现代数学基础

15

有限群表示论

（第二版）

■ 曹锡华　时俭益

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

现代数学基础

本教材获华东师范大学研究生重点教材
建设基金资助

15 有限群表示论

（第二版）

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

本书旨在介绍有限群的表示理论, 其中包括群表示论的基本概念与两条主要研究途径的介绍。书的前八章介绍有限群的常表示理论 (即在特征数不整除群的阶数的域上的表示, 具有完全可约性), 着重论述了与群的诱导表示有关的一些经典结果, 同时也探讨了域的选取与群表示分解之间的关系。后四章介绍有限群模表示的 Brauer 理论 (即在特征数整除群的阶数的域上的表示, 一般不具备完全可约性), 该理论通过 p 模系统将有限群 G 在特征零域上的表示理论与特征 p (这里 $p||G|$) 域上的表示理论联系起来; 也将 G 在特征零域上的特征标理论与 G 的 p 局部结构联系起来。本书为求自成系统, 在第一章用较大篇幅简要地叙述了与群表示论有关的一些预备知识, 特别是介绍了有限维代数的结构与表示理论。本书每节后都附有足够多的习题帮助读者理解与拓广正文的内容。

本书假定读者已经熟悉线性代数理论, 并具备群论, 环论与域的伽罗华理论方面的最基本知识。本书可作为研究生与高年级本科生的教科书, 也可供有关专业的数学工作者与高校教师阅读。

图书在版编目(CIP)数据

有限群表示论/曹锡华,时俭益.—2版.—北京:高等教育出版社,2009.10

ISBN 978-7-04-027486-8

Ⅰ.有… Ⅱ.①曹… ②时… Ⅲ.有限群-群表示 Ⅳ.O152.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第140587号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	涿州市星河印刷有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
		版　　次	1992年10月第1版
开　　本	787×1092　1/16		2009年10月第2版
印　　张	20.5	印　　次	2009年10月第1次印刷
字　　数	390 000	定　　价	58.00元

物料号　27486-00

再版前言

本书自 1992 年由高等教育出版社出版至今已有十七年，期间曾被多个高校用作研究生课程教材，国内也陆续出版过数本中文版的介绍群表示理论的教材。在过去的十多年里，群表示及相关数学理论在国际上的发展日新月异，国内学习和研究群表示理论的队伍快速壮大，人们对于介绍群表示理论的教材也有了更高的要求和期盼。为此，利用本书再版的机会，作者除了对原版进行细致的勘误补正外，在书的正文和习题部分都作了较大幅度的增补，特别，书中增添了介绍有限群模表示理论的四章内容，其中包括 p 模系统 (K, R, k) 与 Grothendieck 环; Brauer 特征标、块及其亏群; Brauer 关于诱导块的三个主要定理; 顶点和源头。正文后面所附的习题，有的直接摘自文献，有的由文献里的一些结果编制而成，它们将作为正文内容的有机补充，其中有些习题内容甚至可作为正文的一部分。例如，我们先在正文里证明了定理 (7.2.1)，接着，在 §7.3 后设计的一组习题里让读者将定理 (7.2.1) 推广为 Witt-Berman 定理。随后，在对定理 (9.2.6) 的证明里用到了 Witt-Berman 定理。读者可通过做习题来检验自己对正文内容的理解程度，对新知识的自学能力和动手解题的技巧。对于书后的"汉英对照术语索引"、"符号"和"参考文献"，再版本也作了相应的改变: 除了增加必要的条目外，还细化了索引，例如，对于循环群、对称群、交代群、交换群等条目，我们都列出书中多个相关出处，循着该线索，读者可对这些概念有比较系统的理解。又例如，对于符号 $\mathrm{ind}_H(x)$，原版本里仅解释为"群的元素 x 关于子群 H 的指数"，再版本里说得更明白:"群的元素 x 关于子群 H 的指数 $[H : {}^xH \bigcap H]$"。

曹锡华教授是我在硕士研究生阶段的导师，学习有限群表示理论的领路人，曾亲自为我所在的 78 届研究生讲授 Serre 编写的教科书 "Linear Representations of Finite Groups”, 曹先生的课, 深入浅出，厚积薄发，被文化大革命蹉跎十多年青春岁月的我们如久旱之苗如饥似渴地汲取知识的甘霖，至今仍印象深刻，经久不忘。曹先生于 20 世纪 80 年代中期接受编写“有限群表示论”教科书的任务, 其时正值我刚从英国获得博士学位后回国不久。他让我一起参加教科书的编写工作, 也让我主讲群表示论课程及参与他名下研究生的论文指导工作。从 1986 年春列出提纲到 1988 年春依审稿人意见修改后定稿, 前后历时约两年, 工作模式基本上是由我在曹先生的指导和放手鼓励下拟出初稿, 交曹先生校阅后提出修改意见, 再由我动手改定。授课和编写教科书的经历给我提供了极佳机会去深入系统地领略、欣赏和掌握群表示理论的精致内涵和高超技巧, 曹先生的指导和放手使我在学术上得到很好的锻炼。书在定稿后过了四年半时间才正式出版。曹先生曾于 1948 年至 1950 年期间在美国的密歇根大学师从有限群模表示理论的创始人 R.Brauer 教授, 研究群论及其表示理论。曹先生是国内研究群表示理论的德高望重的前辈, 为中国的代数学发展及相关人才建设殚尽竭虑数十载, 桃李遍天下, 享誉海内外。曹先生于 2005 年 12 月 22 日不幸因病逝世, 享年 85 岁。痛失恩师, 无以相报, 惟有继承曹先生的未竟事业, 使研究群表示理论的薪火代代相传发扬光大, 以告慰曹先生的在天之灵。这是本书在面世十七年后决定增补再版的缘起。

时俭益

2009 年 3 月 31 日

前言

群表示理论是近代数学中发展迅速且相当活跃的数学分支，它包括群的常表示理论，模表示理论与整表示理论，其中，有限群的常表示理论创立最早，迄今已有一百多年的历史，发展也最完善，是研究其它群的表示理论的基础。

群表示理论是在线性代数、群论、环论、域的伽罗华理论、代数结构理论、模论与代数数论等数学学科的基础上发展起来的。随之群表示理论又与更多的数学学科发生了互相联系，它与范畴论，代数 K 理论，代数几何等学科的关系日趋密切，且从这些学科中不断汲取新的方法并充实新的内容。同时它也被广泛地应用于其它学科，一些较早期的如 Burnside 的群可解性等问题与较新的如有限单群分类等问题的解决都得力于群的表示理论。除此以外，群表示理论在物理、化学、天文学与建筑学等一些自然科学与科技领域里也有广泛的应用。

有限群的常表示理论是群在特征数不整除群的阶数的域上的表示理论。创立该理论的最初工作主要是由 G.Frobenius 做的，他的理论建立在复数域上，其主要工具是由他创立的群特征标理论。与 Frobenius 差不多同时的 H.Maschke 与 I.Schur 在群表示的分解与可约性问题上作出了重要贡献。特别是 Schur，经他整理的有限群表示理论简明系统而为较多人所理解，第一个把群与代数的表示理论推广到一般域上的是 E. Noether，她的名著 "Hyperkomplexe Grössen und Darstellungstheorie" 把群与代数的结构理论与表示理论融为一体。该书对于近世代数的发展产生了深远的影响，在近半个世纪来对群表示理论的各个方面都作出重大贡献的莫过于 R. Brauer，他在诱导特征标与分裂域方面的重要结果已成为群表示理论中最基本的内容之一。Brauer 的最主要贡献是创立了群的模表示理论，即群在特征数可整除群的阶数的域上的表示理论。

本书将只介绍有限群的常表示理论, 我们假定读者已经熟悉线性代数理论, 并具备群论、环论与域的伽罗华理论方面的最基本知识, 尽管如此, 为了便于学习, 我们仍在第一章简要地介绍与群表示论有关的群论、域的伽罗华理论与范畴论的基本内容, 并比较详尽地讨论有限维代数的结构与表示理论, 然后从第二章起系统地讨论有限群表示理论。第二、三、四章是关于有限群表示理论的最一般内容, 其中包括群表示论的基本概念及研究群表示论两条主要途径的介绍, 即有限维代数结构理论和群特征标理论在群表示论上的应用, 第五、六、七章着重研究群的诱导表示, 其中包括 Mackey 的子群定理与张量积定理, Frobenius 关于限制与诱导表示的互反律, 诱导表示的不可约性判则, 诱导表示及其特征标的分解以及关于诱导特征标的 Artin 定理与 Brauer 定理。最后, 第八章专门讨论表示在域上的 Schur 指标。

本书叙述力求简明通俗、自成系统。正文中的例子与每节正文后面的习题可帮助读者理解和拓广正文的内容。

本书可作为高年级大学生与研究生的教科书, 也可供有关专业的数学工作者与大学教师阅读。

对于高年级大学生, 我们不要求他们预先学过伽罗华理论。同时, 以下一些章节的内容可不列入课程范围: §1.2, §1.10, §2.5, §3.2, §4.3, §4.5, §5.5, §6.2 与第八章。此外, §5.1 中关于诱导表示的范畴论刻画的那部分内容也可略去不讲。

1987 年 12 月 9 日

目　　录

第一章 群表示论的预备知识

在本书里，假定读者已经熟悉关于群论、环论、环上模论、域的伽罗华理论与线性代数理论的基本概念. 尽管如此, 为了便于讨论群表示理论, 也为了使读者了解群表示理论所赖以发展的代数基础, 本书仍以一章的篇幅介绍与之有关的知识.

§1.1 群论的基本概念

假定读者已熟悉群的基本理论, 现在介绍本书中要用到的一些群论基本概念, 如不特别申明, 本书所考虑的群都是有限群.

(I) 若干特殊群

(1.1.1) 定义 *如群 $G \neq 1$ 仅有的正规子群是 G 与 $\{1\}$, 则称 G 为***单群**. *如果*

$$G = G_1 \supseteq G_2 \supseteq \cdots \supseteq G_{s+1} = \{1\}$$

*是群 G 的一个子群序列使 $\forall i, 1 \leqslant i \leqslant s$, 有 $G_{i+1} \lhd G_i$, 这里记号 $G_{i+1} \lhd G_i$ 表明 G_{i+1} 是 G_i 的正规子群, 则称该子群列为 G 的长度等于 s 的*__正规列__, *并称 $\{G_i/G_{i+1} | 1 \leqslant i \leqslant s\}$ 为该正规列的*__因子集__. *当因子集由单群组成时, 称该正规列为 G 的*__合成列__. *合成列的因子称为*__合成因子__. *据 Jordan-Hölder 定理, 群 G 的合成列的*__合成因子多重集__ *(多重集是指带有正整数重数的元素集合. 特别, 当其所有元素的重数都等于 1 时, 多重集就是普通的集合) 在同构的意义下与 G 的合成列的选取无关, 仅与 G 本身有关, 故可称之为 G 的*__合成因子多重集__.

(1.1.2) 例

(a) **导群列** 群 G 的**导群** $G^{(1)}$ 是 G 的由换位子集合 $\{a^{-1}b^{-1}ab|a,b\in G\}$ 所生成的子群, $G^{(1)}$ 也是 G 的使 G/K 为阿贝尔群的最小正规子群 K. 定义子群列

$$G=G^{(0)}\supseteq G^{(1)}\supseteq G^{(2)}\supseteq\cdots,$$

这里 $G^{(i)}$ 是 $G^{(i-1)}$ 的导群, $\forall i$, 称该子群列为 G 的**导群列**.

(b) **下中心列** 定义群 G 的子群列

$$G=G_0\supseteq G_1\supseteq G_2\supseteq\cdots,$$

其中 G_i 是由换位子集合 $\{a^{-1}b^{-1}ab|a\in G_{i-1},b\in G\}$ 所生成的子群, $\forall i$, 称该子群列为 G 的**下中心列**.

(c) **上中心列** 定义群 G 的子群列

$$\{\mathbf{1}\}=Z_0\subseteq Z_1\subseteq Z_2\subseteq\cdots,$$

其中 Z_1 是 G 的中心. Z_i 是 G 的含 Z_{i-1} 的子群且 Z_i/Z_{i-1} 是 G/Z_{i-1} 的中心, $\forall i$, 称该子群列为 G 的**上中心列**.

(1.1.3) 定义 如群 G 的导群列终止于 $\{\mathbf{1}\}$, 则称 G 为**可解群**. 如群 G 的上中心列终止于 G (或等价地, 下中心列终止于 $\{\mathbf{1}\}$), 则称 G 为**幂零群**.

熟知群 G 可解当且仅当 G 有正规子群列

$$G=G_1\supseteq G_2\supseteq\cdots\supseteq G_{s+1}=\{\mathbf{1}\}\ (\text{即}\quad G_i\lhd G,\forall i),$$

使 $[G_i:G_{i+1}]:=\dfrac{|G_i|}{|G_{i+1}|}$ 是素数幂, $\forall i, 1\leqslant i\leqslant s$ ($|G|$ 表示群 G 的阶数).

设 $N\lhd G$. 则群 G 可解当且仅当 N 与 G/N 都可解.

(1.1.4) 定义 如群 G 可解, 且 G 有合成列

$$G=G_1\supseteq G_2\supseteq\cdots\supseteq G_{s+1}=\{\mathbf{1}\},$$

使 $G_i\lhd G,\forall i$, 则称 G 为**超可解群**.

令 p 为素数, $x\in G$. 如 x 的阶数是 p 的幂, 则称 x 为 p **元素**. 如 x 的阶数与 p 互素, 则称 x 为 p' **元素**.

显然, 恒等元 $\mathbf{1}$ 既是 p 元素又是 p' 元素. $\mathbf{1}$ 是 G 中仅有的具有这种性质的元素.

$\forall x\in G$, 存在唯一分解式 $x=x'x''=x''x'$, 使 x' 为 p' 元素, x'' 为 p 元素, 此时称 x' 为 x 的 p' **部分**, x'' 为 x 的 p **部分**.

(1.1.5) 定义 阶数为 p 的幂的群称为 p **群**. 阶数与 p 互素的群称为 p' **群**. 称 G 为 p **可解群**, 如果存在 G 的子群列

$$G = G_1 \supseteq G_2 \supseteq \cdots \supseteq G_{s+1} = \{1\},$$

使得 $\forall i, 1 \leqslant i \leqslant s, G_{i+1} \lhd G_i$, 且 G_i/G_{i+1} 要么是 p 群, 要么是 p' 群.

我们有关于群的集合的如下包含关系:

$\{p$ 群 $|p$ 为素数$\}\subseteq\{$幂零群$\}\subseteq\{$超可解群$\}\subseteq\{$可解群$\} \subseteq \{p$ 可解群 $|p$ 为素数$\}$.

由集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 上所有置换组成的群称为 n 次对称群, 记作 S_n; 由 S_n 中所有偶置换组成的子群称为 n 次交代群, 记作 A_n.

群 S_n 与 A_n 当 $n \leqslant 4$ 时是可解群, 但当 $n \geqslant 5$ 时不是可解群.

如 G 是幂零群, 则 G 的任何真子群 H 的正规化子 $N_G(H)$ 一定严格包含 H. 群 G 是幂零群的充要条件是 G 为其 Sylow 子群的直积.

还有二族群在表示论中起着重要作用, 它们被分别称为初等群与拟初等群.

(1.1.6) 定义 如存在素数 p 使 H 为 p 群 P 与循环 p' 群 Z 的直积:

$$H = P \times Z, \tag{1}$$

则称 H 为 p **初等群** (或简称为**初等群**).

显然, 对于任何素数 p, 循环群总是 p 初等的; p 群与任何循环群的直积是 p 初等群. 初等群都是幂零群. 初等群的子群也是初等群.

(1.1.7) 定义 如存在素数 p 使 H 为循环 p' 群 Z 与 p 群 P 的半直积:

$$H = Z \rtimes P, \tag{2}$$

则称 H 为 p **拟初等群**(或简称为**拟初等群**).

在拟初等群 H 的分解式 (2) 中, Z 的取法唯一, 它是 H 的含有所有 p' 元素的特征子群.

p 拟初等群另有一个等价的定义: 如 H 是正规循环子群 A 与 p 群 P 的积:

$$H = AP, \tag{3}$$

则称 H 为 p 拟初等群.

任何初等群都是拟初等的. (2) 式中的 p 拟初等群 $H = Z \rtimes P$ 为初等群当且仅当 Z 属于 H 的中心, 也当且仅当 H 有正规的 Sylow p 子群.

(II) 群在集合上的作用

(1.1.8) 定义　给定群 G 与集合 Ω. 如 $\varphi:(x,w)\mapsto xw$ 为从 $G\times\Omega$ 到 Ω 内的映射使 $\forall x,y\in G$ 与 $w\in\Omega$, 下式成立:

$\mathbf{1}w=w$,

$(xy)w=x(yw)$,

则称 φ 为 G 在 Ω 上的**作用**, 称 Ω 为 G **集**. 称两个 G 集 Ω 与 Ω' 为**同构**的, 记作 $\Omega\cong\Omega'$, 如存在双射 $f:\Omega\to\Omega'$ 使

$$f(xw)=xf(w),\quad \forall w\in\Omega,\quad x\in G,$$

这里双射 $f:\Omega\to\Omega'$ 意味着存在映射 $g:\Omega'\to\Omega$ 使 $gf=1_\Omega$ 与 $fg=1_{\Omega'}$, 1_Ω 与 $1_{\Omega'}$ 分别为 Ω 与 Ω' 上的恒等映射.

令 Ω 为 G 集. $\forall x\in G$, 定义映射 $x_l:\Omega\to\Omega$ 如下:

$$x_lw=xw,\quad \forall w\in\Omega,$$

则有

$$1_l=1_\Omega,\quad (xy)_l=x_ly_l,\quad \forall x,y\in G.$$

故 $x\mapsto x_l$ 是从 G 到 Ω 上置换群 (后者同构于 $|\Omega|$ 次对称群) 内的一个**同态**.

在每个 G 集 Ω 上可定义关系 $\sim$ 如下: 令 $v,w\in\Omega$, 如存在 $x\in G$ 使 $w=xv$, 则记 $v\sim w$. 这是一个等价关系. 相应的等价类称为 G **轨道**, 或简称为**轨道**. 每个轨道也都是 G 集. 由一个轨道组成的 G 集称为**可迁** G **集**.

(1.1.9) 定义　令 Ω 为 G 集, $w\in\Omega$. 定义 w 在 G 中的**稳定子**为

$$\mathrm{Stab}_G(w):=\{x\in G|xw=w\}.$$

以记号 $H\leqslant G$ 表示 H 是群 G 的子群, $H<G$ 表示 H 是 G 的真子群. 注意 $\mathrm{Stab}_G(w)\leqslant G$. 如 $H\leqslant G$, 则左陪集空间 $G/H=\{yH|y\in G\}$ 在 G 的如下作用下形成可迁 G 集: $(x,yH)\mapsto xyH, \forall x,y\in G$.

此时, $H=\mathrm{Stab}_G(H)$.

以下命题刻画了有限 G 集.

(1.1.10) 命题　令 Ω 为 G 集.

(a) 设 Ω 是可迁的, $w,w'\in\Omega$, $H=\mathrm{Stab}_G(w)$ 与 $H'=\mathrm{Stab}_G(w')$. 则存在某 $x\in G$ 使 $w'=xw$, 且 $H'=xHx^{-1}$. 特别, 存在 G 集同构 $\Omega\cong G/H\cong G/H'$.

(b) 设 Ω 是可迁的. 设 G 与 Ω 作为集合都有限, 则

$$|\Omega|=[G:\mathrm{Stab}_G(w)],\quad \forall w\in\Omega.$$

特别, $|\Omega|||G|$.

(c) 设 Ω 是有限集 (不必可迁). 令 $\{\Omega_i|i \in I\}$ 为 Ω 的 G 轨道集合, 则有

$$|\Omega| = \sum_{i \in I} |\Omega_i|$$

与 $|\Omega_i| = [G : \mathrm{Stab}_G(w_i)], \forall w_i \in \Omega_i, i \in I$.

(1.1.11) 例

(a) 设 $H \leqslant G$, 则 H 可通过左乘 $(h,x) \mapsto hx$ 作用于 G, 也可通过右乘 $(x,h) \mapsto xh^{-1}$ 作用于 G, 这里 $x \in G, h \in H$. 在第一种情形的 H 轨道是右陪集 $\{Hx\}$, 而在第二种情形的 H 轨道是左陪集 $\{xH\}$.

(b) 设 $H, K \leqslant G$. 则直积 $H \times K$ 以如下方式作用于 G:

$$((h,k),x) \mapsto hxk^{-1}, \forall x \in G, h \in H, k \in K.$$

此时的轨道是 (H,K) 双陪集 $\{HxK\}$.

(c) 设 $H \leqslant G$. H 可通过 G 的内自同构作用于 G:

$$(x,y) \mapsto xyx^{-1} = i_x(y), \quad \forall x \in H, \quad y \in G,$$

这里 i_x 是 G 的由 x 所决定的内自同构. 同态 $x \mapsto i_x$ 把 H 映到 G 的内自同构群内. 其核恰为 H与 G 的中心 $Z(G)$ 的交集 $H \bigcap Z(G)$. 此时的 H 轨道称为 G 的 H **共轭类**. 特别, 当 $H = G$ 时, H 轨道正好是 G 的共轭类. 以 $\mathrm{Cl}\ (G)$ 记群 G 的共轭类集合. 如 $\mathscr{C} \in \mathrm{Cl}\ (G), x \in \mathscr{C}$, 则 x 在 G 中的稳定子是 x 在 G 中的中心化子

$$C_G(x) := \{y \in G | yxy^{-1} = x\}.$$

我们有群 G 的类方程

$$|G| = |Z(G)| + \sum_x [G : C_G(x)],$$

右端和式里的 x 取遍 G 在 $G - Z(G)$ 中共轭类的一个代表系.

(1.1.12) 定义 设 $H \leqslant G$. 记 $N_G(H) := \{g \in G | gHg^{-1} \subseteq H\}$, 称之为 H 在 G 中的**正规化子**.

对于 $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ 和素数 p, 记 $n_p = p^a$ (或 $n_{p'} = |m|$), 如果 $n = p^a m$, 其中 $a \in \mathbb{N}$ 和 $m \in \mathbb{Z}$ 满足 $p \nmid m$. 称 n_p 为 n 的 p **部分**, 称 $n_{p'}$ 为 n 的 p' **部分**.

(1.1.13) 定理 (Sylow) (a) 设 $|G|_p = p^a$, 其中 p 是素数. 则 G 含有 p^a 阶子群 (称为 G 的 **Sylow p 子群**). G 的所有 Sylow p 子群都互相共轭.

(b) G 的任何 p 子群都落在它的某个 Sylow p 子群里.

(c) 如果 G 是 p 群, 则 G 的中心 $Z(G) := \{g \in G | gx = xg, \forall x \in G\}$ 非平凡; $P < N_G(P), \forall P < G$.

(Ⅲ) 群由生成元与关系式来定义

(1.1.14) 定义　设 G 是群. $a_1,\cdots,a_n\in G$. $\{w_1,\cdots,w_t\}$ 是元素 $a_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 及其逆元的一些乘积. 它们满足条件:

(a) $G=\langle a_1,\cdots,a_n\rangle$ (即 G 由元素 $a_1,\cdots,a_n$ 生成), 且关系式 $w_1=\mathbf{1},\cdots,w_t=\mathbf{1}$ 都成立.

(b) 如 G' 是含元素 $a_1',\cdots,a_n'$ 的另外一个群, 使得 $w_1'=\cdots=w_t'=\mathbf{1}$ 在 G' 中成立, 这里 $\forall i,1\leqslant i\leqslant t, w_i'$ 可从 w_i 通过把因子 $a_j(1\leqslant j\leqslant n)$ 换成 a_j' 而得, 则存在群的唯一同态 $\varphi:G\to G'$ 使 $\varphi(a_i)=a_i',\forall i,1\leqslant i\leqslant n$.

并称 G 有一个**表现** (presentation)

$$G=\langle a_1,\cdots,a_n|w_1=w_2=\cdots=w_t=\mathbf{1}\rangle.$$

由定义可知: 有相同表现的两个群是同构的.

(1.1.15) 例

(a) 阶数为 $2n$ 的二面体群 D_n 有表现

$$D_n=\langle r,s|r^n=s^2=(rs)^2=\mathbf{1}\rangle.$$

(b) 阶数为 $4m$ 的广义四元数群 Q_m 有表现

$$Q_m=\langle r,s|r^{2m}=r^ms^2=rsrs^{-1}=\mathbf{1}\rangle.$$

(c) 有限生成的 Coxeter 群 W 有表现

$$W=\langle s_1,\cdots,s_n|(s_is_j)^{m_{ij}}=\mathbf{1},\forall i,j,1\leqslant i,j\leqslant n\rangle,$$

这里正整数 m_{ij} 满足

$$m_{ij}=m_{ji}\begin{cases}=1, & 如\ \ i=j,\\ >1, & 如\ \ i\neq j.\end{cases}$$

注意对称群 S_n 是 Coxeter 群, 它有表现

$$S_n=\langle s_1,\cdots,s_{n-1}|(s_is_j)^{m_{ij}}=\mathbf{1},\forall i,j,1\leqslant i,j<n\rangle,$$

这里

$$m_{ij}=\begin{cases}1, & 如\ \ i=j\\ 2, & 如\ \ i\neq j\pm 1,j,\\ 3, & 如\ \ i=j\pm 1.\end{cases}$$

习 题

1. 证明: 有限群 G 的每个元素 x 有唯一分解 $x = x'x'' = x''x'$ 使得 x' 是 p' 元素, x'' 是 p 元素

2. 设 $H = C \times P$ 是 p 初等群, 这里 C 是循环 p' 群, P 是 p 群. 求证:

(a) H 是幂零群. H 的每个子群都是 p 初等群.

(b) C 是 H 中所有 p' 元素的集合. P 是 H 中所有 p 元素的集合.

3. 验证拟初等群的子群也是拟初等群.

4. 设 X 是 G 集. 如 $\forall(u,v),(u',v') \in X \times X, u \neq v, u' \neq v'$, 存在 $g \in G$ 使 $gu = u'$ 与 $gv = v'$, 则称 X 为双可迁的. 设 G 是集合 $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$ 上可迁置换群 (即 G 是满足以下条件的群: $\forall 1 \leqslant i, j \leqslant n$, 存在 $g \in G$ 使 $gx_i = x_j$). 令 $H = \mathrm{Stab}_G(x_1)$. 求证:

(a) 存在元素 $g_1, \cdots, g_n \in G$ 使 $g_i(x_1) = x_i, 1 \leqslant i \leqslant n$, 且

$$G = g_1 H \bigcup \cdots \bigcup g_n H.$$

(b) X 上 H 轨道的个数等于 G 的 (H, H) 双陪集个数.

(c) 如 G 双可迁地作用于 X, 则 H 可迁地作用于 $X - \{x_1\}$.

5. 设 H, H' 与 K 是 G 的子群. 如存在 $k \in K$ 使 $H' = kHk^{-1}$, 则称 H 与 H' 为 ***K* 共轭的**. 验证 G 的 K 共轭于 H 的相异子群个数等于 $[K : N_K(H)]$, 这里 $N_K(H) := \{k \in K | H = kHk^{-1}\}$.

6. 试证存在严格的包含关系:

$$\{\text{幂零群}\} \subset \{\text{超可解群}\} \subset \{\text{可解群}\}.$$

7. Clifford 群 $\mathbb{CL}(n)$ 是一个由生成元集 $\{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n, \mathbf{-1}\}$ 和以下关系式所定义的群: $\gamma_i^2 = (\mathbf{-1})^2 = \mathbf{1}, (\gamma_i\gamma_j)^2 = \mathbf{-1}, (\mathbf{-1})\gamma_i = \gamma_i(\mathbf{-1}), \forall 1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, 这里 $\mathbf{1}$ 是群 $\mathbb{CL}(n)$ 的单位元. 证明:

(a) $\mathbb{CL}(n)$ 的阶数等于 2^{n+1}.

(b) $\mathbb{CL}(n)$ 的导群等于 $\{\mathbf{1}, \mathbf{-1}\}$.

(c) 设 $Z(\mathbb{CL}(n))$ 是 $\mathbb{CL}(n)$ 的中心. 当 n 是偶数时, $Z(\mathbb{CL}(n)) = \{\mathbf{1}, \mathbf{-1}\}$; 当 n 是奇数时, $Z(\mathbb{CL}(n)) = \{\mathbf{1}, \mathbf{-1}, \gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_n, -\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_n\}$.

(d) $\mathbb{CL}(n)$ 的每个不属于中心的共轭类含有二个元素. 因此当 n 是偶数时, $\mathbb{CL}(n)$ 共有 $2^n + 1$ 个共轭类; 而当 n 是奇数时, $\mathbb{CL}(n)$ 共有 $2^n + 2$ 个共轭类.

§1.2 域的基本概念

本节概要地叙述后面要用到的域论中一些定义和结果.

(1.2.1) 如 F 是域 E 的子域, 则称 E 为 F 的**扩域**, 记作 E/F. 此时 E 可被自然地看作 F 空间, 其维数记作 $\dim_F E$. 如 $\dim_F E < \infty$, 则称 E/F 为**有限次扩域**. 如 $\dim_F E = \infty$, 则称 E/F 为**无限次扩域**.