 得 $2n\pi\leqslant x\leqslant(2n+1)\pi$，$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$。即定义域为$[2n\pi,(2n+1)\pi]$，$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$。

(3)由 $0\leqslant x+a\leqslant 1$，得$-a\leqslant x\leqslant 1-a$，即定义域为$[-a,1-a]$。

(4) $\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1\\ 0\leqslant x-a\leqslant 1\end{cases}$，若 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$时，则定义域为$[a,1-a]$；若 $a>\frac{1}{2}$时，则函数无定义。

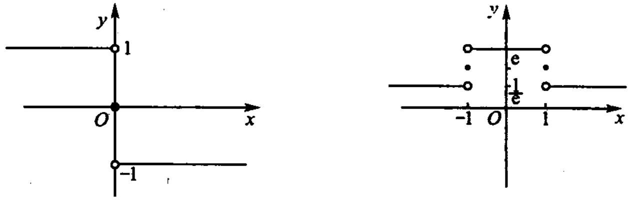
17. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 0, & |x|=1\\ -1, & |x|>1\end{cases}$，$g(x)=e^x$，求 $f[g(x)]$和 $g[f(x)]$，并作出这两个函数的图形。

解　$$f[g(x)]=\begin{cases}1, & |g(x)|<1\\ 0, & |g(x)|=1\\ -1, & |g(x)|>1\end{cases}=\begin{cases}1, & |e^x|<1\\ 0, & |e^x|=1\\ -1, & |e^x|>1\end{cases}$$
$$=\begin{cases}1, & x<0\\ 0, & x=0\\ -1, & x>0\end{cases}$$

因$|e^x|<1$，则 $x<0$；$|e^x|=1$，则 $x=0$；$|e^x|>1$，则 $x>0$，

$$g[f(x)]=e^{f(x)}=\begin{cases}e^1, & |x|<1\\ e^0, & |x|=1\\ e^{-1}, & |x|>1\end{cases}=\begin{cases}e, & |x|<1\\ 1, & |x|=1\\ e^{-1}, & |x|>1\end{cases}$$

两个函数图形如图 1-1 所示。



(a) $y=f[g(x)]$　　(b) $y=g[f(x)]$

图 1-1

18. 火车站收取行李费的规定如下：当行李不超过 50 千克时，按基本运费计

算，如从上海到某地每千克收 0.15 元。当超过 50 千克时，超重部分按每千克 0.25 元收费。试求上海到该地的行李费 y(元)与重量(千克)之间的函数关系式，并画出这函数的图形。

解 $y=\begin{cases}0.15x, & 0<x\leqslant 50 \text{ 的正整数}\\ 7.5+0.25(x-50), & x>50 \text{ 的正整数}\end{cases}$

函数的图形如图 1-2 所示。

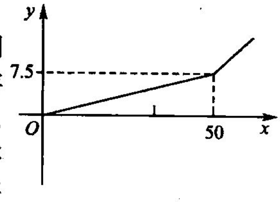


图 1-2

19. 按照银行规定某种外币一年期存款的年利率为 4.2%，半年期存款的年利率为 4.0%，每笔存款到期后，银行自动将其转存为同样期限的存款。设将总数为 A 单位货币的该种外币存入银行，两年后取出，问存何种期限的存款能有较多的收益，多多少？

解 存一年期存款一年后本利和为 $(1+4.2\%)A$

二年后取出的本利和为 $(1+4.2\%)^2A=1.085764A$

存半年期存款半年后取出本利和为 $(1+2\%)A$

二年后取出本利和为 $(1+2\%)^4A=1.0824321A$

存一年期的存款收益较多

多 $1.085764A-1.0824321A\approx 0.0033A$

点拨 将年利率换为月利率乘月份数，如 $(4\%\div 12)\times 6=2\%$ 为半年利率。

第二节 数列的极限

疑难问题解析

1 如何正确理解数列极限的概念？

分析 数列极限的严格定义要用不等式表达：$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$。

因此，在学习数列极限概念时，首先必须弄清有关不等式的含义：

(1)在定义中的“$\forall\varepsilon>0$”表示什么意思呢？ε 是任意给定的，即 ε 的任意性是不可缺少的，而 ε 一经给定之后，ε 就是已知的了。因此 ε 具有任意性和确定性这样的双重性，这就是 $\forall\varepsilon>0$ 的含义。

(2)定义中的“$\exists N>0$”表示什么意思呢？“$\exists$”是什么意思呢？“$\exists$”的含义是：不是惟一的。$\exists N>0$ 表示 N 不是惟一的，只要找得到某一个 N 就可以。但 N 与 ε 有关，所以找 N 时要合理，这就决定找 N 的方法可以采取“放大法”。

因此"$\exists N>0$"的含义是 N 具有不惟一性和合理性这样的双重性质。值得注意的是 N 与 ε 有关,但不是 ε 的函数。

(3)定义中的 $|x_n-a|$ 表示什么?绝对值 $|x_n-a|$ 表示数轴上的动点 $M(x_n)$ 与定点 $A(a)$ 之间的距离,即 $|AM|=|x_n-a|$。

(4)定义中的不等式"$|x_n-a|<\varepsilon$"表示什么意思?不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 表示动点 $M(x_n)$ 与定点 $A(a)$ 之间的距离小于任意给定的正数 ε。由于 ε 可以任意小,则不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 表示点 x_n 无限接近于 a。

(5)定义中的"当 $n>N$ 时,有 $|x_n-a|<\varepsilon$"表示什么意思?由(2)知,这里的 N 是由一个已经任意给定的 $\varepsilon>0$ 确定好的项序数,大于 N 的项的序数就是 $N+1,N+2,\cdots$。因此对于 $n>N$ 时的一切 x_n,不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 都成立,即不等式 $n>N$ 时是不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立的条件,也就是说当 $n>N$ 时就是下列无穷多个不等式:$|x_{N+1}-a|<\varepsilon,|x_{N+2}-a|<\varepsilon,\cdots$都成立。由于 ε 的任意性,从而有 x_n 无限接近于 a,即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。

上述(1)~(5)的分析是在教会读者如何看书,看书时对书中的定义的每句话都要读懂。

2 如何用数列极限[ε-N]定义验证极限?

分析　弄清数列极限[ε-N]定义中各项不等式的含义,就不难得出利用数列 $\{x_n\}$ 极限[ε-N]定义验证极限的一般步骤。

如用[ε-N]定义证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{4n+2}=\dfrac{1}{2}$,这里 $x_n=\dfrac{2n-1}{4n+2},a=\dfrac{1}{2}$ 都是已知的,$\forall\varepsilon>0$,ε 是任意给定,给定之后,ε 也是已知的。从而不等式 $\left|\dfrac{2n-1}{4n+2}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$ 是已知,用[ε-N]定义验证就是从已知不等式 $\left|\dfrac{2n-1}{4n+2}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$ 求出使此不等式成立的条件:$n>N$。因此问题的实质就是解不等式 $\left|\dfrac{2n-1}{4n+2}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$ 问题。下面给出一般规律:

按[ε-N]定义,先任给 $\varepsilon>0$,则 ε 就是已知的,而题中的 x_n,a 也是已知,假设结论成立,于是就化为从已知不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 去寻找该不等式成立的条件:$n>N$。由于 N 不是惟一的,因此 N 的选取具有灵活性,我们可以不必先追求最小的 N。一般采用"放大法",即 $|x_n-a|<$放大$<ME(n)<\varepsilon$,其中 M 是与 n 无关的正数。而不等式 $ME(n)<\varepsilon$ 容易解出 n。从而找到使不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立的条件,问题便得证。从上述分析知这种证题方法是"逆推法",也称"分析法"。

【例 1】　用[ε-N]定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}-1}{n}=0$。

证明　$\forall\varepsilon>0$,要证 $\exists N>0$,当 $n>N$ 时,有 $\left|\dfrac{\sqrt{n+1}-1}{n}-0\right|<\varepsilon$ 只须