薛春华 徐森林 编

数学分析精选习题全解

（下册）

清华大学出版社

薛春华 徐森林 编

数学分析精选习题全解

（下册）

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

作为《数学分析》[1]的配套书《数学分析精选习题全解(上、下)》,给出了该书全部思考题与复习题的详细解答.它的主要特点有:(1)重点突出、解题精炼,并灵活运用了微积分的经典方法和技巧.(2)注重一题多解.许多难题往往有多种证法或解法.既增强了读者的能力,又开阔了读者的视野.(3)系统论述$\mathbb{R}^n$的拓扑、n元函数的微分、n重积分、k维曲面积分以及有关难题.(4)应用外微分形式在定向曲面上的积分和Stokes定理$\int_{\partial \vec{M}}\omega=\int_{\vec{M}}\mathrm{d}\omega$描述了相关思考题和复习题的计算.反映出内容的近代气息.

本书可作为理工科大学或师范大学数学系教师和大学生,特别是报考数学专业研究生的大学生有益的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析精选习题全解.下册/薛春华,徐森林编.--北京:清华大学出版社,2010.4
ISBN 978-7-302-21496-0

Ⅰ.①数… Ⅱ.①薛… ②徐… Ⅲ.①数学分析-高等学校-习题 Ⅳ.①O17-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第214338号

责任编辑:刘 颖
责任校对:刘玉霞
责任印制:孟凡玉
出版发行:清华大学出版社 **地 址**:北京清华大学学研大厦A座
http://www.tup.com.cn **邮 编**:100084
社 总 机:010-62770175 **邮 购**:010-62786544
投稿与读者服务:010-62776969,c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈:010-62772015,zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者:北京市清华园胶印厂
装 订 者:三河市新茂装订有限公司
经 销:全国新华书店
开 本:185×230 **印 张**:27.75 **字 数**:600千字
版 次:2010年4月第1版 **印 次**:2010年4月第1次印刷
印 数:1~4000
定 价:39.80元

产品编号:027323-01

FOREWORD

前言

由我们编著的《数学分析》(共三册,由清华大学出版社出版)中的思考题与复习题有相当的难度,困惑了一部分大学生和读者,为使他们的阅读更有成效,应许多读者的要求,我们编写了这本习题解答,对课本中的思考题和复习题逐个解答,有的题还用了多种解法,这样既可增强读者的解题能力又开阔了视野.

本书分上、下两册出版,其中上册包括:数列极限(55 题),函数极限与连续(52 题),一元函数的导数、微分中值定理(73 题),Taylor 公式(21 题),不定积分(4 题),Riemann 积分(78 题),$(\mathbb{R}^n,\rho_0^n)$的拓扑、n 元函数的连续与极限(61 题),n 元函数微分学(56 题),n 元函数微分学的应用(9 题)共 9 章 409 道题目;下册包括:n 元函数的 Riemann 积分(63 题),曲线积分、曲面积分、外微分形式积分与场论(41 题),无穷级数(74 题),函数项级数(50 题),幂级数、用多项式一致逼近连续函数(37 题),含参变量积分(46 题),Fourier 分析(37 题)共 7 章 348 道题目.

我们希望大学生最好先不看题解,先独立思考,之后再对照答案.特别是那些有很强能力并将来有志于数学研究的学生必须先做题再对照检查以检测自己的实力.因为将来搞研究的创造能力主要来源于平时的独立思考、独立解决问题的习惯.而依赖于看答案的做法实在是一种懒惰的思想.对于那些确实做题有困难而又想考研究生的大学生.建议你们一边做题,一边看答案,这总比为没有答案做不出题而苦恼,甚至放弃学习要好.

另一方面,撰写本书,也可给大学数学系的教师提供一些开阔解题思路的借鉴.同时也期望能引出他们更好、更多的解题方法,起到抛砖引玉的作用.

选用我们编的《数学分析》这套教材,学习可分两个层次.第一层次是学好全书的主要内容,包括微积分的经典内容和方法;定理和例题的多种证法和解法;以及用近代观点论述$\mathbb{R}^n$ 中的拓扑、映射的微分、外微分和 Stokes 定理.再做书中相应的练习题.达到这样,学生已具有较高的分析数学的水平了.第二层次是全面做思考题、复习题.遇到困难,本书能为你向数学高峰攀登助一臂之力.

对于拟参加中国大学生数学竞赛的同学来说,演练书中的题目也是非常有帮助的.

最后,作者要感谢为本书难题解答提供过精妙证法的大学生、研究生.特别还要感谢清华大学出版社的编审刘颖同志.他给了我们热情的支持和有效的帮助.

薛春华　徐森林

2008 年 12 月于北京

CONTENTS

目　录

第 10 章

n元函数的Riemann积分

Ⅰ. 闭区间(闭长方形)上的二重积分

类似一元函数在区间上 Riemann 积分的定义 6.1.1,有下面定义.

定义 10.1.1 设 $I=[a,b]\times[c,d]$为$\mathbb{R}^2$ 中闭区间(闭长方形,即每边平行于坐标轴的闭矩形),作$[a,b]$的分割

$$T_x: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b;$$

又作$[c,d]$的分割

$$T_y: c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = b.$$

两族平行直线 $x=x_i(i=0,1,\cdots,n)$与 $y=y_j(j=0,1,\cdots,m)$将 I 分割成$k=n\times m$ 个子区间

$$[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j],\quad i = 1,2,\cdots,n;\ j = 1,2,\cdots,m.$$

这 k 个子区间的全体组成 I 的一个分割 $T=T_x\times T_y=\{I_1,I_2,\cdots,I_k\}$. 任取$\boldsymbol{\xi}^i\in I_i(i=1,2,\cdots,k)$. 对二元函数 $f:I\to\mathbb{R}$ 作 **Riemann 和**(也称为**积分和**)

$$\sum_{i=1}^{n} f(\boldsymbol{\xi}^i)v(I_i),$$

其中 $v(I_i)$为二维闭区间(闭长方形或闭矩形)I_i 的面积,即 I_i 的长与宽之积. 记

$$\| T \| = \max\{\mathrm{diam}I_1,\mathrm{diam}I_2,\cdots,\mathrm{diam}I_k\},$$

这里 I_i 的直径 $\mathrm{diam}I_i$ 为区间 I_i 的对角线的长度,称 $\|T\|$ 为分割 T 的**模**. 而$\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\xi}^1,\boldsymbol{\xi}^2,\cdots,\boldsymbol{\xi}^k)\in I_1\times I_2\times\cdots\times I_k$.

如果$\exists J\in\mathbb{R}$, s. t. $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$,当$\|T\|<\delta$时,$\forall\boldsymbol{\xi}\in I_1\times I_2\times\cdots\times I_k$,都有

$$\left|\sum_{i=1}^{k} f(\boldsymbol{\xi}^i)v(I_i) - J\right| < \varepsilon,$$

则称二元函数 f 在闭区间 I 上(**Riemann**)**可积**,而

$$J = \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{k} f(\boldsymbol{\xi}^i)v(I_i) \xlongequal{\text{def}} \iint_I f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad 或 \quad \iint_I f\,\mathrm{d}v \text{ 或} \int_I f$$

称为 f 在 I 上的**二重积分**，$\mathrm{d}v=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 称为**面积元**.

如此定义的积分具有与一元函数积分类似的简单性质(定理 10.1.1).

定理 10.1.3(可积的必要条件)　设 f 在闭区间 $I=[a,b]\times[c,d]$ 上 Riemann 可积，则 f 在 $I=[a,b]\times[c,d]$ 上有界(因而无界函数不是 Riemann 可积的). 但反之不真 $\left(\text{反例：} D(x,y)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}^2\cap[0,1]^2\\ 0, & x\in[0,1]^2\setminus\mathbb{Q}^2\end{cases}\right)$.

定义 10.1.2　设 $A\subset\mathbb{R}^2$. 如果对任何 $\varepsilon>0$，存在有限个二维闭区间 $I_1,I_2,\cdots,I_k$ 使得

$$\bigcup_{i=1}^{k} I_i\supset A,\quad \text{且}\quad \sum_{i=1}^{k} v(I_i)<\varepsilon,$$

则称 A 为**零面积集**.

设 $A\subset\mathbb{R}^2$，如果对任何 $\varepsilon>0$，存在至多可数个二维闭区间 $I_1,I_2,\cdots,I_k,\cdots$，使得

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i\supset A,\quad \text{且}\quad \sum_{i=1}^{\infty} v(I_i)<\varepsilon,$$

则称 A 为**零测集**.

定理 10.1.4　零面积集必为零测集. 但反之不真(如：$A=\mathbb{Q}^2\cap[0,1]^2$).

例 10.1.1　设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 为连续函数，则 f 的图像

$$\mathrm{graph}f=\{(x,f(x))\mid x\in[a,b]\}\subset\mathbb{R}^2$$

为零面积集.

例 10.1.2　设 $l\subset\mathbb{R}^2$ 为 C^0 参数曲线，并且其中至少有一个分量有连续的导数，则 l 为零面积集.

定理 10.1.7(Riemann 可积的充要条件)　设 $I\subset\mathbb{R}^2$ 为二维闭区间，$f:I\to\mathbb{R}$ 为有界函数，即 $|f(x)|\leqslant M$，$\forall x\in I$. 则下面结论等价：

(1) f 在 I 上 Riemann 可积.

(2) f 在 I 上的上积分与下积分相等，即 $S=s$.

(3) 对任何 $\varepsilon>0$，存在 I 的某个分割 T，使得

$$S(T)-s(T)=\sum_{i=1}^{k}\omega_i v(I_i)<\varepsilon.$$

(4) 存在 I 的分割串 $T_m(m=1,2,\cdots)$，使得

$$\lim_{m\to+\infty}[S(T_m)-s(T_m)]=0.$$

(5) $\lim\limits_{\|T\|\to 0}[S(T)-s(T)]=0$.

(6) 对任何 $\varepsilon>0$，存在 I 的某个分割 $T=\{I_1,I_2,\cdots,I_k\}$，使对任何 $\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\xi}^1,\boldsymbol{\xi}^2,\cdots,\boldsymbol{\xi}^k)\in I_1\times I_2\times\cdots\times I_k$，有

$$|S(T,f,\boldsymbol{\xi})-J|<\varepsilon.$$

(7) 对任何 $\varepsilon>0,\eta>0$，存在 I 的某个分割 $T=\{I_1,I_2,\cdots,I_k\}$，使得

$$\sum_{\omega_i \geqslant \varepsilon} v(I_i) < \eta.$$

(8)(Lebesgue 定理)f 在 I 上几乎处处连续,即 f 的不连续点集 $D_{\text{不}}^{f}$(简记为 $D_{\text{不}}$)为零测集,记作

$$\text{meas} D_{\text{不}}^{f} = 0.$$

例 10.1.3　Dirichlet 函数

$$D(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in \mathbb{Q}^2 \cap [0,1]^2, \\ 0, & (x,y) \in [0,1]^2 \setminus \mathbb{Q}^2 \end{cases}$$

在$[0,1]^2$ 上不可积.

例 10.1.4　设 $I \subset \mathbb{R}^2$ 为二维闭区间,$f: I \to \mathbb{R}$ 有界. 若 $l = \{\boldsymbol{x} \in I \mid f(\boldsymbol{x}) \neq 0\}$ 为零面积集,则 f 在 I 上可积,且$\int_I f = 0$.

例 10.1.5　设 $I \subset \mathbb{R}^2$ 为二维闭区间,$f, g: I \to \mathbb{R}$ 都为有界函数,集合 $l = \{\boldsymbol{x} \in I \mid f(\boldsymbol{x}) \neq g(\boldsymbol{x})\}$为一零面积集. 如果 f 与 g 中有一个在 I 上可积,则另一个也在 I 上可积,并用

$$\int_I f = \int_I g.$$

例 10.1.6　设 $I \subset \mathbb{R}^2$ 为二维闭区间,$A \subset I$,A 的特征函数

$$\chi_A(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \in I \setminus A, \end{cases}$$

则

$$A = \{\boldsymbol{x} \in I \mid \chi_A(\boldsymbol{x}) \neq 0\} \text{ 为零面积集} \Leftrightarrow \int_I \chi_A = 0.$$

Ⅱ. $\mathbb{R}^2$ 中有界集合上的二重积分

定义 10.2.1　设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 为有界集,$f: \Omega \to \mathbb{R}$ 为二元函数. 记

$$f_\Omega(\boldsymbol{x}) = f_\Omega(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \boldsymbol{x} = (x,y) \in \Omega, \\ 0, & \boldsymbol{x} = (x,y) \notin \Omega, \end{cases}$$

并称为 f 的**零延拓**. 任取闭区间 $I \supset \Omega$. 如果 f_Ω 在 I 上 Riemann 可积,则称 **f 在 Ω 上 Riemann 可积**(简称**可积**),记为

$$\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_\Omega f\,\mathrm{d}v = \int_\Omega f = \int_\Omega f_\Omega = \iint_I f_\Omega(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(引理 10.2.1 指出,上面的值与含 Ω 的闭区间 I 的选取无关.)

定理 10.2.1(可积的充分条件)　设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 为有界集,函数 $f: \Omega \to \mathbb{R}$ 有界. 如果$\partial\Omega$ 与 f 在 Ω 上的不连续点集 $D_{\text{不}}^{f}$ 都为零测集,则 f 在 Ω 上可积.

定理 10.2.2(可积的必要条件) 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 为有界集. 如果 f 在 Ω 上可积,则 f 在 Ω 上必有界(因而无界函数不可积). 但反之不真.

定理 10.2.3(零面积集的积分特征) 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 为有界集,则

$$\Omega\text{ 为零面积集}\Leftrightarrow\int_\Omega 1=0.$$

定义 10.2.2 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 为有界集. 如果函数 1 在 Ω 上可积,则称 Ω 为**有面积集**,且 Ω 的**面积**为

$$v(\Omega)=\int_\Omega 1=\iint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_I 1_\Omega,$$

其中 I 包含 Ω 的闭区间.

定理 10.2.4(有面积集的几何特征一) 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 为有界集,闭区间 $I\supset\Omega$,则 Ω 为有面积集$\Leftrightarrow$对 I 的分割 $T=\{I_1,I_2,\cdots,I_k\}$,有

$$\lim_{\|T\|\to0}S(T,1_\Omega)=\lim_{\|T\|\to0}\sum_{\Omega\cap I_i\neq\varnothing}v(I_i)=\lim_{\|T\|\to0}\sum_{I_i\subset\Omega}v(I_i)=\lim_{\|T\|\to0}s(T,1_\Omega).$$

此时

$$v(\Omega)=\int_\Omega 1=\int_I 1_\Omega.$$

定理 10.2.5(有面积集的几何特征二) 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 为有界集,则

$$\Omega\text{ 为有面积集}\Leftrightarrow\partial\Omega\text{ 为零面积集},\quad\text{即}\quad v(\partial\Omega)=0.$$

定理 10.2.6(有面积集上函数可积的充要条件) 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 为有面积集,$f:\Omega\to\mathbb{R}$ 为有界二元函数. 则

f 在 Ω 上可积$\Leftrightarrow D_{不}^f=\{(x,y)\in\Omega\mid f$ 在(x,y)处不连续$\}$为零测集,即 f 在 Ω 上几乎处处连续.

例 10.2.3 设 Ω 为有限段显式表示的连续曲线围成的区域,则 Ω 为有面积集.

有界集 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 上可积函数积分的简单性质可参阅定理 10.2.7、定理 10.2.8.

定理 10.2.9(积分中值定理) 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 为有面积的连通紧致集,$f,g:\Omega\to\mathbb{R}$ 连续,且 g 在 Ω 上不变号,则 $\exists\boldsymbol{\xi}\in\Omega$, s. t.

$$\int_\Omega fg=f(\boldsymbol{\xi})\int_\Omega g.$$

特别地,取 $g=1$,则 $\exists\boldsymbol{\xi}\in\Omega$, s. t.

$$\int_\Omega f=f(\boldsymbol{\xi})v(\Omega).$$

Ⅲ. 化二重积分为累次积分

定理 10.3.3(闭区间上化二重积分为累次积分) 设 f 在 $I=[a,b]\times[c,d]$上可积,且 $\forall x\in[a,b]$,$f(x,\cdot)$在$[c,d]$上可积(又 $\forall y\in[c,d]$,$f(\cdot,y)$在$[a,b]$上可积),则

$$\int_I f = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y \quad \left(= \int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\right).$$

特别地，当 f 在 I 上连续时，上式成立.

定理 10.3.4（有界集上化二重积分为累次积分）　设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 为有面积集，$f: \Omega \to \mathbb{R}$ 有界且连续. 记 Ω 在 x 轴上的垂直投影为

$$I = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists\, y, \text{s. t.}\ (x,y) \in \Omega\}.$$

如果 $\forall\, x \in I$，截 $\Omega_x = \{y \in \mathbb{R} \mid (x,y) \in \Omega\}$ 为一区间（可退缩为一点），则

$$\int_\Omega f = \int_I \mathrm{d}x \int_{\Omega_x} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

同样，记 Ω 在 y 轴上的垂直投影为

$$J = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists\, x, \text{s. t.}\ (x,y) \in \Omega\}.$$

如果 $\forall\, y \in J$，截 $\Omega^y = \{x \in \mathbb{R} \mid (x,y) \in \Omega\}$ 为一区间（可以退缩为一点），则

$$\int_\Omega f = \int_J \mathrm{d}y \int_{\Omega^y} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

定理 10.3.5（有界集上化二重积分为累次积分）　设

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x), a \leqslant x \leqslant b\},$$

其中函数 y_1 与 y_2 在 $[a,b]$ 上连续，函数 f 在 Ω 上可积. 如果 $\forall\, x \in [a,b]$，单变量积分

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

存在，则

$$\int_\Omega f = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

定理 10.3.6（有界集上化二重积分为累次积分）　设

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1(y) \leqslant x \leqslant x_2(y), c \leqslant y \leqslant d\},$$

其中函数 x_1 与 x_2 在 $[c,d]$ 上连续，函数 f 在 Ω 上可积. 如果 $\forall\, y \in [c,d]$，单变量积分

$$\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$$

存在，则

$$\int_\Omega f = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

注　结合定理 10.3.5 与定理 10.3.6，可以将一个二重积分化为累次积分计算；也可以将一个难算或不能算的累次积分通过交换积分化为一个易算或能算的累次积分.

Ⅳ. 二重积分的换元（变量代换）

定理 10.4.1（二重积分的换元（变量代换））　设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 为开集，映射

$$\boldsymbol{F}: \Omega \to \mathbb{R}^2, \quad (u,v) \mapsto \boldsymbol{F}(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$$

满足：(1°) $\boldsymbol{F}\in C^1(\Omega,\mathbb{R}^2)$；

(2°) $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\det\mathbf{J}\boldsymbol{F}(u,v)=\det\mathbf{J}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p})\neq 0,\boldsymbol{p}=(u,v)\in\Omega$；

(3°) $\boldsymbol{F}$ 为单射.

如果集合 Δ 为有面积集，且 $\bar{\Delta}\subset\Omega$，$f$ 为 $\boldsymbol{F}(\Omega)$ 上的连续函数，则 $\boldsymbol{F}(\Delta)$ 也为有面积集，且

$$\int_{\boldsymbol{F}(\Delta)} f=\int_{\Delta} f\circ\boldsymbol{F}\mid\det\mathbf{J}\boldsymbol{F}\mid,$$

即

$$\iint\limits_{\boldsymbol{F}(\Delta)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Delta} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

定理 10.4.2(二维极坐标换元公式)　设 $\Omega=(0,+\infty)\times(0,2\pi)$，$\Delta\subset\bar{\Omega}$ 为有面积集，$\boldsymbol{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,(r,\varphi)\mapsto(x,y)=\boldsymbol{F}(r,\varphi)=(r\cos\varphi,r\sin\varphi)$，

$$\det\mathbf{J}\boldsymbol{F}(r,\varphi)=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{vmatrix}=r.$$

如果 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续，则

$$\iint\limits_{\boldsymbol{F}(\Delta)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Delta} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi.$$

注　通过二重积分的换元(变量代换)将一个难算或不能算的二重积分化为易算或能算的二重积分.

Ⅴ. 三重积分、n 重积分

n 元函数的 n 重积分在概念和理论上都与二重积分的概念和理论是一样的(参阅[1]第二册 251～253 页).

定理 10.5.1(三重积分化为累次积分)　有界集 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 为有体积集，$f:\Omega\to\mathbb{R}$ 有界且连续.

(1) 设 Ω 在 xOy 平面上的垂直投影为 $D=\{(x,y)\mid\exists z\in\mathbb{R},\text{s.t.}(x,y,z)\in\Omega\}$，它为有面积集，且当 $(x,y)\in D$ 时，过点 $(x,y,0)$ 并垂直于 xOy 平面的直线与 Ω 交成一个区间 $\Omega_{xy}=\{z\mid(x,y,z)\in\Omega\}=[\varphi_1(x,y),\varphi_2(x,y)]$(可退化为一点)，则

$$\int_{\Omega} f=\iint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\Omega_{xy}} f(x,y,z)\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

(2) 设 Ω 在 z 轴上的垂直投影 $J=\{z\mid\exists(x,y)\in\mathbb{R}^2,\text{s.t.}(x,y,z)\in\Omega\}$ 为一个区间，且当 $z\in J$ 时，通过点 $(0,0,z)$ 并垂直于 z 轴的平面与 Ω 交成的图形在 xOy 平面上的垂直投影 $\Omega_z=\{(x,y)\mid(x,y,z)\in\Omega\}$ 为一有面积集，则

$$\int_{\Omega} f=\int_J\mathrm{d}z\iint\limits_{\Omega_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

定理 10.5.2　在定理 10.5.1 中：

(1) 如果 $D=\{(x,y)\mid\psi_1(x)\leqslant y\leqslant\psi_2(x),a\leqslant x\leqslant b\}$，$\psi_1(x)$ 与 $\psi_2(x)$ 都为连续函数，则

$$\int_\Omega f=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)}\mathrm{d}y\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)}f(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

(2) 如果 $J=[c,d]$，$\Omega_z=\{(x,y)\mid\varphi_1(y,z)\leqslant x\leqslant\varphi_2(y,z),\psi_1(z)\leqslant y\leqslant\psi_2(z)\}$，其中 $\varphi_1(y,z)$，$\varphi_2(y,z)$，$\psi_1(z)$，$\psi_2(z)$ 都为连续函数，则

$$\int_\Omega f=\int_c^d\mathrm{d}z\int_{\psi_1(z)}^{\psi_2(z)}\mathrm{d}y\int_{\varphi_1(y,z)}^{\varphi_2(y,z)}f(x,y,z)\mathrm{d}x.$$

更一般地，有

定理 10.5.3(n 重积分化为累次积分)　设有界集 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 为有体积集，$f:\Omega\to\mathbb{R}$ 为有界连续函数.

(1) 如果 $\Omega=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n\mid$ 当 $(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})\in D\subset\mathbb{R}^{n-1}$ 时，$\varphi_1(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})\leqslant x_n\leqslant\varphi_2(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})\}$，其中 D 为 $n-1$ 维有体积集，φ_1 与 φ_2 都连续，则

$$\int_\Omega f=\int\cdots\int_D\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{n-1}\int_{\varphi_1(x_1,\cdots,x_{n-1})}^{\varphi_2(x_1,\cdots,x_{n-1})}f(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n)\mathrm{d}x_n.$$

(2) 如果 $\Omega=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n\mid$ 当 $x_n\in[a,b]$ 时，$(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})\in\Omega_{x_n}\subset\mathbb{R}^{n-1}\}$，其中 Ω_{x_n} 为 $n-1$ 维有体积集，则

$$\int_\Omega f=\int_a^b\mathrm{d}x_n\int\cdots\int_{\Omega_{x_n}}f(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{n-1}.$$

(3) 如果 $\Omega=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n\mid$ 当 $(x_{k+1},\cdots,x_n)\in D\subset\mathbb{R}^{n-k}$ 时，$(x_1,x_2,\cdots,x_k)\in\Omega_{x_{k+1}\cdots x_n}\subset\mathbb{R}^k\}$，其中 D 与 $\Omega_{x_{k+1}\cdots x_n}$ 分别为 $n-k$ 维与 k 维有体积集，则

$$\int_\Omega f=\overbrace{\int\cdots\int_D}^{n-k}\mathrm{d}x_{k+1}\cdots\mathrm{d}x_n\overbrace{\int\cdots\int_{\Omega_{x_{k+1}\cdots x_n}}}^{k}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n.$$

定理 10.5.4(n 重积分的换元(变量代换))　设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 为开集，映射 $\boldsymbol{F}=(F_1,F_2,\cdots,F_n):\Omega\to\mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,\cdots,u_n)\mapsto\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})=(F_1(u_1,u_2,\cdots,u_n),F_2(u_1,u_2,\cdots,u_n),\cdots,F_n(u_1,u_2,\cdots,u_n))$，且满足：

(1°) $\boldsymbol{F}\in C^1(\Omega,\mathbb{R}^n)$；

(2°) $\dfrac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial(u_1,u_2,\cdots,u_n)}=\det\boldsymbol{JF}(u_1,u_2,\cdots,u_n)=\operatorname{def}\boldsymbol{JF}(\boldsymbol{p})\neq0$，$\boldsymbol{p}=(u_1,u_2,\cdots,u_n)\in\Omega$；

(3°) $\boldsymbol{F}$ 为单射.

如果集合 Δ 为有体积集，$\bar{\Delta}\subset\Omega$，$f$ 为 $\boldsymbol{F}(\Omega)$ 上的连续函数，$\boldsymbol{F}(\Delta)$ 也为有体积集，且

$$\int_{\boldsymbol{F}(\Delta)}f=\int_\Delta f\circ\boldsymbol{F}\mid\det\boldsymbol{JF}\mid,$$

即

$$\int\cdots\int_{\boldsymbol{F}(\Delta)}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

$$= \int \cdots \int_{\Delta} f(x_1(u_1,u_2,\cdots,u_n),\cdots,x_n(u_1,u_2,\cdots,u_n)) \left| \frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial(u_1,u_2,\cdots,u_n)} \right| \mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_n.$$

当 $n=3$ 时,为

$$\iiint_{F(\Delta)} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\Delta} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w.$$

定理 10.5.5(三重积分球坐标换元公式) 设 $\Omega=(0,+\infty)\times(0,\pi)\times(0,2\pi)$,$\Delta\subset\bar{\Omega}$ 为有体积集,则 $\boldsymbol{F}(\Delta)$ 也为有体积集,其中 $(x,y,z)=\boldsymbol{F}(r,\theta,\varphi)=(r\sin\theta\cos\varphi,r\sin\theta\sin\varphi,r\cos\theta)$. 如果 f 在 $\mathbb{R}^3$ 上连续,则

$$\iiint_{F(\Delta)} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\Delta} f(r\sin\theta\cos\varphi,r\sin\theta\sin\varphi,r\cos\theta)r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi.$$

定理 10.5.6(n 重积分球坐标换元公式) 设 $\Omega=(0,+\infty)\times(0,\pi)\times\cdots\times(0,\pi)\times(0,2\pi)\subset\mathbb{R}^n$,$\Delta\subset\bar{\Omega}$ 为有体积集,则 $\boldsymbol{F}(\Delta)$ 也为有体积集,其中 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{F}(r,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_{n-1})=(r\cos\theta_1,\ r\sin\theta_1\cos\theta_2,\ r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3,\ \cdots,\ r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1},\ r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1})$,如果 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上连续,则

$$\int\cdots\int_{F(\Delta)} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

$$= \int\cdots\int_{\Delta} f(r\cos\theta_1,r\sin\theta_1\cos\theta_2,r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3,\cdots,r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1},$$

$$r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1})r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta_1\cdots\mathrm{d}\theta_{n-1}.$$

定理 10.5.7(三重积分柱坐标换元公式) 设 $\Omega=(0,+\infty)\times(0,2\pi)\times\mathbb{R}$,$\Delta\subset\bar{\Omega}$ 为有体积集,则 $\boldsymbol{F}(\Delta)$ 也为有体积集,其中 $\boldsymbol{F}(r,\varphi,z)=(r\cos\varphi,r\sin\varphi,z)$. 如果 f 在 $\mathbb{R}^3$ 中连续,则

$$\iiint_{F(\Delta)} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\Delta} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi,z)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z.$$

例 10.5.11 n 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 中,点集

$$S_n(a) = \{(x_1,x_2,\cdots,x_n) \mid x_1,x_2,\cdots,x_n \geqslant 0 \text{ 且 } x_1+x_2+\cdots+x_n \leqslant a\}, \quad a>0$$

称为一个 ***n* 维单形**. 它的体积为

$$v(S_n(a)) = \frac{a^n}{n!}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

例 10.5.12 n 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 中,以原点为中心,$a>0$ 为半径的 ***n* 维闭球体**

$$\overline{B_n(\boldsymbol{0};\ a)} = \{(x_1,x_2,\cdots,x_n) \mid x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 \leqslant a^2\}$$

的体积为

$$v(\overline{B_n(\boldsymbol{0};\ a)}) = \frac{(\sqrt{\pi}a)^n}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} = \begin{cases} \dfrac{\pi^k}{k!}a^{2k}, & n=2k, \\ \dfrac{2^k\pi^{k-1}}{(2k-1)!!}a^{2k-1}, & n=2k-1. \end{cases}$$

例 10.5.14　$n-1$ 维单位球面 $S^{n-1}(1)=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n\mid x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1\}$，则它的面积为

$$\sigma(S^{n-1}(1))=\begin{cases}\dfrac{2\pi^k}{(k-1)!}, & n=2k,\\ \dfrac{2(2\pi)^{k-1}}{(2k-3)!!}, & n=2k-1.\end{cases}$$

Ⅵ. 广义重积分

参阅[1]第二册 281～292 页.

410. 设 $f>0$ 在闭区间 $I\subset\mathbb{R}^2$ 上成立，且 f 在 I 上 Riemann 可积. 证明：$\int_I f>0$.

证法 1　因为 f 在 I 上 Riemann 可积，所以 f 在 I 上几乎处处连续，即不连续点集 $D_{不}^f$ 为零测集. 记为 $\text{meas}D_{不}^f=0$. 于是，必有 $\boldsymbol{x}^0\in\mathring{I}$，$f$ 在 $\boldsymbol{x}^0$ 连续. 又因 $f(\boldsymbol{x}^0)>0$. 故对 $\varepsilon=\dfrac{f(\boldsymbol{x}^0)}{2}>0$，$\exists\,\delta>0$，s. t. 当 $B(\boldsymbol{x}^0;\delta)\subset\mathring{I}$. $\forall\,\boldsymbol{x}\in B(\boldsymbol{x}^0;\delta)$时，有

$$f(\boldsymbol{x})>f(\boldsymbol{x}_0)-\varepsilon=f(\boldsymbol{x}^0)-\frac{f(\boldsymbol{x}^0)}{2}=\frac{f(\boldsymbol{x}^0)}{2}>0,$$

于是

$$\int_I f\geqslant\int_{B(\boldsymbol{x}^0;\delta)}f\geqslant\int_{B(\boldsymbol{x}^0;\delta)}\frac{f(\boldsymbol{x}^0)}{2}=\frac{f(\boldsymbol{x}^0)}{2}v(B(\boldsymbol{x}^0;\delta))>0.$$

证法 2　由 $f>0$ 立得 $\int_I f\geqslant 0$.（反证）假设 $\int_I f=0$，将 I 2^n 等分，记为 $\{I_1^1,\cdots,I_{2^n}^1\}$，当 n 充分大时有

$$\sum_{i=1}^{2^n}\sup_{I_i^1}f\cdot\text{vol}I_i^1<1\cdot\text{vol}I.$$

因此，必存在某一 I_{i_0}，记为 J_1，使得 $\sup\limits_{J_1}f<1$. 再将 $J_1\,2^m$ 等分，使得 $\sum\limits_{i=1}^{m}\sup\limits_{I_i^2}f\cdot\text{vol}I_i^2<\dfrac{1}{2}\text{vol}J_1$，其中必有一等分 J_2，使得$\sup\limits_{J_2}f<\dfrac{1}{2}$，如此继续等分下去，得一序列$\{J_k\}$，使得 $J_1\supset J_2\supset\cdots\supset J_n\supset\cdots$ 且

$$\sup_{J_k}f<\frac{1}{k},\quad \text{diam}J_k\to 0\quad(k\to+\infty).$$

由闭区间套原理，$\exists\,\boldsymbol{x}^0\in\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}J_k\subset I$，s. t.

$$0<f(\boldsymbol{x}^0)\leqslant\sup_{J_k}f<\frac{1}{k}\to 0\quad(k\to+\infty).$$

由此得 $f(\boldsymbol{x}^0)=0$. 与题设 $f(\boldsymbol{x}^0)>0$ 矛盾，故 $\int_I f>0$. □

411. 设闭区间 $I\subset\mathbb{R}^2$ 上的连续函数列 $\{f_n\}$ 满足 $f_1\geqslant f_2\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant\cdots$ 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n=0$. 证明：

(1) $\{f_n\}$ 在 I 上一致收敛于 0；

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_I f_n=0$.

证明 (1) 参阅 103 题(复习题 2 中 19 题)的证明.

(2) $\forall\,\varepsilon>0$，因为 $\{f_n\}$ 在 I 上一致收敛于 0. 故 $\exists\,N\in\mathbb{N}$，当 $n>N$ 时有 $0\leqslant f_n<\dfrac{\varepsilon}{\mathrm{vol}I}$. 于是

$$\left|\int_I f_n-0\right|=\int_I f_n<\int_I\frac{\varepsilon}{\mathrm{vol}I}=\frac{\varepsilon}{\mathrm{vol}I}\cdot\mathrm{vol}I=\varepsilon.$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_I f_n=0$. □

412. 设 $I\subset\mathbb{R}^2$ 为闭区间，且 $\int_I f>0$. 证明：存在闭区间 $J\subset I$，使得 $f>0$ 在 J 上成立.

证法 1 因 f 在 I 上 Riemann 可积，故 f 在 I 上几乎处处连续. 由 $\int_I f>0$，必有连续点 $\boldsymbol{x}^0\in\mathring{I}$，s. t. $f(\boldsymbol{x}^0)>0$(否则，若所有 f 的连续点 x，都有 $f(x)\leqslant 0$. 对 I 的任一分割 $T=\{I_1,I_2,\cdots,I_k\}$，取 $\boldsymbol{\xi}_i\in I_i$，$\boldsymbol{\xi}_i$ 为 f 的连续点，就有 $f(\boldsymbol{\xi}_i)\leqslant 0$，故 $\sum\limits_{i=1}^k f(\boldsymbol{\xi}_i)\mathrm{vol}I_i\leqslant 0$，因而

$$0<\int_I f=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^k f(\boldsymbol{\xi}_i)\mathrm{vol}I_i\leqslant 0.$$

矛盾). 对 $\varepsilon=\dfrac{f(\boldsymbol{x}^0)}{2}>0$. $\exists\,\delta>0$，s. t. $B(\boldsymbol{x}^0;\delta)\subset I$，且 $\forall\,\boldsymbol{x}\in B(\boldsymbol{x}^0;\delta)$，有

$$f(\boldsymbol{x})>f(\boldsymbol{x}^0)-\varepsilon=f(\boldsymbol{x}^0)-\frac{f(\boldsymbol{x}^0)}{2}=\frac{f(\boldsymbol{x}^0)}{2}>0.$$

对 $B(\boldsymbol{x}^0;\delta)$ 的内接区间 $J\subset B(\boldsymbol{x}^0;\delta)\subset I$. 在 J 上，有 $f>0$.

证法 2 由 f 在 I 上 Riemann 可积知 f 在 I 上几乎处处连续，故必 $\exists\,\boldsymbol{x}^0\in\mathring{I}$，s. t. $f(\boldsymbol{x}^0)>0$((反证). 若所有连续点 $\boldsymbol{x}^0$，都有 $f(\boldsymbol{x}^0)\leqslant 0$，则

$$0<\int_I f=(L)\int_{I-D_{不}^f}f+(L)\int_{D_{不}^f}f\leqslant 0+0=0,$$

矛盾. (L) 表示 Lebesgue 积分). 同证 1，存在闭区间 $J\subset I$，s. t. $f|_J>0$. □

413. (1) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 应用二重积分与 $f(x)f(y)\leqslant\dfrac{f^2(x)+f^2(y)}{2}$，证明：

$$\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2\leqslant(b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x,$$

其中等号仅在 $f(x)$ 为常值函数时成立；

(2) 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，应用二重积分证明：

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$$

证法 1 (1) 令 $I=[a,b]\times[a,b]$，则

$$\begin{aligned}\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2 &= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b f(y)\mathrm{d}y = \iint_I f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &\leqslant \iint_I \frac{f^2(x)+f^2(y)}{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\left[\int_a^b \mathrm{d}y\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x + \int_a^b \mathrm{d}x\int_a^b f^2(y)\mathrm{d}y\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[(b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x + (b-a)\int_a^b f^2(y)\mathrm{d}y\right] \\ &= \frac{b-a}{2}\left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x + \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right] = (b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

式中等号成立 $\Leftrightarrow f(x)=f(y),\ \forall (x,y)\in I \Leftrightarrow f(x)\equiv$ 常数.

(2) 由 $[f(x)g(y)-f(y)g(x)]^2\geqslant 0,(x,y)\in[a,b]\times[a,b]=I$，得

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \iint_I [f(x)g(y)-g(x)f(y)]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_I f^2(x)g^2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_I f^2(y)g^2(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - 2\iint_I f(x)g(x)f(y)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= 2\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x - 2\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\int_a^b f(y)g(y)\mathrm{d}y \\ &= 2\left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x - \left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\right].\end{aligned}$$

所以

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$$

证法 2 (1) 同(2)的证法 1. 因为 $(f(x)-f(y))^2\geqslant 0,\ \forall x,y\in[a,b]\times[a,b]$（等号仅当 $f(x)=f(y),\ \forall x\in[a,b],\ \forall y\in[a,b]$，即 $f(x)=$ 常数时成立），故

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \iint_I [f(x)-f(y)]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_I f^2(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_I f^2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - 2\iint_I f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= 2\int_a^b \mathrm{d}y\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x - 2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b f(y)\mathrm{d}y \\ &= 2(b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x - 2\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2.\end{aligned}$$