

经济数学

刘兴权 张志敏 主编

黑龙江教育出版社

经 济 数 学

第一册

主 编	刘兴权	张志敏
副主编	彭秋艳	申 维
	孙占军	

黑龙江教育出版社

(黑) 新登字第 5 号

经济数学
第一册

主 编 刘兴权 张志敏
责任编辑: 孙少平

黑龙江教育出版社出版 东北农业大学印刷厂印刷
新华书店北京发行所总发行
开本 787×1092 毫米 $1/32$ · 印张 10.5 · 字数 230 千字
1993 年版 · 1993 年 5 月第 1 次印刷
印数: 1—2300

ISBN 7-5316-0682-3/0 · 4 定价: 7.80 元

前 言

《经济数学》一书是按着国家教委高教司组织编写和审定的《高等学校财经专业核心课程教学大纲·经济数学基础》的教学要求，由黑龙江大学、黑龙江经济管理干部学院、黑龙江省教育学院、武汉工业大学、吉林林学院、浙江林学院、济南联合大学、华北航天工业学院、鸡西大学、宁波高等专科学校等校多年从事经济数学教学的专家、教授协作编写的经济管理、财会、金融、计算机应用与管理等专业的数学教材。

全书分为两册，是按 140—200 学时编写的，具有一定的弹性。其中，第一册包括微积分，约 80—100 学时；第二册包括线性代数、线性规划、概率与数理统计，约 60—100 学时。全书力求深入浅出，通俗易懂。

全书由刘兴权副教授提出编写纲目，参加编写人员有：杨纫青、曾凡金、张凤华、张志敏、孙占军、曹殿国、申维、彭秋艳、黄纯一、李克等。第一册由刘兴权、彭秋艳、张志敏通审全书并定稿。

由于编者水平有限，时间仓促，错误在所难免，恳请广大批评指正。

编 者

一九九三年五月

《经济数学》目录

第一章 函 数	(1)
§ 1.1 集 合	(1)
一、集合的概念	(1)
二、集合的表示法	(2)
三、集合间的关系和运算	(3)
§ 1.2 函 数	(7)
一、实数与数轴	(7)
二、绝对值	(8)
三、区间与邻域	(8)
四、函数的概念	(10)
五、函数的表示法	(11)
六、分段函数	(12)
七、隐函数	(13)
§ 1.3 函数的几种简单性质	(13)
一、函数的奇偶性	(13)
二、函数的单调性	(15)
三、函数的有界性	(16)
四、函数的周期性	(16)
五、反函数	(16)
§ 1.4 初等函数	(18)

一、基本初等函数	(18)
二、复合函数	(19)
三、初等函数	(22)
习题一	(22)
第二章 极限与连续	(26)
§ 2.1 数列的极限与运算	(26)
一、数列的定义	(26)
二、数列的极限	(27)
三、数列极限的四则运算法则	(28)
§ 2.2 函数的极限	(30)
一、当 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限	(30)
二、当 $x \rightarrow x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限	(32)
三、左极限和右极限	(34)
§ 2.3 无穷大量与无穷小量	(35)
一、无穷大量	(35)
二、无穷小量	(35)
三、无穷小的阶	(37)
§ 2.4 函数极限的运算	(38)
一、函数极限的运算法则	(38)
二、两个重要极限	(44)
§ 2.5 函数的连续性	(48)
一、函数的改变量	(48)
二、函数连续的概念	(48)
三、函数的间断点	(50)

四、初等函数的连续性	(53)
五、在闭区间上连续函数的性质	(53)
习题二	(56)
第三章 导数与微分	(59)
§ 3.1 导数的概念	(59)
一、引例	(59)
二、导数的定义	(61)
三、导数的几何意义	(64)
四、可导与连续的关系	(65)
§ 3.2 导数的运算法则	(66)
一、几个基本初等函数的导数	(66)
二、导数的四则运算法则	(70)
三、反函数的导数	(74)
四、复合函数的导数	(76)
五、高阶导数	(82)
六、隐函数的导数及由参数方程所确定的函数的 导数	(84)
§ 3.3 微分及其应用	(88)
一、引例	(89)
二、微分的定义	(89)
三、微分的几何意义	(91)
四、微分的运算	(92)
五、微分的应用	(94)
习题三	(98)

第四章 导数的应用	(103)
§ 4.1 中值定理	(103)
一、引理	(103)
二、中值定理	(103)
三、中值定理的应用	(109)
§ 4.2 罗必达(L'Hospital)法则	(111)
一、“ $\frac{0}{0}$ ”型未定式	(111)
二、“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型未定式	(115)
三、其它未定式	(116)
§ 4.3 函数的单调性与极值	(120)
一、函数的单调性	(120)
二、函数极值	(122)
三、函数的最大值与最小值	(130)
四、一元优化问题	(132)
§ 4.4 函数图形的作法	(135)
一、曲线的凹向与拐点	(135)
二、函数图形的作法	(139)
§ 4.5 导数在经济问题中的应用	(145)
一、边际分析	(145)
二、弹性分析	(149)
习题四	(155)

第五章 不定积分与微分方程	(162)
---------------------	-------

§ 5.1 不定积分的概念与性质	(162)
一、原函数与不定积分的概念	(162)
二、不定积分的性质	(166)
§ 5.2 基本积分公式与直接积分法	(167)
一、基本积分公式	(167)
二、直接积分法	(168)
§ 5.3 换元积分法	(171)
一、第一类换元积分法(凑微分法)	(171)
二、第二类换元积分法(代换法)	(177)
§ 5.4 分部积分法	(181)
§ 5.5 有理函数式的积分	(186)
§ 5.6 微分方程简介	(192)
一、微分方程的概念	(192)
二、一阶常微分方程	(196)
三、二阶常微分方程	(203)
习题五	(206)
 第六章 定积分及其应用	 (213)
§ 6.1 定积分的概念	(213)
一、引例	(213)
二、定积分的定义	(216)
三、定积分的几何意义	(218)
§ 6.2 定积分的性质	(219)
§ 6.3 定积分与不定积分的关系	(224)
一、变上限函数	(224)

二、牛顿—莱布尼兹公式	(227)
§ 6.4 定积分的积分法	(230)
一、定积分的换元积分法	(230)
二、定积分的分部积分法	(234)
§ 6.5 广义积分与 Γ 函数	(235)
一、广义积分	(235)
二、 Γ 函数	(240)
§ 6.6 定积分的应用	(242)
一、平面图形的面积	(242)
二、平行截面面积为已知立体的体积	(246)
三、积分在经济中的应用	(247)
习题六	(249)
第七章 多元函数的微分法	(254)
§ 7.1 空间解析几何简介	(254)
一、空间直角坐标系	(254)
二、空间任意两点间的距离	(255)
三、曲面与方程	(256)
§ 7.2 二元函数的有关概念	(258)
一、二元函数的概念	(258)
二、二元函数的极限与连续	(260)
§ 7.3 二元函数的微分法	(261)
一、偏导数	(261)
二、全微分	(264)
三、复合函数的偏导数	(265)

§ 7.4 二元函数的极值	(267)
一、二元函数的极值	(268)
二、最小二乘法	(272)
习题七	(277)
第八章 二重积分	(280)
§ 8.1 二重积分的概念	(280)
§ 8.2 二重积分的性质	(283)
§ 8.3 二重积分的计算	(284)
一、在直角坐标系下二重积分的计算	(285)
二、在极坐标系下二重积分的计算	(291)
习题八	(297)
附录:习题答案	(299)

第一章 函 数

§ 1.1 集 合

一、集合的概念

在日常生活中，我们常常把具有某种属性的事物的全体联合在一起，作为一个整体加以研究。例如：

- (1) 人均年利税在 1 万元以上的工厂的全体；
- (2) 某学院的全体学员；
- (3) 不超过 10 的自然数；
- (4) 掷一颗骰子可能出现的点数；
- (5) 曲线 $y = x^2$ 上的所有的点。

我们把这种具有某种属性的事物的全体称为集合。构成集合的事物或对象，称为集合的元素。常用大写的英文字母 A 、 B 、 C ……表示集合，用小写英文字母 a 、 b 、 c ……表示集合中的元素。如果 a 是集合 A 中的元素，就记为 $a \in A$ ，读作“ a 属于 A ”，如果 b 不是集合 A 中的元素，记作 $b \notin A$ ，读作“ b 不属于 A ”。

为了方便起见，我们用 N 表示自然数集合，用 Z 表示整数集合，用 Q 表示有理数集合，用 R 表示实数集合。例如 $\frac{3}{5}$

$\in Q$, 但 $\frac{3}{5} \in Z$, $\sqrt{3} \in R$ 但 $\sqrt{3} \notin Q$ 等等。

如果一个集合只含有有限个元素, 称此集合为有限集; 例如(1)、(2)、(3)、(4)都是有限集合; 如果集合含有无限个元素, 称此集合为无限集, 例如(5)就是无限集。

二、集合的表示法

1. 列举法 把集合的元素一一列举出来, 写在花括号 $\{ \}$ 内, 这种表示集合的方法, 称为列举法。

例如: 用 A 表示不超过 5 的自然数所组成的集合, 则 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 又如由 $x^2 - x - 6 = 0$ 的根构成的集合为 B , 则 $B = \{-2, 3\}$ 。

2. 描述法 在花括号 $\{ \}$ 内写明集合的元素所具有的公共属性, 这种表示集合的方法称为描述法。记为 $A = \{a | P(a)\}$ 。

例如: 由 $x^2 - x - 6 = 0$ 的根构成的集合, 可表示为 $A = \{x | x^2 - x - 6 = 0\}$, 设 B 为全体奇数的集合, 表示为 $B = \{x | x = 2n - 1, n \in N\}$ 。

3. 图示法 用一个平面区域表示集合的方法, 称为图示法, 也称文氏图。

三、集合间的关系和运算

1. 子集 对于两个集合 A 与 B , 如果集合 A 的任何元素都是集合 B 的元素, 则称集合 A 为集合 B 的子集, 记为 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$ 。读作“ A 包含于 B ”或“ B 包含 A ”, 参见图 1—1。

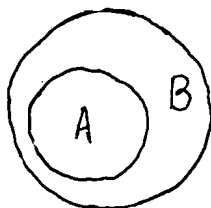


图 1-1

例如:自然数集合是实数集的子集。记作 $N \subseteq R$ 。又如: $A = \{a, b\}$, $B = \{a, b, c\}$, 则 $A \subseteq B$ 。

不含任何元素的集合称为空集, 记为 $\emptyset$, 我们规定, 空集是任何集合的子集, 即对于任何集合 A , 有 $\emptyset \subseteq A$ 。

如果 A 是 B 的子集, 并且 B 中至少有一个元素不属于 A , 则称集合 A 为 B 的真子集。记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$ 。事实上有 $N \subset Q$, $Q \subset R$ 。

对于两个集合 A 与 B , 如果 $A \subseteq B$, 且 $B \subseteq A$, 则称两个集合相等, 记作 $A = B$, 读作“ A 等于 B ”。

例如: $A = \{x | x^2 - x - 6 = 0\}$, $B = \{-2, 3\}$, 则 $A = B$ 。

例 1 写出集合 $\{a, b, c\}$ 的所有子集与真子集。

解 集合 $\{a, b, c\}$ 的所有子集是: $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{c, a\}$, $\{a, b, c\}$ 。

集合 $\{a, b, c\}$ 的真子集为: $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{c, a\}$ 。

2. 并集 由集合 A 和集合 B 的所有元素组成的集合, 称为集合 A 与 B 的并集。记作 $A \cup B$ 。(如图 1-2 的阴影部分)

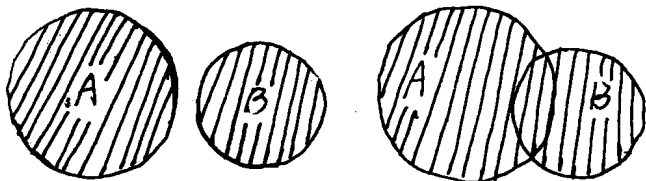


图 1-2

即 $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$

集合的并集有以下性质:

1° $A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B$;

2° 若 $A \subseteq B$, 则 $A \cup B = B$, 特别地, $A \cup \emptyset = A, A \cup A = A$.

3. 交集 由集合 A 和集合 B 的所有公共元素所组成的集合, 称为集合 A 与 B 的交集. 记作 $A \cap B$. (如图 1-3 的阴影部分)

即

$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$.

集合的交集有以下性质:

1° $A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B$.

2° 若 $A \subseteq B$, 则 $A \cap B = A$, 特别地 $A \cap A = A, A \cap \emptyset = \emptyset$.

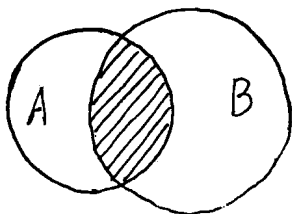


图 1-3

例 2 设 $A = \{x | -1 \leq x \leq 1\}, B = \{x | x > 0\}$

求 $A \cup B$ 和 $A \cap B$.

$$\begin{aligned}\text{解 } A \cup B &= A = \{x \mid -1 \leq x \leq 1\} \cup \{x \mid x > 0\} \\ &= \{x \mid x \geq -1\} \\ A \cap B &= \{x \mid 0 < x \leq 1\}\end{aligned}$$

4. 差集 由属于集合 A 但不属于集合 B 的元素构成的集合, 称为集合 A 与 B 的差集, 记作 $A-B$

即 $A-B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$ (如图 1-4 的阴影部分)

例 3 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{4, 5, 6, 7\}$
则 $A-B = \{1, 2, 3\}$

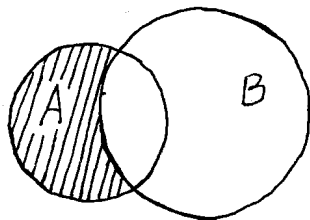


图 1-4

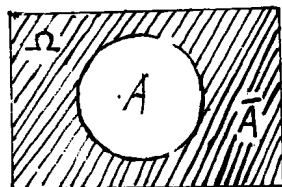


图 1-5

5. 全集与补集 在对某一问题的研究中, 由所研究的所有事物或对象组成的集合, 称为全集, 用 Ω 表示。

全集 Ω 中, 由所有不属于 A 的元素构成的集合, 称为集合 A 的补集。记作 $\bar{A}$ (见图 1-5 的阴影部分)

即

$$\bar{A} = \{x \mid x \in \Omega \text{ 且 } x \notin A\}$$

补集 $\bar{A}$ 有下列性质

$$1^\circ A \cup \bar{A} = \Omega, A \cap \bar{A} = \emptyset;$$

$$2^{\circ} \quad \bar{\Omega} = \emptyset, \bar{\Phi} = \Omega.$$

$$3^{\circ} \quad \overline{\bar{A}} = A.$$

例4 如果 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 3, 5\}$ 则 $\bar{A} = \{2, 4, 6\}$ 。

例5 设 $\Omega = \{\text{实数}\}$, $A = \{x | x < 3\}$, $B = \{x | -1 < x < 2\}$, 则 $\bar{A} = \{x | x \geq 3\}$, 而 $\bar{B} = \{x | x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 2\}$ 。

集合间的运算满足以下运算律

$$(1) \text{ 交换律: } A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$$

$$(2) \text{ 结合律: } (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

$$(3) \text{ 分配律: } (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$(4) \text{ 摩根律: } \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

例6 设 $\Omega = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $A = \{b, d, f\}$, $B = \{d, e, f, g\}$ 验证一下摩根律成立。

$$\text{证明 } \because \bar{A} = \{a, c, e, g\}, \bar{B} = \{a, b, c\}$$

$$\therefore \bar{A} \cap \bar{B} = \{a, c, e, g\} \cap \{a, b, c\} = \{a, c\}$$

$$\bar{A} \cup \bar{B} = \{a, c, e, g\} \cup \{a, b, c\} = \{a, b, c, e, g\}$$

$$\text{又 } \because A \cup B = \{b, d, f\} \cup \{d, e, f, g\}$$

$$= \{b, d, e, f, g\}$$

$$\therefore \overline{A \cup B} = \{a, c\}$$

$$\text{又 } \because A \cap B = \{b, d, f\} \cap \{d, e, f, g\} = \{d, f\}$$

$$\therefore \overline{A \cap B} = \{a, b, c, e, g\}$$

$$\text{综上所述 } \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$