

算學小叢書



代數學

對數及利息算

山根新次郎著
駱師曾譯



商務印書館發行

算學小叢書

代數學

對數及利息算

山根新次郎著

駱師曾譯

商務印書館發行



中華民國十七年四月初版
中華民國二十六年五月國難後第三版

周

(52578)

算學叢書
代數學——對數及利息算一冊

每冊實價國幣肆角捌分
外埠酌加運費匯費

原著者 山根新次郎

譯述者 駱師曾

發行所 商務印書館
上海河南路

發行所 商務印書館
上海及各埠

版 翻
權 印
所 必
有 究

(本書校對者胡達聰)

原 序

本編記關於初等數學之對數及其應用之事項，較普通中等學校教科書所載者稍詳。

對數之目的，在考一切之數等於某特殊之數之某乘冪，利用其指數（對數）之性質，依加減法可將繁雜難解之演算變為平易簡捷。故在中等教育上占極重要之位置，但多數教科書所說者，皆過於簡略，學者一知半解，卒不得其要領，此著者常引為遺憾者也。著者本多年之經驗，自信依最正確妥當之系統與進路，以及於本叢書之程度為限，詳密解說，期於理論與運用，兩無間然。

對數之理論應由指數之法則誘導而明其關係，本編先由冪，冪根說起，漸次擴張至冪指數為分數，負數，無理數等，關於指數法則之原理及運用之徹底，頗為致力，而後取以為入對數論之進路。然關於冪，冪根及指數等非本編之主要目的，因其詳細說明，可就本叢書第12編考察也。

常用對數為對數應用之骨子，故務求其演算之正確，簡捷，致力最多，特不厭辭費，反覆詳述。

利息算占日常計算中之重要位置，所賴於對數者甚大，

故特於其應用之編注意，且多設例題及練習問題以期運用純熟。

從最近數學教授之新傾向，以指數函數之圖式描寫，說明指數法則及對數計算之運用，以圖一般抽象的說述之連絡融合，由此一面可以養成學者之函數思想，一面可以喚起數學的興趣。

任何數之「訥白爾」對數及常用對數，依計算而說明其求法及比例部分法則之原理，皆以不失論理之嚴正為限，故說述頗簡單。但初就本書學對數者，不妨暫置在後，蓋恐失全編理路之統一故也。

初學者易於誤解之事項或易陷於弊害者，無論事之大小皆隨處指出，以促讀者之注意。

總問題之答，皆附於編末，其稍難解者，則示其全解或略解，為讀者學習之南針，然期望讀者慎勿賴此以成，宜用心自習，以積鍛鍊之効。

最近十數年間日本各學校之入學試驗問題，適宜配列，讀者可以自己之力試之，併可為受入學試驗者之參考。

大正八年十一月

山根新次郎識

目次

第一章 冪及冪根	1
冪	1
冪之乘法	2
冪之除法	4
冪之冪法	5
積之冪	6
分數之冪	9
練習問題 I.	10
冪根	12
無理數, 有理數	13
冪之冪根	18
無理數之化法	19
無理數之乘法及積之冪根	22
無理數之除法及分數之冪根	25
無理數之冪	27

無理數之冪根	29
練習問題 II.	30
第二章 指數之擴張	33
分數指數	33
零指數	39
負指數	41
大於 1 之數, 其正整數冪大於 1, 小於 1 之正數, 其正整數冪小於 1	50
大於 1 之數, 其負整數冪小於 1, 小於 1 之正數, 其負整數冪大於 1	51
a, b 皆為正時, $a \geq b$, 由是	
$\begin{cases} m > 0 & \text{則 } a^m \geq b^m \\ m < 0 & \text{則 } a^m \leq b^m \end{cases}$	51
正數之任何冪為正數	52
若 $a > 0$ 則 a^m 因 m 而增, 從而 $a > 1$ 時則增大, $a > 1$ 時則減少	53
若 $a^m > a^n$ 則因 $a \geq 1$ 從而 $m \geq n$	53
無理指數	55
練習問題 III.	58

第三章 對數之定義及基本定理.....65

指數曲線 65

指數曲線之應用 67

對數表..... 70

對數之定義 71

若 $M=N$ 無論底 a 如何, $\log_a M = \log_a N$ 73

$\log_a M = \log_a N$ 時, $M=N$ 73

$M>N$ 時因 $a \geq 1$ 從而 $\log_a M \geq \log_a N$ 74

$\log_a M > \log_a N$ 時, 因 $a \geq 1$ 從而 $M \geq N$ 74

任何數之對數..... 74

對數之種類 78

對數之基本定理 79

底之變換 85

練習問題 IV. 86

第四章 常用對數.....90

10之乘冪之對數 91

有理數非爲 10 之整數冪者之對數 91

對數之指標及假數.....92

定指標之法.....94

求對數之法.....97

求真數之法	100
誤差之最大限	103
對數之演算	105
對數計算	113
對數計算上誤差之研究	116
常用對數曲線	119
逆曲線	121
常用對數曲線之利用	122
練習問題 V.	125
第五章 對數方程式, 指數方程式及不等式	131
對數方程式	131
指數方程式	134
不等式	147
練習問題 VI.	150
第六章 訥白爾對數, 對數之求法, 比例部分法則之	
原理	155
訥白爾對數	155
指數定理	157

對數級數	158
<u>訥白爾對數</u> 之求法	159
常用對數之求法	160
比例部分法則之原理	162
第七章 利息算	163
單利法	163
複利法	170
按期存款	185
分期還款	194
年金	198
練習問題 VII.	203
答及解法南針	209

複利表, 複利現價表, 按期存款終價表,

分期還款表, 分期還款現價表

代數學—對數及利息算

第一章

冪 及 冪 根

1. 冪.

m 箇同數 a 連乘所得之積，稱爲 a 之 m 乘冪或 m 冪 (或 m 乘)，其 a 曰基數， m 爲其冪指數或單稱指數。

表 a 之 m 乘冪以 a^m 記之。

即 $aaaa\dots(m$ 箇之積) $=a^m$ 。

例如 $3 \times 3 = 3^2$ 即 9 爲 3 之二乘冪。

$3 \times 3 \times 3 = 3^3$ 即 27 爲 3 之三乘冪。

$(-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = (-2)^4$ 即 16 爲 -2 之四乘冪。

二乘冪特稱自乘或平方，三乘冪特稱立方。

注意 1. a 亦可記爲 a^1 ，即 a 之一乘。

注意 2. 於本章中以後表冪指數之數皆為正整數。

注意 3. 整數之冪為整數。

注意 4. 正數之冪為正數。

注意 5. 負數之冪，其指數為偶數者即為正數，指數為奇數者則為負數。

例如

$$(-2)^1 = -2.$$

$$(-2)^2 = (-2)(-2) = +4.$$

$$(-2)^3 = (-2)^2(-2) = -8.$$

$$(-2)^4 = (-2)^3(-2) = +16.$$

$$(-2)^5 = (-2)^4(-2) = -32.$$

注意 6. $(-a)^m$ 與 $-a^m$ ，其意義不同。

因
$$(-a)^n = (-a)(-a)(-a)\cdots\cdots$$

而
$$-a^m = -aaaa\cdots\cdots$$

2. 冪之乘法.

$$a^3 \times a^2 = aaa \times aa = a^5 = a^{3+2}.$$

$$a^2 \times a^4 \times a^3 = aa \times aaaa \times aaa = a^9 = a^{2+4+3}.$$

依此類推 $a^m \times a^n \times a^p \times \cdots = a^{m+n+p+\cdots} \quad \text{[I]}$

〔法則〕 求同數種種乘冪之積，即以各指數之和為指數而作其數之乘冪。

注意 1. $a^m \times a = a^m \times a^1 = a^{m+1}$.

注意 2. a^m 可分解為數個 a 之乘冪之積,但各指數之和須等於 m .

例如 a^7 可分解為 $a^2 \times a^5$, $a^3 \times a^4$, $a^6 \times a$, $a^3 \times a^2 \times a^2$ 等等.

注意 3. $a^m + a^m$ 等於 $2a^m$ 不等於 a^{2m} .

又 $a^m + b^m$ 不等於 $(a+b)^m$.

$$\begin{aligned}\text{例 1. } 3a^2b^3 \times 2a^3b^4y^2 &= 3 \times 2 \times a^2 \times a^3 \times b^3 \times b^4 \times y^2 \\ &= 6a^5b^7y^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{例 2. } 5x^{2n-3}y^{3m+2} \times 3x^{n+3}y^{m-2} \\ &= 5 \times 3 \times x^{2n-3} \times x^{n+3} \times y^{3m+2} \times y^{m-2} \\ &= 15x^{(2n-3)+(n+3)} \times y^{(3m+2)+(m-2)} \\ &= 15x^{3n}y^{4m}.\end{aligned}$$

例 題 I.

下列各式,試化為最簡.

$$1. 10^{3m} \times 10^{2n} \times 10^p.$$

$$2. 3a^2b^3(x+y)^2 \times 5a^3b^2(x+y)^4.$$

$$3. 7a^5b^4c^2 \times 3bc^3 \times 2a^2c \times 5a^2b^2.$$

$$4. \quad 10a^{x-3} \times 5a^{x+2} \times 2a^{x+1}.$$

3. 冪之除法.

$$\frac{a^5}{a^3} = \frac{aaaaa}{aaa} = a^2 = a^{5-3}.$$

依此類推,若 $m > n$, 則

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}. \quad \text{〔II〕}$$

〔法則〕 某數之某乘冪,以同數之乘冪而指數較小者除之,其商即為以其指數之差為指數而作同數之乘冪.

注意 1. $\frac{a^3}{a^5} = \frac{aaa}{aaaaa} = \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^{-(3-5)}}.$

依此推之,若 $m < n$

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{-(m-n)}}. \quad \text{〔II'〕}$$

注意 2. a^m 可化為二個 a 之乘冪之商,但指數之差須等於 m .

例如 a^3 可化為 $\frac{a^5}{a^2}$, $\frac{a^4}{a}$, $\frac{a^7}{a^4}$ 等.

例. 試化 $\frac{84a^6b^3x^2y^7}{14a^4b^5x^3y^2}$ 為最簡.

解.
$$\frac{84a^6b^3x^2y^7}{14a^4b^5x^3y^2} = \frac{6a^{6-4}y^{7-2}}{b^{5-3}x^{3-2}}$$

$$= \frac{6a^2y^5}{b^2x}.$$

例 題 II.

下列各式,試化為最簡.

1. $\frac{27x^5y^4z^3}{12x^2y^6z^4}$

2. $\frac{-18a^3b^3c^5x^4}{6a^5c^4y^2} \times 2a^4b^2y^4.$

3. $\frac{5a^{10}b^2(x+y)^5}{4a^2b^3(x+y)^2} \div 15a^4b^2(x+y)^2.$

4. $104ab^3x^9 \div (91a^5b^6x^7 \div 7a^4b^4x).$

4. 冪之冪法.

$$(a^m)^3 = a^m \times a^m \times a^m = a^{m+m+m} = a^{3m}.$$

依此推之

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

(III)

〔法則〕 求某數某乘冪之 n 乘冪, 祇須以 n 乘其指數

即得.

系

$$(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m.$$

∴

$$(a^m)^n = (a^n)^m.$$

(III')

由是某數 m 冪之 n 冪,等於其數 n 冪之 m 冪.

注意 1. 初學者每誤解 $a^m \times a^n$ 等於 a^{mn} 實則 $a^m \times a^n$ 等於 a^{m+n} , 不等於 a^{mn} .

注意 2. a^m 可取 m 之因數爲指數,作二重或三重之乘冪以表之.

例如 a^{12} 可以 $(a^3)^4$, $(a^2)^6$, $\{(a^2)^3\}^2$ 等表之.

例. 試化 $10^x \times 100^y \times 1000^z$ 爲最簡.

$$\begin{aligned} \text{解. } 10^x \times 100^y \times 1000^z &= 10^x \times (10^2)^y \times (10^3)^z \\ &= 10^x \times 10^{2y} \times 10^{3z} \\ &= 10^{x+2y+3z} \end{aligned}$$

5. 積之冪.

$$(ab)^3 = (ab)(ab)(ab) = a^3b^3.$$

依同理推之

$$(abc\dots)^m = a^mb^mc^m\dots \quad \text{[IV]}$$

〔法則〕 諸因數之積之某乘冪,即爲各因數之同乘冪之積.

$$\text{系. } (a^mb^n)^p = (a^m)^p(b^n)^p = a^{mp}b^{np}. \quad \text{[IV']}$$

由是有諸因數之種種乘冪之積,而求其 p 冪,祇須以 p 乘各因數之指數即得.

例 1. $(-3a^2b^3)^4 = (-3)^4 a^{2 \times 4} b^{3 \times 4} = 81a^8b^{12}.$

例 2. 試以 $a = 10^x, b = 10^y$ 代入次式而簡單之.

$$\begin{aligned} (a^5b^7)^3 \times \frac{a^4}{b^2} &= \{(10^x)^5(10^y)^7\}^3 \times \frac{(10^x)^4}{(10^y)^2} \\ &= (10^{5x} \times 10^{7y})^3 \times \frac{10^{4x}}{10^{2y}} \\ &= (10^{5x+7y})^3 \times 10^{4x-2y} \\ &= 10^{15x+21y} \times 10^{4x-2y} \\ &= 10^{15x+21y+4x-2y} \\ &= 10^{19x+19y} \\ &= (10^{x+y})^{19} \end{aligned}$$

本題以如下解之較便.

$$\begin{aligned} (a^5b^7)^3 \times \frac{a^4}{b^2} &= a^{15}b^{21} \times \frac{a^4}{b^2} \\ &= a^{19}b^{19} \\ &= (ab)^{19} \\ &= (10^x \times 10^y)^{19} \\ &= (10^{x+y})^{19}. \end{aligned}$$

注意 1. a^m, b^n, c^p 可取 m, n, p 之公約數爲指數作乘冪以表之.