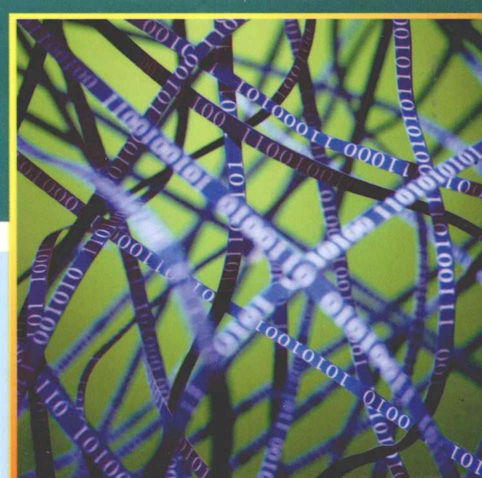
普通高等学校计算机科学与技术专业规划教材

# 离散数学

DISCRETE MATHEMATICS

刘任任 编著



中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

普通高等学校计算机科学与技术专业规划教材

# 离 散 数 学

刘任任 编著

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

## 内 容 简 介

本书介绍离散数学的基本概念、基本定理、运算规律以及离散数学在计算机科学与技术中的应用，主要内容包括集合论、图论、数理逻辑、代数结构、组合分析等. 本书力求概念阐述严谨，证明推演详尽，较难理解的概念用实例说明.

本书适合作为高等学校计算机科学与技术专业及其相关专业的教材，也可供计算机网络和软件工程技术人员参考使用.

**图书在版编目(CIP)数据**

离散数学/刘任任编著. —北京：中国铁道出版社，2009.9

普通高等学校计算机科学与技术专业规划教材

ISBN 978-7-113-10502-0

Ⅰ. 离… Ⅱ. 刘… Ⅲ. 离散数学-高等学校-教材 Ⅳ. 0158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 157009 号

**书　　名：离散数学**
**作　　者：**刘任任　编著

**策划编辑：**秦绪好　周海燕
**责任编辑：**鲍　闻　　**编辑部电话：**(010)63560056
**封面设计：**付　巍　　**封面制作：**白　雪
**版式设计：**郑少云　　**责任印制：**李　佳

**出版发行：**中国铁道出版社(北京市宣武区右安门西街 8 号　　邮政编码：100054)
**印　　刷：**三河市兴达印务有限公司
**版　　次：**2009 年 12 月第 1 版　　2009 年 12 月第 1 次印刷
**开　　本：**787mm×1092mm　1/16　**印张：**17.25　**字数：**440 千
**印　　数：**4000 册
**书　　号：**ISBN 978-7-113-10502-0/O・199
**定　　价：**27.00 元

计算学科虽然是一门年轻的学科，但已经成为一门基础技术学科，在其他各个学科发展中扮演着重要的角色，并使得社会产生了对计算机科学与技术专业人才的巨大需求. 目前，计算机科学与技术专业已成为我国理工专业中规模最大的专业，为高等教育发展中做出了巨大贡献. 近些年来，随着国家信息化建设的推进，作为其核心技术的计算机技术，更是占有重要的地位. 信息化建设，不仅需要更先进、更便于使用的先进计算技术，同时也需要大批的建设人才. 瞄准社会需求并准确定位，培养计算机人才，是计算机科学与技术专业及其相关专业的历史使命，也是实现专业教育从劳动就业供给导向型向劳动就业需求导向型转变的关键，从而也就成为提高高等教育质量的关键.

教材在人才培养中占有重要地位，承担着"重要的责任"，这确定了其高质量的基本要求. 社会对计算机专业人才需求的多样性和特色，决定了教材建设的针对性，从而也造就了百花齐放、百家争鸣的局面.

关于建设高质量的教材，教育部在提高本科教育质量的文件中都提出了明确要求. 教高〔2005〕1 号(2005 年 1 月 7 日)文件指出，"加强教材建设，确保高质量教材进课堂. 要大力锤炼精品教材，并把精品教材作为教材选用的主要目标. ""要健全、完善教材评审、评价和选用机制，严把教材质量关. "为了更好地落实教育部的这些要求，我们按照教育部高等学校计算机科学与技术教学指导委员会发布的《高等学校计算机科学与技术专业发展战略研究报告暨专业规范(试行)》所构建的该专业本科教育的要求，组织了这套教材.

作为优秀教材的基础，我们首先坚持高标准，以对教育负责的精神去鼓励、发现、动员、选拔优秀作者，并且有意识地培育优秀作者. 优秀作者保证了"理论准确到位，既有然，更有所以然；实践要求到位、指导到位"等要求的实现.

其次是按照人才培养的需要适当强调学科形态内容. 粗略地讲，计算机科学的根本问题是"什么能被有效地自动计算"，科学型人才强调学科抽象和理论形态的内容；计算机系统工程的根本问题应该是"如何低成本、高效地实现自动计算"，工程型人才强调学科抽象和设计形态的内容；计算机应用的根本问题是"如何方便、有效地利用计算机系统进行计算"，应用型人才的培养偏重于技术层面的内容，强调学科设计形态的内容，在进一步开发基本计算机系统应用的层面上体现学科技术为主的特征. 教材针对不同类型人才的培养，在满足基本知识要求的前提下，强调不同形态的内容.

第三是重视知识的载体作用，促进能力培养. 在教材内容的组织上，体现大学教育的学科性和专业性特征，参考《高等学校计算机科学与技术专业发展战略研究报告暨专业规范(试行)》示例性课程大纲，覆盖其要求的基本知识单元. 叙述上力争引导读者进行深入分析，努力使读者在

知其然的基础上，探究其所以然．通过加强对练习和实践的引导，进一步培养学生的能力，促使相应课程在专业教育总目标的实现中发挥作用．

第四是瞄准教学需要，提供更多支持．近些年来，随着计算机技术、网络技术等在教学上的应用，教学手段、教学方式不断丰富，教材的立体化建设对丰富教学资源发挥了重要作用．通常，除主教材外，还要配套教学参考书、实验指导书、电子讲稿、网站等．

第五是面向主要读者，强调教材的写作特征，努力做到：语言流畅，清晰易懂；叙述完整，深入浅出，有吸引力；概念的描述与用词准确得当，且前后统一；分散难点，循序渐进，防止多难点、多新概念的局部堆积．

我们相信，这套教材一定能够在培养社会需要的计算机专业人才上发挥重要作用，希望大家广为选用，并在使用中不断丰富．

“普通高等学校计算机科学与技术专业规划教材”编审委员会

2008 年 1 月

# 前言

离散数学是计算机科学与技术学科的基础，它以离散量为研究对象，充分描述计算机科学与技术学科的离散性特点.

尽管离散数学的主要内容在计算机出现之前就已散见于数学的各个分支中，但是离散数学是随着计算机科学与技术学科的发展而逐步建立的。它形成于 20 世纪 70 年代初，因此，国外也有人称之为“计算机数学”，近期也将其称为“离散结构”.

离散数学包括的内容主要有：集合论、图论、数理逻辑、代数结构、组合分析，并且其内容一直随着计算机科学与技术学科的发展而不断地扩充和完善. 作为计算机专业的核心课程，它为后续课程提供了必要的数学基础. 这些后续课程主要有：数据结构、编译原理、算法分析、形式语言与自动机理论、计算机密码学、人工智能和可计算性理论等.

本书是在作者多年讲授离散数学课程的基础上编写而成的，其目的在于通过讲授离散数学中的基本概念、基本定理和运算及其在计算机科学与技术学科中的应用，培养学生的数学抽象能力、用数学语言描述问题的能力、逻辑思维能力以及数学论证能力. 因此，本书力求概念阐述严谨，证明推导详尽，较难理解的概念用实例说明.

全书共分五篇：第一篇是集合论. 主要介绍集合、关系、映射以及可数集与不可数集. 这些内容是全书的基础知识和基本工具. 第二篇是图论. 主要介绍图与子图、树、平面图、匹配、图的着色、有向图、网络流等内容. 由于图为任何一个包含二元关系的系统提供了一种离散数学模型，因此，应用图论来解决计算机科学与技术学科相关领域中的问题已显示出极大的优越性. 此外，图论对于锻炼学生的抽象思维能力，提高运用数学工具描述并解决实际问题的能力也大有益处. 第三篇是数理逻辑. 包括命题逻辑与一阶逻辑，它们是数理逻辑中与计算机科学与技术学科关系较密切的内容. 第四篇是代数结构. 主要内容有群、环、域、格与布尔代数，以及代数结构在密码学中的应用. 第五篇是组合分析初步. 主要介绍组合数学中关于存在性、计数、构造、分类以及最优化等基本知识，目的在于向读者介绍组合分析这一强有力的数学工具.

本书主要用做计算机专业基础课教材，也可以作为与计算机相关专业的基础知识教材. 教师可以按授课对象的实际情况和专业教育的要求对本书的内容进行取舍，决定讲授内容.

本书的编写得到了教育部第一类特色建设专业（计算机科学与技术）项目、湖南省精品课程（离散数学）建设项目的资助. 同时，中国计算机学会计算机教育委员会副主任蒋宗礼教授对本书提出了很多宝贵的意见和建议，编者在此表示衷心的感谢.

由于编者的水平有限，难免存在错误和疏漏之处，恳请读者批评指正.

最后，我们引用计算机科学巨匠、图灵奖获得者 D. E. Kunth 的一段话来说明数学，特别是离散数学在计算机科学中的重要地位：

“除了无穷维 Hibert 空间不可能用得上以外，其他数学理论都可能在计算机科学中得到应用. 概括地说：在计算机科学的研究领域中，凡一问题要求形式化、精确化表示，最可能用到的数学理论是数理逻辑，某些部分可能用到代数，甚至拓扑学；凡一问题要求表示出算法执行过程中各部分的逻辑结构或关系，最可能用到的数学理论是图论和数理逻辑，某些部分可能用到代数；凡一问题要求给出量的测定，最可能用到的数学理论是组合数学、数论和概率论等；凡一问题要求得出最优方案，最可能用到的数学理论是运筹学、数论，甚至将来有可能用到数学分析.”

编　者

2009 年 7 月

CONTENTS

# 目录

## 第一篇 集 合 论


第 1 章 集合 …… 3

1.1 集合的概念及其表示 …… 3

1.2 集合的基本运算 …… 4

1.3 笛卡儿积 …… 6

习题一 …… 6

第 2 章 关系 …… 8

2.1 关系及其表示 …… 8

2.2 关系的运算 …… 9

2.3 等价关系 …… 12

2.4 序关系 …… 14

习题二 …… 16

第 3 章 映射 …… 18

3.1 基本概念 …… 18

3.2 映射的运算 …… 19

习题三 …… 20

第 4 章 可数集与不可数集 …… 21

4.1 等势 …… 21

4.2 集合的基数 …… 22

4.3 可数集与不可数集 …… 23

习题四 …… 24


## 第二篇 图 论


第 5 章 图与子图 …… 29

5.1 图的概念 …… 29

5.2 图的同构 …… 31

5.3 顶点的度 …… 32

5.4 子图及图的运算 …… 32

5.5 通路与连通图 …… 34

5.6 图的矩阵表示 …… 36

5.7 应用 …… 37

习题五 …… 40

第 6 章 树 …… 43

6.1 树的定义 …… 43

6.2 生成树 …… 45

6.3 应用 …… 47

习题六 …… 48
**第7章 图的连通性** …… 50
7.1 点连通度和边连通度 …… 50
*7.2 块 …… 52
7.3 应用 …… 54
习题七 …… 55
**第8章 $E$图与$H$图** …… 57
8.1 七桥问题与$E$图 …… 57
8.2 周游世界问题与$H$图 …… 58
8.3 应用 …… 61
习题八 …… 63
**第9章 匹配与点独立集** …… 65
9.1 匹配 …… 65
9.2 独立集和覆盖 …… 69
9.3 Ramsey数 …… 71
9.4 应用 …… 75
习题九 …… 76
**第10章 图的着色** …… 78
10.1 顶点着色 …… 78
10.2 边着色 …… 80
10.3 色多项式 …… 83
10.4 应用 …… 86
习题十 …… 86
**第11章 平面图** …… 88
11.1 平面图的概念 …… 88
11.2 欧拉公式 …… 90
11.3 可平面性判定 …… 91
11.4 平面图的面着色 …… 92
11.5 应用 …… 94
习题十一 …… 94
**第12章 有向图** …… 96
12.1 有向图的概念 …… 96
12.2 有向通路与有向回路 …… 98
12.3 有向树 …… 100
12.4 应用 …… 101
习题十二 …… 103
**第13章 网络最大流** …… 105
13.1 网络的流与割 …… 105
13.2 最大流最小割定理 …… 107
13.3 应用 …… 110
习题十三 …… 110

# 第三篇 数 理 逻 辑

**第 14 章 命题逻辑** …… 113
14.1 命题与逻辑联结词 …… 113
14.2 命题公式与等值演算 …… 115
14.3 对偶与范式 …… 118
14.4 推理理论 …… 123
14.5 命题演算的公理系统 …… 127
习题十四 …… 130
**第 15 章 一阶逻辑** …… 134
15.1 谓词与量词 …… 134
15.2 合式公式及解释 …… 137
15.3 等值式与范式 …… 139
15.4 一阶逻辑的推理理论 …… 143
习题十五 …… 147

# 第四篇 代 数 结 构

**第 16 章 整数** …… 151
16.1 整除性 …… 151
16.2 质因数分解 …… 155
16.3 同余 …… 157
16.4 孙子定理 · Euler 函数 …… 159
16.5 数论在计算机密码学中的应用 …… 163
习题十六 …… 165
**第 17 章 群** …… 167
17.1 群的概念 …… 167
17.2 子群 …… 170
17.3 置换群 …… 173
17.4 陪集与 Lagrange 定理 …… 178
17.5 同态与同构 …… 181
17.6 群在计算机科学与技术中的应用 …… 185
习题十七 …… 187
**第 18 章 环与域** …… 190
18.1 环与子环 …… 190
18.2 环同态 …… 193
18.3 域的特征、质域 …… 196
18.4 有限域 …… 198
18.5 有限域的结构 …… 202
18.6 纠错码 …… 207
18.7 多项式编码方法及其实现 …… 214
习题十八 …… 217
**第 19 章 格与布尔代数** …… 220

19.1 格的定义 …… 220
19.2 格的性质 …… 222
19.3 几种特殊的格 …… 225
19.4 布尔代数 …… 228
19.5 有限布尔代数的结构 …… 233
19.6 格与布尔代数在计算机科学与技术中的应用 …… 238
习题十九 …… 241

## 第五篇 组合分析初步

**第 20 章 排列和组合的一般计数方法** …… 247
20.1 两个基本的计数法则 …… 247
20.2 基本排列组合的计数方法 …… 248
20.3 可重复排列组合的计数方法 …… 249
习题二十 …… 251
**第 21 章 容斥原理** …… 252
21.1 容斥原理介绍 …… 252
21.2 有禁止位的排列 …… 253
习题二十一 …… 256
**第 22 章 递推关系与生成函数** …… 257
22.1 递推关系及其解法 …… 257
22.2 生成函数 …… 259
习题二十二 …… 261
**参考文献** …… 262

# 第一篇 集合论(set theory)

集合论是现代数学的基础，它作为一个独立的数学分支诞生于19世纪.当时，由于科学和技术的发展，极大地推动了微积分、抽象代数、几何学等领域的理论与应用研究.就整个经典数学而言，迫切需要建立一个能够统括各个数学分支，并能建树其上的理论基础，正是在数学发展的这样一个历史背景下，康托尔(Deorg Cantor)系统地总结了长期以来对数学的认识与实践，创立了集合论.

集合论的创立，使数学研究对象从有限推进到无限，并为整个经典数学的各个分支提供了一个共同的理论基础.目前，集合论的概念几乎已渗透到现代数学的各个领域，并且在计算机科学、经济学、语言学和心理学等学科中有着重要的应用.

本篇主要介绍集合论中有关集合、关系、映射以及集合的基数等基本知识.

# 第1章

# 集合(set)

众所周知,任何一个理论系统,都要包含着一些不加以定义而直接引入的基本概念.例如,欧几里德几何学系统中的"点"和"直线",而"三角形"、"圆"等几何概念都可以通过"点"和"直线"来定义.在集合论中,集合就是这样一个唯一不能精确定义而直接引用的基本概念.集合论是现代数学中最重要的基础之一.

本章主要介绍集合的概念及其表示、集合的运算和笛卡儿积.

## 1.1 集合的概念及其表示

由于集合是一个不能精确定义的概念,因此,只能给它以直观的描述.所谓集合,可描述为"由一些任意确定的、彼此有区别的对象所组成的一个整体".集合中的对象就称为该集合中的元素.通常用大写英文字母表示集合,而用小写字母表示元素.

如果 $a$ 是集合 $S$ 中的元素,则记为 $a \in S$,读作"$a$ 属于 $S$";如果 $a$ 不是 $S$ 中的元素,则记为 $a \notin S$,读作"$a$ 不属于 $S$".

**【例 1.1.1】** 以下是一些集合的例子

(1)教室里所有课桌的集合;

(2)全体自然数的集合;

(3)100 以内素数的集合;

(4)方程 $x^2+x+1=0$ 的实根集合.

**定义 1.1.1** 设 $A$ 为集合,用 $|A|$ 表示 $A$ 中所含元素的计数.

(1)若 $|A|=0$,则称 $A$ 为空集(empty set),空集常用 $\varnothing$ 表示;

(2)若 $|A|=n$(自然数),则称 $A$ 为有限集(finite set);

(3)若 $|A|=\infty$,则称 $A$ 为无限集(infinite set);

(4)若 $|A|\neq 0$,则称 $A$ 为非空集(nonempty set).

在例 1.1 所举的四个集合中,(1)和(3)为非空有限集,(2)为无限集,(4)为空集.

为方便起见,本书用以下符号表示固定的集合:

**N**——自然数集合; **Z**——整数集合;

**Q**——有理数集合; **R**——实数集合.

由集合的概念可知,要确定一个集合,只须指出哪些元素属于该集合,哪些元素不属于该集合.常用以下两种方法描述一个集合.

**1. 列举法**

按任意一种次序，不重复地将集合中的元素全部或部分地列出来，未列出来的元素用“…”代替，并用花括号括起来，例如：

10 以内的素数的集合 $M=\{2,3,5,7\}$；

26 个英文小写字母的集合 $M=\{a,b,c,\cdots,x,y,z\}$；

所有整数的集合 $\mathbf{Z}=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$；

全体正偶数的集合 $E=\{2,4,6\cdots\}$.

部分地列举元素时，所列出的元素要能反映出该集合元素的构造规律.

**2. 描述法**

描述法即用集合中元素所共同具有的某个性质来刻画集合. 当且仅当元素具有规定的性质时，该元素才属于集合. 例如，在直角坐标系平面内，满足方程 $x^2+y^2=1$ 的全部点的坐标所组成的集合 $D$ 可以表示为

$$D=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{R}\text{ 且 }x^2+y^2=1\}$$

其中，$(x,y)$ 表示集合 $D$ 的元素.

我们知道，元素与集合之间是属于或不属于的关系，对集合之间的关系，我们有：

**定义 1.1.2** 设 $A,B$ 为任意两个集合：

(1) 若对每个 $x\in A$ 均有 $x\in B$，则称 $A$ 为 $B$ 的子集，也称 $A$ 含于 $B$ 或 $B$ 包含 $A$，记为 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$.

(2) 若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则称 $A$ 与 $B$ 相等，记为 $A=B$，否则称 $A$ 与 $B$ 不相等，记为 $A\neq B$.

(3) 若 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$，则称 $A$ 为 $B$ 的真子集，也称 $A$ 真含于 $B$ 或 $B$ 真包含 $A$，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

由集合的概念可知，一个集合也可以作为另一个集合的元素.

**定义 1.1.3** 设 $A$ 为任意集合，令 $\rho(A)=\{X\mid X\subseteq A\}$. 称 $\rho(A)$ 为 $A$ 的幂集(power set)，即 $A$ 的所有子集构成的集合. $A$ 的幂集也可以记为 $2^A$.

例如，设 $A=\{a,\{b\}\}$，则 $A$ 的幂集为

$$\rho(A)=\{\varnothing,\{a\},\{\{b\}\},\{a,\{b\}\}\}$$

显然，若 $A$ 为有限集，且 $|A|=n$，则 $\rho(A)$ 的元素个数为

$$|\rho(A)|=C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$$

**【例 1.1.2】** 设 $A=\{\varnothing\}$，$B=\rho(\rho(A))$，下列各题是否正确.

(a) $\varnothing\in B,\varnothing\subseteq B$；　(b) $\{\varnothing\}\in B,\{\varnothing\}\subseteq B$；　(c) $\{\{\varnothing\}\}\in B,\{\{\varnothing\}\}\subseteq B$.

**解** 因 $A$ 是仅以空集 $\varnothing$ 为元素的集合，故 $\rho(A)=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$，$B=\rho(\rho(A))=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\rho(A)\}$，于是：

(a) $\varnothing\in B$，因为空集 $\varnothing$ 含于任何集合，所以 $\varnothing\subseteq B$.

(b) $\{\varnothing\}\in B$，因为 $\varnothing\in B$，所以 $\{\varnothing\}\subseteq B$.

(c) $\{\{\varnothing\}\}\in B$，因为 $\{\varnothing\}\in B$，所以 $\{\{\varnothing\}\}\subseteq B$.

总之，各题均是正确的.

## 1.2 集合的基本运算

以下设 $E$ 是这样一个集合，它包含我们所讨论的所有集合，并称 $E$ 为全集(universal set).

**定义 1.2.1** 设 $A,B$ 为任意两个集合，令

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}$$

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\}$$

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$$
$$A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

分别称 $A \cup B$、$A \cap B$、$A - B$ 和 $A \oplus B$ 为集合 $A$ 与 $B$ 的并、交、差和对称差.

特别地,差集 $E - A$ 称为 $A$ 的补集,记为 $\bar{A}$.

如果 $A \cap B = \varnothing$,则称 $A$ 与 $B$ 不相交.

例如,若取全集 $E = \{1,2,3,4,5,\}$,$A = \{1,3,4\}$,$B = \{3,5\}$,则有

$$A \cup B = \{1,3,4,5\},\quad A \cap B = \{3\},$$
$$A - B = \{1,4\},\quad B - A = \{5\},$$
$$A \oplus B = \{1,4,5\}\quad \bar{A} = \{2,5\},\quad \bar{B} = \{1,2,4\}.$$

不难证明,对任意集合 $A$、$B$ 和 $C$,下面的运算规律成立:

(1) $A \cup A = A$, $A \cap A = A$(幂等律)

(2) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$(交换律)

(3) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$(结合律)

(4) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$(分配律)

(5) $A \cap (A \cup B) = A$, $A \cup (A \cap B) = A$(吸收律)

(6) $A \cup \varnothing = A$, $A \cap E = A$(同一律)

(7) $A \cup E = E$, $A \cap \varnothing = \varnothing$(零律)

(8) $A \cup \bar{A} = E$, $A \cap \bar{A} = \varnothing$(互补律Ⅰ)

(9) $\bar{E} = \varnothing$, $\overline{\varnothing} = E$(互补律Ⅱ)

(10) $(\overline{A \cap B}) = \bar{A} \cup \bar{B}$, $(\overline{A \cup B}) = \bar{A} \cap \bar{B}$(De Morgan 律)

(11) $\overline{(\bar{A})} = A$(对合律)

例如,我们来证明分配律之一:$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

任取 $x \in A \cap (B \cup C)$,则 $x \in A$ 且 $x \in B \cup C$,即 $x \in A$ 且 $x \in B$ 或 $x \in C$. 于是,$x \in A \cap B$ 或者 $x \in A \cap C$,故 $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$,即证得

$$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C) \tag{1.1}$$

另一方面,任取 $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$,则 $x \in A \cap B$ 或者 $x \in A \cap C$,即 $x \in A$ 且 $x \in B$,或者 $x \in A$ 且 $x \in C$,于是有 $x \in A$ 且 $x \in B$ 或者 $x \in C$,即 $x \in A$ 且 $x \in B \cup C$,因此,$x \in A \cap (B \cup C)$,故

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C) \tag{1.2}$$

总之,由式(1.1)和式(1.2)可得

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

我们再来证明德·摩尔根(De Morgan)律之一:$(\overline{A \cup B}) = \bar{A} \cap \bar{B}$.

因为,$x \in (\overline{A \cup B})$ 当且仅当 $x \notin (A \cup B)$ 当且仅当 $x \notin A$ 且 $x \notin B$ 当且仅当 $x \in \bar{A}$ 且 $x \notin \bar{B}$ 当且仅当 $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$,因此,$(\overline{A \cup B}) = \bar{A} \cap \bar{B}$.

其余的运算规律,都可以类似地证明.

**【例 1.2.1】** 证明对任何集合 $X$ 和 $Y$,$(X - Y) \cap (Y - X) = \varnothing$.

证明:$(X - Y) \cap (Y - X)$

$= (X \cap \bar{Y}) \cap (Y \cap \bar{X})$　(由差运算的定义)

$= X \cap \bar{Y} \cap Y \cap \bar{X}$　(由结合律)

$= (X \cap \bar{X}) \cap (Y \cap \bar{Y})$　(由交换律和结合律)

$= \varnothing \cap \varnothing$　(由互补律Ⅰ)

$= \varnothing$　(由幂等律)