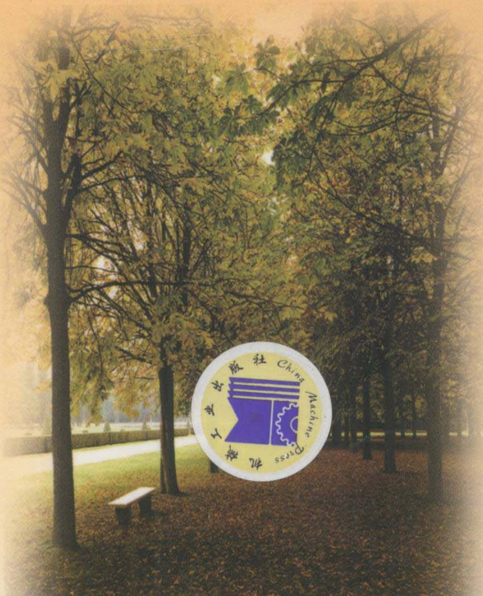
21世纪独立学院系列规划教材

线性代数

李洵　吴美云　周小建　编

葛志宏　审



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

21世纪独立学院系列规划教材

线性代数

李　洵　吴美云　周小建　编
葛志宏　审

机械工业出版社

本书主要学习对象为普通高校（三本和民办独立学院）的本科学生．本书以线性方程组为研究工具贯穿全书，系统地介绍了线性方程组、矩阵、行列式、向量组的线性相关性、特征值和特征向量、二次型等线性代数知识．在每章后配有自测题．本书针对学生特点，遵循学生的认知规律，着重于原理、计算和应用，适当减弱理论证明．采取通俗易懂、循序渐进、分散难点的处理方法，起点低，有适当坡度，以利于教学．

本书适用于32～40学时的线性代数课程教学．

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/李洵，吴美云，周小建编．—北京：机械工业出版社，2010.3

（21世纪独立学院系列规划教材）

ISBN 978－7－111－29610－2

Ⅰ．线…　Ⅱ．①李…②吴…③周…　Ⅲ．线性代数－高等学校－教材　Ⅳ．0151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2010）第012623号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）

策划编辑：韩效杰　责任编辑：韩效杰　责任校对：张莉娟

封面设计：赵颖喆　责任印制：乔　宇

北京京丰印刷厂印刷

2010年2月第1版 · 第1次印刷

169mm×239mm · 11.25印张 · 213千字

标准书号：ISBN 978－7－111－29610－2

定价：19.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务

社服务中心：(010)88361066

销 售 一 部：(010)68326294

销 售 二 部：(010)88379649

读者服务部：(010)68993821

网络服务

门户网：http：//www.cmpbook.com

教材网：http：//www.cmpedu.com

前　言

线性代数是大学工科、经济管理及医学各专业的必修公共基础课．课程的核心工具——矩阵，是各种现代科学技术最基本的数学工具．作为一门工程数学课程，该课程不仅是后续专业课程的基础，而且在基础知识、基本技能和逻辑思维、抽象思维等各方面都进行了必要的训练．

随着高等教育大众化及现代知识的不断更新，为使学生掌握更多的新知识、新技术，各高校对基础课课时不断压缩，讲授基础课程的难度越来越大，这是几乎所有高校都面临的问题．而线性代数内容抽象、课程知识容量大，讲授的难度很大，为了改善教学效果，使学生更容易学习，我们编写了本书．

本书针对普通高等院校的民办本科（三本）编写．民办本科（三本）的生源相对普通本科有一定差别，因此，在编写过程中特别注意深入浅出，通俗易懂，我们主要进行了以下探索：

1. 在新知识、新概念的引入方面做了一些探索工作．让学生明白为什么要定义这些新概念，这些概念有什么用．新概念是从要解决的问题中引出的，而不是给出概念再讨论其用处．尽可能让每个概念出现得自然、合理．这样一方面便于学生理解新知识，另一方面也引导学生去主动思考、主动探索问题．

2. 在讲授新知识时，明确提出了研究目标、要达到的目的，让学生知道我们的意图，尽可能展现研究问题的思路，而不是将知识强加给学生，使学习更有针对性．

3. 起点低，便于教学．本书以线性方程组为研究工具贯穿全书．将线性相关性、线性关系等抽象问题与线性方程组紧密相连，使学生能够利用线性方程组这一易于操作的代数工具去研究问题．

4. 针对普通民办高校（三本）的学生特点，遵循学生的认知规律，着重于原理、计算和应用，适当减弱理论证明．采取循序渐进、分散难点的处理方法．教材没有把重心放在理论推导上，也不是不问为什么，只问怎么用，而是按照认知规律，讲清楚原理，不进行严格论证．

5. 每章后面配备了自测题，便于学生了解自己的掌握情况，也为教师出卷提供参考．

6. 书中打星号的部分可以根据学生情况、学时情况适当选取．

本书是在南通大学理学院和杏林学院的大力支持下完成的，在此深表谢意．
由于水平有限，难免有处理不当之处，恳请使用的师生提出宝贵意见，以便于我

们改进.

本书的第 1、3 两章由吴美云老师、周小建老师编写，其余章节由李洵老师编写，并由李洵老师修改、统稿.

葛志宏老师审阅了全书，在此致以深深的谢意!

编　者

目　　录

第 1 章　矩阵的概念与消元法

线性运算是指对研究对象进行的加法和数乘运算，仅由加法和数乘构成的一次关系称为线性关系．线性代数主要研究线性运算和线性关系．矩阵是线性代数中最基本的概念之一，也是最基础的代数工具之一．矩阵广泛应用于自然科学、工程技术、社会科学等许多领域．尤其是伴随计算机的发展，矩阵成为了现代科技不可缺少的数学工具．

1.1　矩阵的概念

在日常生活中，经常可以看到用来表示特定对象的矩形数表．如商场里的物价表、机场的飞机时刻表、财务报表等等．还有一些实际问题可以借助矩形数表的表示来解决．

例 1.1.1　某校三个年级的 A，B，C 三个不同专业的学生人数及各年级的购教材款情况如下表．如果同专业各年级学生购买教材的费用相同，求出这三个不同专业的每个学生购买教材的费用．

	专业 A/人	专业 B/人	专业 C/人	购教材款/千元
一年级	30	31	31	123
二年级	31	32	32	127
三年级	30	32	34	130

解　设 A，B，C 三个专业的每个学生的购买教材费用分别为 x_1，x_2，x_3（千元），则由题意得三元一次方程组：

$$\begin{cases} 30x_1+31x_2+31x_3=123, & (1)\\ 31x_1+32x_2+32x_3=127, & (2)\\ 30x_1+32x_2+34x_3=130. & (3)\end{cases}$$

回忆中学学过的知识，我们知道可以用消元法解这个方程．过程如下：

$$\xrightarrow[(3)+(-1)\times(1)]{(2)+(-1)\times(1)}\begin{cases} 30x_1+31x_2+31x_3=123, & (1')\\ x_1+x_2+x_3=4, & (2')\\ x_2+3x_3=7, & (3')\end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1')+(-30)\times(2')}\begin{cases} x_2+x_3=3, & (1'') \\ x_1+x_2+x_3=4, & (2'') \\ x_2+3x_3=7, & (3'') \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(3'')+(-1)\times(1'')}\begin{cases} x_2+x_3=3, & (1''') \\ x_1+x_2+x_3=4, & (2''') \\ 2x_3=4. & (3''') \end{cases}$$

由第三个方程得 $x_3=2$，代入前面两个方程得 $x_1=1$，$x_2=1$.

也可以继续消元：$\xrightarrow[(1''')\leftrightarrow(2''')]{(3''')\times\frac{1}{2}}\begin{cases} x_1+x_2+x_3=4, & (1^{(4)}) \\ x_2+x_3=3, & (2^{(4)}) \\ x_3=2, & (3^{(4)}) \end{cases}$

$$\xrightarrow[(2^{(4)})+(-1)\times(3^{(4)})]{(1^{(4)})+(-1)\times(2^{(4)})}\begin{cases} x_1=1, \\ x_2=1, \\ x_3=2. \end{cases}$$

由于以上每一步都将方程组化为同解方程组，故 $x_1=1$，$x_2=1$，$x_3=2$（千元）是原方程组的解.

观察例 1.1.1，我们发现 x_1，x_2，x_3 满足的三元一次方程组由给定的矩形数表确定，而且每一个变化后的新方程组也都与一个矩形数表对应.

如方程组 $\begin{cases} 30x_1+31x_2+31x_3=123, \\ 31x_1+32x_2+32x_3=127, \\ 30x_1+32x_2+34x_3=130 \end{cases}$ 对应着 $\begin{pmatrix} 30 & 31 & 31 & 123 \\ 31 & 32 & 32 & 127 \\ 30 & 32 & 34 & 130 \end{pmatrix}$；

方程组 $\begin{cases} 30x_1+31x_2+31x_3=123, \\ x_1+x_2+x_3=4, \\ x_2+3x_3=7 \end{cases}$ 对应着 $\begin{pmatrix} 30 & 31 & 31 & 123 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

如果我们用 $r_i(i=1,2,3)$ 表示数表的第 i 行，则上面对方程组进行的同解变换过程可以用对应的矩形数表的变换过程表示如下：

$$\begin{cases} 30x_1+31x_2+31x_3=123, & (1) \\ 31x_1+32x_2+32x_3=127, & (2) \\ 30x_1+32x_2+34x_3=130, & (3) \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 30 & 31 & 31 & 123 \\ 31 & 32 & 32 & 127 \\ 30 & 32 & 34 & 130 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(3)+(-1)\times(1)]{(2)+(-1)\times(1)}\begin{cases} 30x_1+31x_2+31x_3=123, & (1') \\ x_1+x_2+x_3=4, & (2') \\ x_2+3x_3=7, & (3') \end{cases} \qquad \xrightarrow[r_3+(-1)\times r_1]{r_2+(-1)\times r_1}\begin{pmatrix} 30 & 31 & 31 & 123 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1')+(-30)\times(2')}\begin{cases} x_2+x_3=3,(1'') \\ x_1+x_2+x_3=4,(2'') \\ x_2+3x_3=7,(3'') \end{cases} \xrightarrow{r_1+(-30)\times r_2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3'')+(-1)\times(1'')}\begin{cases} x_2+x_3=3,(1''') \\ x_1+x_2+x_3=4,(2''') \\ 2x_3=4,(3''') \end{cases} \xrightarrow{r_3+(-1)\times r_1}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(1''')\leftrightarrow(2''')]{(3''')\times\frac{1}{2}}\begin{cases} x_1+x_2+x_3=4,(1^{(4)}) \\ x_2+x_3=3,(2^{(4)}) \\ x_3=2,(3^{(4)}) \end{cases} \xrightarrow[r_1\leftrightarrow r_2]{r_3\times\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(2^{(4)})+(-1)\times(3^{(4)})]{(1^{(4)})+(-1)\times(2^{(4)})}\begin{cases} x_1=1, \\ x_2=1, \\ x_3=2. \end{cases} \xrightarrow[r_2+(-1)\times r_3]{r_1+(-1)\times r_2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

变换过程中的每一个数表都对应着一个与原方程组同解的方程组，由最后一个矩形数表，我们可以写出原方程组的解 $x_1=1$，$x_2=1$，$x_3=2$.

我们看到，对三元一次方程组的化简等价于对方程组对应的矩形数表进行同样的化简．实际上方程组的变换和对应数表的变换是没有本质区别的，而数表中省去了变量、等号，这样写起来更简捷．

这样的矩形数表广泛应用于我们的生活之中，并且可以利用这样的矩形数表的一些运算、变换来解决问题．

定义 1.1.1　由 $m\times n$ 个数构成的一个 m 行 n 列的矩形数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为一个 m 行 n 列**矩阵**，简称 $m\times n$ 矩阵．其中第 i 行和第 j 列交叉位置的元素 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 称为该矩阵（i，j）位置的**元素**．

我们通常用大写的英文字母 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}\cdots$来表示矩阵．

矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 通常简记为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$；在不关心行数和列数时又简记为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$；在不关心元素形式时也可简记为 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}$.

如果 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 都是实数，我们称 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 为**实矩阵**.

定义 1.1.2 如果两个矩阵行数、列数分别对应相等，我们称这两个矩阵为**同型矩阵**；如果两个同型矩阵的对应位置的元素还相同，我们称这两个矩阵为**相等矩阵**.

由该定义知：两个矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times t}$ 相等当且仅当 $m=s$，$n=t$，且 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$.

下面给出一些常用的特殊矩阵.

1. 称 1 行 n 列的矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_1\quad a_2\quad \cdots\quad a_n)$ 为 **n 维行向量**，也记为 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，加在元素之间的逗号只起分隔这些数的作用，没有其他意义.

2. 称 n 行 1 列的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 为 **n 维列向量**.

行向量和列向量通常都由 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$，$\cdots$ 来表示.

称 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 或 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 的第 i 个分量.

3. $m=n$ 时，称 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 **n 阶方阵**.

特别地，称 n 阶方阵 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ 为**对角矩阵**，通常简记为

$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 或 $\mathbf{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$.

称 n 阶方阵 $\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$ 为**数量矩阵**.

称 n 阶方阵$\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}$为 **$n$ 阶单位矩阵**，记为 $\boldsymbol{E}_n$，简记为 $\boldsymbol{E}$.

如果 $m=n=1$，我们特别规定 $(a_{11})_{1\times 1}=a_{11}$.

4. 称所有元素都为 0 的矩阵为**零矩阵**，$m\times n$ 零矩阵记为 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$或简记为 $\boldsymbol{O}$.

例 1.1.2　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}x & -2 & 1\\ 1 & 0 & y\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1 & w & 1\\ z & 0 & 2\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，求 x，y，z，w.

解　由矩阵相等的定义知，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ 当且仅当它们的行数、列数分别相同，并且对应位置的元素相等．所以 $x=-1$，$y=2$，$z=1$，$w=-2$.

例 1.1.3　判断下列命题对错：

（1）$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$；

（2）$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$；

（3）$(1,2,1)=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$；

（4）已知$\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=1,\\ x_1-x_2+2x_3=-3,\end{cases}$则$\begin{pmatrix}2x_1+3x_2-x_3\\ x_1-x_2+2x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -3\end{pmatrix}$；

（5）$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

解　由于（1）、（2）、（3）中的两个矩阵都不是同型矩阵，所以都不可能是相等矩阵，因此（1）、（2）、（3）都是错的．

（4）$\begin{pmatrix}2x_1+3x_2-x_3\\ x_1-x_2+2x_3\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}$是同型矩阵，且对应位置元素相同，所以（4）正确．

（5）中两个矩阵是同型矩阵，但对应位置元素不同，所以也不能相等，（5）

也是错误的.

定义 1.1.3 称 n 元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases} \tag{1.1.1}$$

为**线性方程组**.

矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 和 $\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ 分别被称为线性方程组（1.1.1）的**系数矩阵**和**增广矩阵**.

如例 1.1.1 中，线性方程组 $\begin{cases} 30x_1+31x_2+31x_3=123, \\ 31x_1+32x_2+32x_3=127, \\ 30x_1+32x_2+34x_3=130. \end{cases}$ 的系数矩阵和增广矩阵分别为 $\begin{pmatrix} 30 & 31 & 31 \\ 31 & 32 & 32 \\ 30 & 32 & 34 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 30 & 31 & 31 & 123 \\ 31 & 32 & 32 & 127 \\ 30 & 32 & 34 & 130 \end{pmatrix}$；$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=4 \\ \qquad x_2+x_3=3 \\ \qquad\qquad x_3=2 \end{cases}$ 的系数矩阵和增广矩阵分别为 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

线性方程组和增广矩阵之间是相互唯一确定的. 对线性方程组进行消元法相当于对增广矩阵的行进行化简.

习 题 1.1

1. 判断下列哪对矩阵是相等矩阵？为什么？

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, E_2.

2. 设$\begin{pmatrix}2x_1+3x_2\\ x_1-x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}$, 求$x_1$, x_2.

3. 设$\begin{pmatrix}x_1+x_2+x_3\\ x_2+x_3\\ 2x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 3\\ 4\end{pmatrix}$, 求$x_1$, x_2, x_3.

4. 设$\begin{pmatrix}x+y & -2 & 1\\ 1 & 0 & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & w-1 & 1\\ z & 0 & 2\end{pmatrix}$, 求$x$, y, z, w.

5. 写出下列线性方程组的系数矩阵和增广矩阵.

(1) $\begin{cases} -x_2+x_4=2,\\ x_1+x_2-2x_3+x_4=4,\\ 2x_1-3x_2+x_3-x_4=2,\\ -3x_2+3x_3-4x_4=3\end{cases}$; (2) $\begin{cases} x_1+x_2=0,\\ x_1-x_3-x_4=0,\\ x_4-x_5-x_6=0.\end{cases}$

1.2　矩阵的初等行变换

在例1.1.1中，我们对方程组施行了下面三种变换:

1. 交换方程组中两个方程的位置;
2. 某个方程的两端同乘一个非零数;
3. 某个方程两端同乘一个数加到另一个方程的两端.

我们将线性方程组的这三种变换统称为**线性方程组的初等变换**.

定理1.2.1　线性方程组的初等变换将方程组变成同解的线性方程组.

用这三种变换对线性方程组进行消元化简，从而求出原方程组的解的方法称为消元法.

从例1.1.1中，我们看到一个线性方程组与其增广矩阵之间是相互唯一确定的. 对线性方程组进行消元法相当于将增广矩阵的行进行化简. 与消元法使用的三种初等变换相对应，我们给出矩阵的三种初等行变换.

定义1.2.1　称如下三种变换为矩阵的初等行变换:

1. 交换矩阵中某两行对应位置的元素;
2. 矩阵的某行的元素都乘一个非零数;
3. 矩阵的某行元素乘一个数加到另一行对应位置的元素上.

交换矩阵$\boldsymbol{A}$的i，j两行得到矩阵$\boldsymbol{B}$，记为$\boldsymbol{A}\xrightarrow{r_i\leftrightarrow r_j}\boldsymbol{B}$；矩阵$\boldsymbol{A}$的第$i$行元素都乘$k(k\neq 0)$得到$\boldsymbol{B}$，记为$\boldsymbol{A}\xrightarrow{r_i\times k}\boldsymbol{B}$；矩阵$\boldsymbol{A}$的第$j$行乘$k$加到第$i$行得到$\boldsymbol{B}$，记为$\boldsymbol{A}\xrightarrow{r_i+kr_j}\boldsymbol{B}$.

对线性方程组进行初等变换与对线性方程组的增广矩阵进行初等行变换相对应．解线性方程组时，我们用初等行变换化简增广矩阵，再由化简后的增广矩阵得到原方程组的解．

定义 1.2.2 如果$m\times n$矩阵$\boldsymbol{A}$具有如下特点：

1. $\boldsymbol{A}$的前$r(r\leqslant m)$行，每行元素均不全为0，后$m-r$行元素都为零；
2. 第$k(1\leqslant k\leqslant r)$行的第一个非零元素为$a_{kj_k}$，且满足$j_1<j_2<\cdots<j_r$.

我们称$\boldsymbol{A}$为**行阶梯形矩阵**，并称a_{kj_k}（$k=1$，2，…，r）为**阶梯头**，r为**台阶数**．

如果行阶梯形矩阵还满足：

3. 第$k(1\leqslant k\leqslant r)$行的第一个非零元素$a_{kj_k}=1$，且$a_{kj_k}(k=1,2,\cdots,r)$所在的$j_k$列的其他元素都为0，我们就称$\boldsymbol{A}$为**行最简形矩阵**．

显然，行最简形矩阵一定是行阶梯形矩阵，但行阶梯形矩阵不一定是行最简的．

例如$\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&3&2\\0&0&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}2&1&-1&1&0\\0&0&2&0&3\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}$都是行阶梯形矩阵，但不是行最简形矩阵．

而$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&1&0&0&2\\0&0&1&0&3\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}$是行最简形矩阵．

如果我们将增广矩阵化为行最简形矩阵，对应着化简后的行最简形矩阵就可以写出原方程组的解．

下面的定理保证了任何矩阵都可以用初等行变换化为行最简形．

定理 1.2.2 任何$m\times n$矩阵$\boldsymbol{A}$都可以通过若干次初等行变换化为行阶梯形，进而化为行最简形矩阵．

***证明** $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$时，我们就将零矩阵看成行最简形，结论成立．

$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$时，对矩阵的列数$n$用数学归纳法，

设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$，

$n=1$ 时，结论显然成立．

假设（$n-1$）列的矩阵都可以用初等行变换化为行阶梯形矩阵．

对于 n 列的矩阵 $\boldsymbol{A}$，如果 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 列元素都为零，$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{B})$，其中 $\boldsymbol{B}$ 为 $m\times(n-1)$，由归纳假设，$\boldsymbol{B}$ 可以用初等行变换化为行阶梯形矩阵，此时 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{B})$ 也为行阶梯形矩阵，结论成立．

如果 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 列元素不都为零，不妨设 $a_{11}\neq 0$（如果 $a_{11}=0$，$a_{i1}\neq 0$ $(1<i\leqslant m)$ 可以交换第一行和第 i 行对应位置元素，使（1，1）位置不为0），用 $-\dfrac{a_{k1}}{a_{11}}(k=2,3,\cdots,m)$ 乘第 1 行元素加到第 k 行，

$$\text{则有 } \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{m2}^{(1)} & \cdots & a_{mn}^{(1)} \end{pmatrix} \xlongequal{\text{记为}} \begin{pmatrix} a_{11} & \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}.$$

由归纳假设，$\boldsymbol{B}$ 可以通过若干次初等行变换化为行阶梯形矩阵．即 $\boldsymbol{A}$ 经过若干次初等行变换可化为如下形式的阶梯形矩阵．

$$\boldsymbol{A}=\to\cdots\to\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j_2-1} & b_{1j_2} & \cdots & b_{1j_r-1} & b_{1j_r} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{2j_2} & \cdots & b_{2j_r-1} & b_{2j_r} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{rj_r} & \cdots & b_{rn} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

其中，$b_{11}=a_{11}$ 为第 1 行的第一个非零元．此时，阶梯头为 $b_{kj_k}\neq 0(k=1,2,\cdots,r)$．这样我们就将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为行阶梯形矩阵．

第 $k(k=1,2,\cdots,r)$ 行乘以 $\dfrac{1}{b_{kj_k}}$，就将每个阶梯头化为 1，再依次用 $-\dfrac{b_{kj_r}}{b_{rj_r}}$ $(k=1,2,\cdots,r-1)$ 乘以第 r 行加到第 k 行，依次用 $-\dfrac{b_{kj_{r-1}}}{b_{r-1j_{r-1}}}(k=1,2,\cdots,r-2)$ 乘以第 $r-1$ 行加到第 k 行，…，$-\dfrac{b_{1j_2}}{b_{2j_2}}$ 乘以第 2 行加到第 1 行，就得到行最简形．

如果 $\boldsymbol{A}$ 经初等行变换化为行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$ 和行最简形矩阵 $\boldsymbol{C}$，我们分别称 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行阶梯形矩阵和行最简形矩阵．

例 1.2.1　用初等行变换化下列矩阵为行最简形矩阵．

(1) $A=\begin{pmatrix}1&2&2&7\\1&1&1&4\\0&1&3&7\end{pmatrix}$;

(2) $A=\begin{pmatrix}2&-1&3&1\\4&-2&5&4\\2&-1&4&-1\end{pmatrix}$;

(3) $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&1\\2&-3&1&-1&2\\0&-3&3&-4&3\end{pmatrix}$.

解 (1) $A=\begin{pmatrix}1&2&2&7\\1&1&1&4\\0&1&3&7\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&2&2&7\\0&-1&-1&-3\\0&1&3&7\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+r_2]{r_1+2r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&-1&-1&-3\\0&0&2&4\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[r_3\times\frac{1}{2}]{r_2\times(-1)}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&3\\0&0&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}.$$

(2) $A=\begin{pmatrix}2&-1&3&1\\4&-2&5&4\\2&-1&4&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}2&-1&3&1\\0&0&-1&2\\0&0&1&-2\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[r_1+3r_2]{r_3+r_2}\begin{pmatrix}2&-1&0&7\\0&0&-1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2\times(-1)]{r_1\times\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1&\frac{-1}{2}&0&\frac{7}{2}\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

(3) $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&1\\2&-3&1&-1&2\\0&-3&3&-4&3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&1\\2&-1&-1&1&2\\2&-3&1&-1&2\\0&-3&3&-4&3\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&1\\0&-3&3&-1&0\\0&-5&5&-3&0\\0&-3&3&-4&3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-\frac{5}{3}r_2]{r_4-r_2}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&1\\0&-3&3&-1&0\\0&0&0&-\frac{4}{3}&0\\0&0&0&-3&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3\times\left(-\frac{3}{4}\right)]{r_4\times\left(-\frac{1}{3}\right)}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&1\\0&-3&3&-1&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_2+r_3\\r_4-r_3}]{r_1-r_3}\begin{pmatrix}1&1&-2&0&1\\0&-3&3&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4\times(-1)]{r_2\times\left(-\frac{1}{3}\right)}\begin{pmatrix}1&1&-2&0&1\\0&1&-1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2-r_4}\begin{pmatrix}1&0&-1&0&0\\0&1&-1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

习　题　1.2

1. 下列矩阵哪些是行阶梯形矩阵，但不是行最简形矩阵？哪些是行最简形矩阵？

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0&3\\0&1&1&4\\0&0&2&0\end{pmatrix}$；(2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0&1&-2\\0&1&-4&1&4\\0&0&2&2&3\\0&0&-1&0&2\end{pmatrix}$；

(3) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1&0&2\\0&1&-5&0&10\\0&0&0&1&6\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$；(4) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1&1&2\\0&1&-5&3&10\\0&0&-3&2&6\\0&0&0&0&3\end{pmatrix}$.

2. 用初等行变换化下列矩阵为行最简形矩阵.

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&2&3\\2&1&1&4\\0&1&2&0\end{pmatrix}$；(2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\2&0&-3&2&6\\0&2&-1&0&2\end{pmatrix}$；

(3) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1&1&2\\3&1&-5&3&10\\2&0&-3&2&6\\0&2&-1&0&3\end{pmatrix}$.

1.3　消元法解线性方程组

研究线性方程组主要要解决的问题有：