一般拓扑学

陈奕培
编著

门大学出版社

[闽]新登字 09 号

一般拓扑学

陈奕培　编著

*

厦门大学出版社出版发行
莆田市印刷厂印刷

*

开本 850×1168　1/32　　8.125 印张　　210 千字
1996 年 8 月第 1 版　　1996 年 8 月第 1 次印刷
印数:1—1000 册
ISBN　7—5615—1197—3/O·71
定价:12.00 元

内容提要

本书介绍“点集拓扑学”的基本知识，第一、二两章是预备知识，第三、四、五各章乃是点集拓扑学的基本内容。若干进一步的概念作为附录编入。

本书可作为高等院校数学专业的教材，也可供大专院校非数学专业学生及一般数学工作者阅读参考。

前　　言

拓扑学是现代数学的一个重要分支，它的研究对象是拓扑空间，从群论观点而言，它是研究空间在拓扑变换之下的不变性．由于拓扑空间这一概念的形成源自分析学与几何学（可参阅作者所写的一篇通俗性文章："拓扑学的研究对象片断"《厦门数学通讯》1984 年），因此对于从事现代分析与几何，以及与它们有关的各种学科的研究，拓扑学知识都是不可缺少的．

任何一门数学分支学科都有它的研究方法．当然，定理的证明或是某个数学系统的运算等，都是以数理逻辑和代数运算为基础．然而从研究拓扑学的基本方法而言，又有以 Cantor、Frechét 等人建立的点集拓扑学和以 Poincaré 创立的代数拓扑学的划分．前者以集合论为基础，后者则通过某些对象的代数运算为基础．而后者又以前者为其一般基础．因此前者又称为一般拓扑学．二十世纪五十年代以后，M・Morse 把微积分学，特别是变分学方法引入拓扑学而产生微分拓扑学．美国 M・Milnor，S・Smale 和法国的 R・Thom 等人的贡献使拓扑学在六十年代的发展达到高潮．六十年代以后，科学家们把拓扑概念与方法应用到阐明物理现象、生物现象诸领域，充分显示这门学科对数学、自然科学、技术科学等的发

展，具有重要作用.

本书介绍一般拓扑学的基础知识，它是作者长期从事几何学和拓扑学的教学工作，在教学过程中编写的讲义，经过修改补充而成的. 本书内容的第一、第二两章是预备知识部分；第三、第四、第五三章是基本内容；最后的附录是作为补充知识编入，供参考阅读之用. 书中各节附有一定份量的习题供练习选做. 为节省篇幅和便于排印，本书缺少图示，希望读者在阅读时自行作出示意图解，以帮助理解.

本书的出版，得到厦门大学数学系许多同事的支持与鼓励；特别是梁益兴同志对修改稿作了认真的校阅，提出许多宝贵意见，并为出版工作给予很多帮助. 本书的出版是得到厦门大学南强丛书教材基金的资助，并得到厦门大学出版社的支持和帮助，作者向他们表示衷心的感谢.

由于作者水平所限，难免有不妥甚至错误之处，竭诚欢迎读者给予批评指正.

陈奕培

一九九五年三月于厦门大学

目　录

第一章　集合与映射

一般拓扑学是以集合论为基础，而在此只是为最低要求对集合论知识作简单介绍．对逻辑领域知识的要求，如同对初等几何讨论那样，仅仅是为了防止凭直观可能导致错误，因此只要求读者了解一个命题以及与它关联的逆命题、否命题、逆否命题等概念的关系．关于数学知识，则是从整数到实数系统．至于从集合论公理构作这些代数系统，即建立域、有序域、线性连续统等以及关于有限集与无限集、递归定义原理等等，读者可参阅集合论专书．

§1　集　合

在数学中，通常把一个数学对象的集体，即同类型对象的汇集，称为一个集合．用这个术语指明某种对象的集体，以区别于其它的对象的集体．如果 x 是集合 X 的一个对象，我们称 x 是 X 的一个元素、一个成员或一点，或者称 x 属于 X，通常记为

$$x \in X;$$

否则的话，即 x 不是 X 的元素，则记为

$$x \notin X.$$

常用的逻辑符号,除了$\in$(属于),还有$\wedge$(合取词"而且"),$\vee$(析取词"或者"),$\rightarrow$(蕴涵词"若……则……"),$\Leftrightarrow$(双蕴涵词"当且仅当").

两个集合 X 与 Y 称为彼此相等,意即它们具有相同的元素,亦即

$$x \in X \Leftrightarrow x \in Y;$$

用记号 $X=Y$
表示. 否则的话,若 X 与 Y 包含的元素不尽相同,则说 X 与 Y 不相等,记为

$$X \neq Y$$

对于给定的集合,往往采用记号

$$\{x|P\}$$

表示,以确定该集合是由具给定性质 P 的那些对象所组成. 有时也将该集合的全部成员列举出来(如果可能话). 例如,一集合由 -1 和 1 组成,则记为

$$\{-1,1\};$$

或记为

$$\{x|x\text{ 是实数而且 } |x|=1\}.$$

由单独一个元素 x 构成的集合,通常记为$\{x\}$.

没有成员的集合称为空集,记为$\varnothing$. 因此也可表为

$$\{x|x \neq x\} = \varnothing$$

常用的一些数的集合分别由下列规定记号表示之:

$\mathbf{N}$:零及全体自然数的集合;$\mathbf{N}^+$或$\mathbf{Z}^+$:全体正整数集合;$\mathbf{Z}$:全部整数的集合;$\mathbf{Q}$:全部有理数集合;$\mathbf{Q}^+$:全部正有理数集合;$\mathbf{R}$:全部实数的集合;$\mathbf{R}^+$:全体正实数集合;$\mathbf{C}$:全部复数的集合;

$$I = \{x \in \mathbf{R}| \quad 0 \leqslant x \leqslant 1\}.$$

如果一个集合 X 包含在集合 Y 之中,即 X 的成员都是 Y 的

成员，则称 X 是 Y 的一个子集记为

$$X \subset Y \quad 或 \quad Y \supset X.$$

注意到空集是任一集合 X 的子集，即对任一集合 X，$\varnothing \subset X$ 总是成立的.

显然，

$$X \subset Y 而且 Y \subset X \Leftrightarrow X = Y$$

包含关系 $X \subset Y$ 并不排除 $X=Y$ 的可能性．当 $X \subset Y$ 而且 $X \neq Y$，则称 X 为 Y 的**真子集**.

一个集合 X 的全部子集所构成的集体，称为该给定集合 X 的**幂集**．记为 $\mathscr{P}(Z)$或 2^X.

设 A 与 B 是两个集合，则集合

$$A \cup B = \{x \mid x \in A 或 x \in B\}$$

是由至少属于集合 A 和 B 之一的那些对象所组成，称为 A 和 B 的**并集**或**和集**．而集合

$$A \cap B = \{x \mid x \in A 而且 x \in B\}$$

是由既属于 A 同时也属于 B 的那些对象所组成，称为 A 与 B 的**交集**. 当 A 与 B 没有公共元素时，即 $A \cap B = \varnothing$，这时也说 A 与 B 不相交.

关于集合的并与交的运算(也称为集合的 *Boole* 运算)，满足下列诸运算规律：

$$A \cap B \subset A \subset A \cup B;$$

$$A \cup A = A = A \cap A;$$

$$A \cup \varnothing = A; \qquad A \cap \varnothing = \varnothing$$

$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C,$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cup C),$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A.$$

设 A 与 B 是 X 的子集，则集合

$$X\backslash A = \{x | x \in X, x \notin A\}$$

称为 A 在 X 中的馀集(或补集)；

而集合

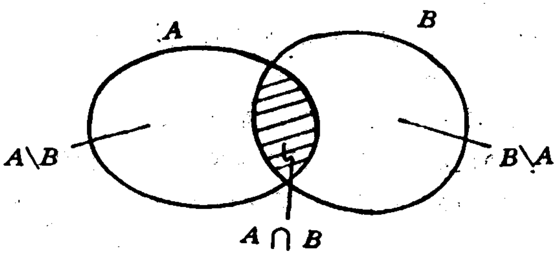
$$A\backslash B = \{x | x \in A \text{ 而且 } x \notin B\}$$

称为 B 在 A 中的相对馀集(或差集).

集合 $(A\backslash B) \cup (B\backslash A)$ 称为对称差集，有时记为 $A\triangle B$. 因此

$$A \cup B = (A\triangle B) \cup (A \cap B)$$

集合的包含关系，也可用图形象征性地加以表示，这种图示也称为 *Venn* 图解. 例如



如果 A 与 B 都是 X 的子集，则

$$A \subset B \Leftrightarrow X\backslash B \subset X\backslash A;$$

对于任何集合 X 与其子集 A 和 B，我们有下列两个等式：

$$X\backslash(A \cup B) = (X\backslash A) \cap (X\backslash B),$$

$$X\backslash(A \cap B) = (X\backslash A) \cup (X\backslash B);$$

它们称为 **De Morgan** 定律.

从给定的集合，通过子集、并集、交集和馀集等概念，我们可得出新的集合. 此外，还可通过另一种构作得出新的集合.

例如，在解析几何中，当在平面上选取一条 x 轴和一条 y 轴

(它们都是实数直线 R)于是平面 R^2 上每一个点与实数的有序偶 (x,y) 建立一一对应. 这就是从两个集合 R 得出新的、所谓乘积集合 R×R 的例子. 推广到给定两个不同的集合,即得下述概念:

假设有两个对象 x 和 y,则由它们所构所的有序偶(x,y)是一个新的对象。对于给定的集合 X 与 Y,则由全部有序偶构成的集合

$$X\times Y:=\{(x,y)\mid x\in X,y\in Y\}$$

称为两集合 X 与 Y 的乘积(或笛卡儿积),此中 := 表示"规定为"或"定义为"的记号. 显然有

$$X\neq\varnothing \text{ 且 } Y\neq\varnothing\Leftrightarrow X\times Y\neq\varnothing.$$

若 $C\times D\neq\varnothing$,则 $C\times D\subset A\times B\Leftrightarrow C\subset A$ 且 $D\subset B$.

从此,对于两个非空集合 A 与 B,则

$$A\times B=B\times A\Leftrightarrow A=B$$

这表明笛卡儿积不满足交换律. 一般而言,笛卡儿积也不满足结合律,即

$$(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C)$$

但是,笛卡儿积关于并集、交集和馀集等运算是满足分配律的,即

$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$$
$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$$
$$A\times(B\backslash C)=(A\times B)\backslash(A\times C).$$

习　题

1. 验证本节所列有关集合运算规律的各个表达式.
2. 证明吸收律

$$(A\cup B)\cap B=B,(A\cap B)\cup B=B.$$

3. 设 A 与 B 都是 X 的子集，证明

(i)$A=B\Leftrightarrow X\backslash A=X\backslash B$

(ii)$A\subset B\Leftrightarrow A\cap(X\backslash B)=\varnothing$

4. 对于给定的集合 A、B、C，把以下每个集合利用记号∪、∩、\及 A、B、C 表示之.

$D=\{x\,|\,x\in A$ 而且$(x\in B$ 或 $x\in C)\}$；

$E=\{x\,|\,(x\in A$ 而且 $x\in B)$或 $x\in C\}$；

$F=\{x\,|\,x\in A$ 而且$(x\in B$ 且 $x\notin C)\}$；

5. 设 A 仅含两个元素，说明 2^A 有 4 个元素；当 A 只有 1 个元素、3 个元素或没有元素，2^A 分别有多少成员？

6. 设 R 为实数集合，下列诸 $R\times R$ 的子集是否等于 R 的两个子集的笛卡儿积？

$(i)\{(x,y)\,|\,x$ 为整数$\}$；

$(ii)\{(x,y)\,|\,x$ 非整数而 y 为整数$\}$；

$(iii)\{(x,y)\,|\,0<y\leqslant 1\}$；$(iv)\{(x,y)\,|\,y>x\}$；

$(v)\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=1\}$.

7. 已知论断"若 $x<0$，则 $x^2-x>0$"，写出它的逆论断及逆否论断，并判别哪一个是正确的.

对于论断"若 $x>0$，则 $x^2-x>0$"又如何？

§2 映　射

设 X 与 Y 是两个集合，若有一个法则 f 使得对每个 $x\in X$，存在唯一的元素 $f(x)\in Y$，则 X，Y 和 f 一起称为从 X 到 Y 的一个映射(或函数). 它是实数域到实数域的函数概念到一般集合的推

广，记为

$$f: X \to Y.$$

这时集合 X 称为映射 f 的**定义域**（或**域**），集合 Y 称为**值域**（或**协域**），$f(x)$ 称为 f 在 x 的**值**（或**像**）该法则 f 也称为映射的图．而 f 的像的集合也称为 f 的**像集**．像集是值域的子集．

设 $f: X \to Y$ 是一个映射，如果 $x \in X$ 而且 $y = f(x)$，则记为

$$x \to y,$$

并且说 f 把 x 映到 y 去．有时 $f(x)$ 由式子确定之，例如：

$$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

$$x \to x^2$$

是 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的映射，记为

$$f(x) = x^2 (x \in \mathbf{R})$$

设 $A \subset X$，则 A 在 X 中的特征函数是指一个特殊的映射：

$$X_A: X \to \{0,1\}$$

满足

$$X_A = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \in A; \\ 0, & \text{当 } x \in X \backslash A. \end{cases}$$

两个映射

$$f: X \to Y, g: A \to B$$

称为**相等的**，仅当 $X = A, Y = B$ 而且 $f(x) = g(x) (x \in X)$．例如两个映射

$$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad g: \mathbf{R} \to \{y \in \mathbf{R} | y \geqslant 0\}$$

$$x \to x^2, \qquad\qquad x \to x^2.$$

是不同的，因为它们的协域不同．

一个映射 $f: X \to Y$ 的全体取值所构成的集合 $\{f(x) | x \in X\}$ 称为该映射的取值区域（有时也称为值域）．当映射的值域落在 R 中，即每个取值是实数，则该映射称为实值映射（或实值函数）．

一个映射 $f: X \to Y$，当它的值域是单一个元素 $\{c\}$，亦即有某

个 $c\in Y$ 使得 $f(x)=c(x\in X)$，则映射称为**常值映射**.

一个映射 $f: X\to Y$ 在子集 $E\subset X$ 上的**限制映射**记为 $f|_E$，它是映射

$$f|_E:\ E\to Y$$
$$x\to f(x),\ x\in E.$$

对集合 X，映射

$$i:\ X\to X,$$
$$x\to x$$

把 X 的元素映到自身，称为 X 到自身的**恒同映射**. 如果 $E\subset X$，即限制映射

$$i|_E:\ E\to X,$$
$$x\to x$$

称为 E 到 X 的**包含映射**.

对于映射 $f: X\to Y$，如果 $X\subset Z$ 而且映射

$$g: Z\to Y$$

满足 $g|_X=f$，即 $g(x)=f(x)$ $(x\in X)$. 则称 g 是 f 的**扩充映射**. 例如映射

$$g_1:\ \mathbf{R}\to\mathbf{R},\qquad g_2:\ \mathbf{R}\to\mathbf{R}$$
$$x\to x^2;\qquad\qquad x\to x^3.$$

两者都是 $f: [0,1]\to\mathbf{R}(x\to x)$ 的扩充映射.

对于映射 $f: X\to Y, g: Y\to Z$；则映射

$$g\circ f:\ X\to Y,$$
$$x\to g(f(x));$$

称为 f 与 g 的**合成映射**（注：构成合成映射 $g\circ f$，仅当 f 的值域等于 g 的定义域才有意义.）

两个映射的合成是不可交换的. 例如

$$f:\ \mathbf{R}\to\{y\in\mathbf{R}\,|\,y\geqslant 0\},\qquad g:\ \{y\in\mathbf{R}\,|\,y\geqslant 0\}\to\mathbf{R},$$
$$x\to e^x;\qquad\qquad y\to 2y.$$

的合成分别为：

$$g \circ f: \mathbf{R} \to \mathbf{R},$$
$$x \to 2e^{x};$$
$$f \circ g: \{y \in \mathbf{R} \mid y \geqslant 0\} \to \{y \in \mathbf{R} \mid y \geqslant 0\},$$
$$y \to e^{2y}.$$

然而，映射的合成满足结合律；即对 $f: X \to Y, g: Y \to Z, h: Z \to W$，有

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

对于映射 $f: X \to Y, g: Y \to Z, h: X \to Z$，当 $h = g \circ f$，则说下列图解

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "h"] & \\ Y & & Z \arrow[ll, "g"] \end{tikzcd}$$

是可交换的．类似地，我们说图解

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ Z \arrow[r, "k"] & W \end{tikzcd}$$

是可交换的；仅当

$$g \circ f = k \circ h$$

对于两个集合 X 与 Y 和乘积 $X \times Y$，则映射

$$p_1: X \times Y \to X, \qquad p_2: X \times Y \to Y,$$
$$(x, y) \to X; \qquad (x, y) \to y.$$

分别称为 $X \times Y$ 的第一和第二投影.

如果 $f: Z \to X$ 和 $g: Z \to Y$ 是相同定义域 Z 上的两个映射，则有唯一的映射 $h: Z \to X \times Y$ 满足 $p_1 \circ h = f, p_2 \circ h = g$，亦即下列图解可交换：

$$
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "g"] & \\
Z & X\times Y \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & Y
\end{tikzcd}
$$

该映射 $h:Z\to X\times Y$ 乃由

$$h(z) = (f(z),g(z)) \quad (z \in Z)$$

所决定．

设 $f:X\to Y$ 是一个映射，对 $A\subset X$，则 f 在 A 上的全部取值的集合

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

称为 A 在 f 之下的像．特别地，f 在定义域 X 的像 $f(X)$ 即 f 的值域．另方面，对 $D\subset Y$，则在 f 之下映为 D 的那些 X 中元素的集合记为 $f^{-1}(D)$

$$f^{-1}(D) := \{x \in X \mid f(x) \in D\},$$

它称为 D 在 f 之下的逆像（或原像）应注意到除非 $y\in f(X)$，否则 $f^{-1}(y)=\varnothing$.

我们有两个包含关系

$$A \subset f^{-1}(f(A))(A \subset X);$$

$$f(f^{-1}(D)) \subset D \quad (D \subset Y);$$

但不一定成立等式．然而当 $D\subset f(X)$，则 $f(f^{-1}(D))=D$. 关于集合的并、交及余集的运算，其像与原像分别满足下列诸关系式：

$$f(A\cup B)=f(A)\cup f(B), \quad f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B),$$

$$f(A_1\backslash A_2)\supset f(A_1)\backslash f(A_2) \quad (A_1,A_2\subset X);$$

$$f^{-1}(A\cup B)=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B),$$

$$f^{-1}(A\cap B)=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B),$$

$$f^{-1}(D_1\backslash D_2)=f^{-1}(D_1)\backslash f^{-1}(D_2) \quad (D_1,D_2\subset Y)$$