中学奥赛题型精解系列丛书

# 奥赛题型精解

## 初中数学

本书主编
赵春生
丛书主编
杨林仙 卫胤风 李彩娟

赢在奥赛 赢在起点 赢在未来

全国百佳图书出版单位
百佳
中华人民共和国新闻出版总署评定

中国时代经济出版社

中学奥赛题型精解系列丛书

# 奥赛题型精解

## 初中数学

全国百佳图书出版单位 百佳 中华人民共和国新闻出版总署评定

中国时代经济出版社

图书在版编目(CIP)数据

奥赛题型精解．初中数学／赵春生主编．
—北京：中国时代经济出版社，2010.1
（中学奥赛题型精解系列丛书／杨林仙，卫胤风，李彩娟主编）
ISBN 978-7-5119-0004-3
Ⅰ.奥… Ⅱ.赵… Ⅲ.数学课－初中－解题 Ⅳ.G634
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 210154 号

书　　名：奥赛题型精解．初中数学
出 版 人：宋灵恩
作　　者：赵春生
出版发行：中国时代经济出版社
社　　址：北京市西城区车公庄大街乙 5 号鸿儒大厦 B 座
邮政编码：100044
发行热线：(010)68320825　68320484
传　　真：(010)68320634
邮购热线：(010)88361317
网　　址：www.cmepub.com.cn
电子邮箱：zgsdjj@hotmail.com
经　　销：各地新华书店
印　　刷：北京市鑫海达印刷有限公司
开　　本：880×1230　1/32
字　　数：380 千字
印　　张：12.75
版　　次：2010 年 1 月第 1 版
印　　次：2010 年 1 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5119-0004-3
定　　价：21.00 元

# 前　　言

众所周知，奥林匹克竞赛活动的宗旨，主要是激发青少年对科学的兴趣。通过竞赛达到使大多数青少年在智力上有所发展，在能力上有所提高的目标。并在普及活动的基础上，为少数优秀的青少年脱颖而出、成为优秀人才创造机遇和条件。

《中学奥赛题型精解系列》丛书的宗旨就是要激发学生学习兴趣，拓宽学生学习思路，发展学牛智力。丛书按照新教材的全部知识点和竞赛的测试范围分类编写，梳理知识点，点拨重点，突破难点，将重难点知识与竞赛中的新知识接轨，进行系统的讲解归纳。收集大量的竞赛信息，选择经典例题，整理解法，为参赛学生提供最具实战意义的试题、最系统的竞赛解题方法，使之成为最系统、最实用、最完整的竞赛用书。

本丛书既能作为中学生参加奥林匹克竞赛活动的培训与辅导用书，同时也可以作为广大中学生平时学习的参考用书。

丛书编者长期从事奥林匹克竞赛教育工作，他们有丰富的奥赛教学经验，本丛书是他们多年心血的结晶和经验的总结。由于时间仓促，难免会有不足之处，希望读者批评指正。

编　者

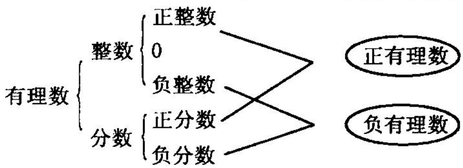
2009 年 12 月

# 目　　录

# 第一章　有理数及其运算

为表示现实生活中具有相反意义的量，引出了正与负的概念，使数的概念扩大到有理数的范围. 我国是最早出现有关正、负数的概念和运算法则的系统论述的国家. 记载于我国古代数学名著《九章算术》一书中，书中明确提出了“正负术”，这是世界上至今发现的最早、最详细的记载.

整数与分数统称为有理数，今后再谈整数应包含正整数，零与负整数；再谈分数，应包含正分数与负分数. 特别注意，零既不是正数也不是负数. 它们的关系表示如下：




## 第一节　有理数的运算

### 知识概要

有理数的运算方法灵活，技巧性强，是初中数学的重要内容. 我们除了要熟悉四则运算法则之外，还应了解：

1. 有理数的性质：

(1)有理数对加、减、乘、除四则运算具有封闭性，即有理数四则运算的结果仍是有理数；

(2)有理数具有有序性，即有理数可以比较大小；

(3)有理数具有稠密性，即任何两个不同的有理数之间存在着无限多个有理数；

(4)有理数可以写成有限小数或循环小数的形式.

2. 有理数运算中的常用技巧有：

(1)凑整法：将某些数凑成整十、整百之类的数；

(2)公式法：利用乘法公式进行运算；

(3)换元法：用字母表示数，从而达到化繁为简的目的；

(4)裂项法:将分数拆成两个分数的差.

有理数的运算技巧是非常丰富的,学生要结合具体问题,合理选择方法,从而使计算迅速而准确.

## 例题举证

**【例 1】**计算$(-1)+(-1)-(-1)\times(-1)\div(-1)$的值.

**分析**:本题包含加、减、乘、除四种运算.其中,加、减为一级运算,乘、除为二级运算,应先算乘除后算加减.

**解**:$(-1)+(-1)-(-1)\times(-1)\div(-1)$

$=(-1)+(-1)-(+1)\div(-1)$

$=(-1)+(-1)-(-1)$

$=(-2)-(-1)$

$=-1.$

**【例 2】**计算 $1-2+3-4+5-6+7-8+\cdots+4999-5000$ 的值.

**分析**:只要我们能够发现相邻两数 $1-2=-1,3-4=-1,5-6=-1,\cdots,4999-5000=-1$,就很容易计算出结果.

**解**:$1-2+3-4+5-6+7-8+\cdots+4999-5000$

$=(1-2)+(3-4)+(5-6)+(7-8)+\cdots+(4999-5000)$

$=\underbrace{(-1)+(-1)+(-1)+(-1)+\cdots+(-1)}_{2500个}$

$=-2500.$

**【例 3】**计算 $2009\times20082008-2007\times20092009$

**分析**:本题直接计算较为复杂.观察提出一个公因数,逆用乘法分配律进行计算.

**解**:$2009\times20082008-2007\times20092009$

$=2009\times2008\times1001-2007\times2009\times1001$

$=2009\times1001\times(2008-2007)$

$=2009\times1001$

$=20092009.$

**【例 4】**计算:

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{2005\times2006}.$$

**分析**:$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$

$$原式=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\frac{1}{2005}-\frac{1}{2006}$$

$$=1-\frac{1}{2006}=\frac{2005}{2006}.$$

**【例 5】**计算 $1992-\{1991-1992\times[1991-1990\times(1991-1992)^{1990}]$的值.

**分析**:以上运算按先圆括号,后方括号,最后花括号的次序;对每层括号都先算括号内的,后算括号外的;对各级运算则是先乘方,再乘除,最后算加减;没有括号的同级运算,从左至右依次进行.

**解**:原式$=1992-\{1991-1992\times[1991-1990\times(-1)^{1990}]\}$

$=1992-\{1991-1992\times[1991-1990\times1]\}$

$=1992-\{1991-1992\times[1991-1990]\}$

$=1992-\{1991-1992\times1\}$

$=1992-\{1991-1992\}$

$=1992-(-1)$

$=1992+1$

$=1993.$

**【例 6】**计算 $2+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{2009}$.

**分析**:可设 $S=2+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{2009}$ 等式两边同乘 2 得:$2S=2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{2010}$,两式相减可消去大部分项,

**解**:令 $S=2+2^2+2^3+\cdots+2^{2009}$ (1)

则 $2S=2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{2010}$ (2)

(2)-(1)得 $2S-S=2^{2010}-2$

原式$=S=2^{2010}-2$.

**【例 7】**计算 $0.0125\times3\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\times(-87.5)\div\frac{15}{16}\times\frac{16}{15}+(-2^2)-4$ 的值.

**分析**:本题含有加、减、乘、除及乘方五种运算,有小数又有分数,因此要统一化为分数进行演算,并要注意运算顺序及符号的处理.建议读者自己动手算一遍,然后再与下面的演算相对照.

**解**:$0.0125\times3\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\times(-87.5)\div\frac{15}{16}\times\frac{16}{15}+(-2^2)-4$

$=\frac{125}{10000}\times\frac{16}{5}+\frac{1}{7}\times\frac{175}{2}\times\frac{16}{15}\times\frac{16}{15}-4-4$

$=\frac{1}{80}\times\frac{16}{5}+\frac{1}{7}\times\frac{175}{2}\times\frac{16}{15}\times\frac{16}{15}-8$

$=\frac{1}{25}+\frac{8\times16}{3\times3}-8$

$=6\frac{59}{225}$

## 赛题演练

### A 组

1. 计算:$1999+\{1988-[1999-(1998-1999)]\}$.

2. 计算：$(-3)^2 \div 6 \times \frac{1}{6} + \frac{(-63) \times 36}{162}$.

3. 计算：$\left(-\frac{191919}{919191}\right) - \left(-\frac{1919}{9191}\right)$.

4. 计算：$3.825 \times \frac{1}{4} - 1.825 + 0.25 \times 3.825 + 3.825 \times \frac{1}{2}$.

5. 计算：$9+99+999+9999+99999+999999$.

## B组

1. 填数计算：

○中填入最小的正整数，△中填入最小的非负数，□中填入不小于$-5$且小于3的整数的个数，并将下式的计算结果填在右边的横线上.

(○+□)×△=________.

2. $1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+\cdots+100}=$________

3. 从集合$\{-3,-2,-1,4,5\}$中取出三个不同的数相乘，将可能得到的最大乘积填在□中，可能得到的最小乘积填在○中，并将计算结果写在等号右边的横线上.

$-(-$□$)\div$○$=$________.

4. 将自然数1,2,3,…，按图1－1排列：从1开始，右边写2然后向下转弯写3，再向左转弯写4,5，再向上，……，这样第一次转角处的数是2，第二次转角处的数为3，……，那么第20次转角处的数为________.

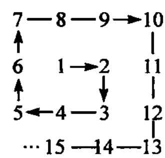



图1－1

5. 如图1－2所示，电子跳蚤每跳一步，可以从一个圆圈跳到相邻的圆圈. 现有一只红跳蚤从标有"0"的圆圈开始按顺时针方向跳1999步落在另一个圆圈内；一只黑跳蚤也从标有"0"的圆圈开始逆时针方向跳1949步落在另一个圆圈内，则这两圆圈的数字的乘积是________.

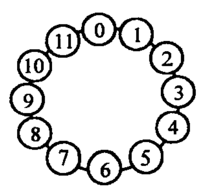



图1－2

6. 当$a=-0.2, b=0.04$时，求代数式$\frac{72}{73}(a^2-b)-\frac{71}{72}(b+a+0.16)-\frac{1}{4}(a+b)$的值.

# 第二节　绝对值

## 知识概要

绝对值是一个重要的概念，在数学上定义如下：

正数的绝对值是它本身，负数绝对值是它的相反数，零的绝对值是0. 即

$$|a|=\begin{cases}a & (a>0)\\ 0 & (a=0)\\ -a & (a<0)\end{cases}$$

从数形结合看，绝对值的几何意义是：

(1) $|a|$是数$a$对应点与原点之间的距离.

(2) $|a-b|$是数$a$的对应点与数$b$对应点之间的距离.

绝对值的常用性质：

1. 数$a$的绝对值非负，即$|a|\geqslant 0$.
2. 一个数与它的相反数的绝对值相等，即$|a|=|-a|$.
3. 两数积的绝对值等于它们绝对值的积，即$|ab|=|a|\cdot|b|$.
4. 两数商的绝对值等于它们绝对值的商. 即$\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}(b\neq 0)$.
5. 若$a,b$为有理数，则$|a|-|b|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$.

在处理与绝对值有关的问题时，要注意分类讨论，还要结合数轴去解决问题.

## 例题举证

**【例 1】**已知$\left|x-\dfrac{1}{2}\right|+(2y+1)^2=0$，求$|x^2-y^2|$的值.

**分析**：由于$\left|x-\dfrac{1}{2}\right|\geqslant 0$，$(2y+1)^2\geqslant 0$且$\left|x-\dfrac{1}{2}\right|+(2y+1)^2=0$

即非负数的和为0，则可得$x-\dfrac{1}{2}=0$，$2y+1=0$.

**解**：$\because \left|x-\dfrac{1}{2}\right|+(2y+1)^2=0$.

$\therefore x-\dfrac{1}{2}=0$，$2y+1=0$.

即$x=\dfrac{1}{2}$，$y=-\dfrac{1}{2}$

$|x^2-y^2|=\left|\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2\right|$

$=|0|=0$

【例 2】计算$\left|\frac{1}{1992}-\frac{1}{1991}\right|+\left|\frac{1}{1993}-\frac{1}{1992}\right|-\left|\frac{1}{1993}-\frac{1}{1991}\right|$.

**分析**:若先计算每个绝对值符号内的得数,计算量显然很大.由于各绝对值符号内有相同的数,所以应先去掉绝对值符号再计算,可能会方便些.

**解**:因为$\frac{1}{1992}-\frac{1}{1991}<0$,$\frac{1}{1993}-\frac{1}{1992}<0$,$\frac{1}{1993}-\frac{1}{1991}<0$,

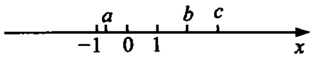
所以原式$=-\left(\frac{1}{1992}-\frac{1}{1991}\right)-\left(\frac{1}{1993}-\frac{1}{1992}\right)-\left[-\left(\frac{1}{1993}-\frac{1}{1991}\right)\right]$

$=-\frac{1}{1992}+\frac{1}{1991}-\frac{1}{1993}+\frac{1}{1992}+\frac{1}{1993}-\frac{1}{1991}$

$=0$.

【例 3】有理数 $a,b,c$ 在数轴上的位置如图所示.

化简$|a|+|b|+|a+b|+|b-c|$.




**解**:从图中可见,$a<0$,则$|a|=-a$,$b>0$,知$|b|=b$.

由$-1<a<0$,$b>1$,知$1+a>0$,$b-1>0$,

所以 $a+b=(1+a)+(b-1)>0$.

因此$|a+b|=a+b$.

又 $c>b$,则 $c-b>0$.

所以$|b-c|=c-b$.

因此$|a|+|b|+|a+b|+|b-c|$

$=(-a)+b+a+b+c-b$

$=b+c$.

【例 4】四个有理数 $a,b,c,d$ 满足$\frac{|abcd|}{abcd}=-1$,试求$\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}+\frac{|d|}{d}$的最大值.

**分析**:由$\frac{|abcd|}{abcd}=-1$ 可知 $a,b,c,d$ 中负数为奇数个,我们可以分类讨论①一负三正.②三负一正.

**解**:(1)若 $a$、$b$、$c$、$d$ 一负三正,不妨设$a<0,b>0,c>0,d>0$,则

$\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}+\frac{|d|}{d}=\frac{-a}{a}+\frac{b}{b}+\frac{c}{c}+\frac{d}{d}=(-1)+1+1+1=2$.

(2)若 $a$、$b$、$c$、$d$ 三负一正,不妨设 $a<0,b<0,c<0,d>0$,则

$\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}+\frac{|d|}{d}=\frac{-a}{a}+\frac{-b}{b}+\frac{-c}{c}+\frac{d}{d}=(-1)+(-1)+(-1)+1=-2$.

所以$\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}+\frac{|d|}{d}$的最大值是 2.

【例 5】设 $a$、$b$ 为有理数,则$-8-|a-b|$是有最大值还是最小值?其值是多少?

**解**:因为 $a,b$ 为有理数,

所以 $|a-b|\geqslant 0$.

所以，$-8-|a-b|\leqslant -8$，

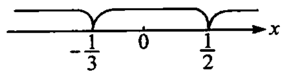
而当 $a-b=0$，即 $a=b$ 时，$-8-|a-b|=-8$，

所以，$-8-|a-b|$ 有最大值，其值为 $-8$.

**说明**：本题利用绝对值的性质 1，$|a|\geqslant 0$ 来解决问题.

**【例 6】**化简 $|3a+1|+|2a-1|$.

**分析**：解题的关键是如何去掉绝对值符号，需分别考虑 $3a+1$ 与 $2a-1$ 的正负. 化简 $|3a+1|$ 分为 $a\geqslant -\frac{1}{3}$ 与 $a<-\frac{1}{3}$ 两种情况，此时 $x=-\frac{1}{3}$ 是一个分界点. 类似地，$a=\frac{1}{2}$ 是一个分界点，为同时去掉两个绝对值符号. 我们把两个界点，$-\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{2}$ 标在数轴上，这样分类就直观化了.




**解**：(1) 当 $a<-\frac{1}{3}$ 时

原式 $=-(3a+1)-(2a-1)=-5a$

(2) 当 $-\frac{1}{3}\leqslant a<\frac{1}{2}$ 时

原式 $=(3a+1)-(2a-1)=a+2$

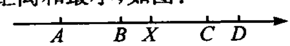
(3) 当 $a\geqslant\frac{1}{2}$ 时

原式 $=(3a+1)+(2a-1)=5a$

**【例 7】**若 $a,b,c,d$ 为有理数，且 $a<b<c<d$，求 $|x-a|+|x-b|+|x-c|+|x-d|$ 的最小值.

**分析**：此题若分类讨论，比较麻烦，若利用 $|x-a|$，$|x-b|$，$|x-c|$，$|x-d|$ 的几何意义来解题，极为简捷.

**解**：设 $a$、$b$、$c$、$d$、$x$ 在数轴上的对应点分别是 $A$、$B$、$C$、$D$、$X$ 则 $|x-a|$，$|x-b|$，$|x-c|$，$|x-d|$ 分别表示线段 $AX$，$BX$，$CX$，$DX$ 的长，原式的最小值，就是在数轴上找一点 $X$，使该点到 $A$、$B$、$C$、$D$ 四点距离和最小，如图：




所以当 $X$ 在 $B$，$C$ 之间时，距离和最小，最小值为 $AD+BC$.

即 $(d-a)+(c-b)=d-a+c-b$.

**【例 8】**已知三个有理数 $a,b,c$ 的积是负数，它们的和是正数，当 $x=\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}$ 时，试求代数式 $x^{1999}+8x+1$ 的值.

**解**：由于 $a,b,c$ 三数的积为负数，所以 $a,b,c$ 均不为 0，并且 $a,b,c$ 中只能有两正一负或三个都是负数两种可能. 但若 $a<0$，$b<0$，$c<0$，则有 $a+b+c<0$，与 $a,b,c$ 三数的

和为正数不符. 因此 $a,b,c$ 只能是一负两正. 不妨设 $a<0,b>0,c>0$，于是

$|a|=-a,|b|=b,|c|=c.$

所以 $x=\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}=\frac{-a}{a}+\frac{b}{b}+\frac{c}{c}=(-1)+1+1=1$

将 $x=1$ 代入 $x^{1999}+8x+1$ 中，得

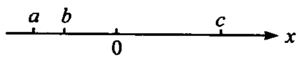
$$x^{1999}+8x+1=1^{1999}+8\times1+1=10.$$

## 赛题演练

### A 组

1. 在 $-4,-1,-2.5,-0.01$ 与 $-15$ 这五个数中，最大的数与绝对值最大的那个数的乘积是多少？

2. 有理数 $a,b,c$ 在数轴上的位置如图所示，则化简 $|a+b|+|c-a|-|b|$ 的结果是 (　　)




A. $c$　　B. $a$　　C. $c-2a$　　D. $2b-c$

3. 问□中应填入什么数时，才能使 $|1998\times\square-1998|=1998$?

4. 计算 $||||2005-2006|-2007|-2008|-2009|$

5. 若有理数 $x,y$ 满足 $2009(x+1)^2+\left|1005x+\frac{1}{2}y+1\right|=0$，求 $x^y+y^{x+2}$ 的值.

### B 组

1. 已知 $x>0,y<0,z<0$，且 $|x|>|y|,|z|>|x|$，化简 $|x+z|-|y+z|-|x+y|$.

2. 设 $\overline{abcd}$ 是一个四位数，$a,b,c,d$ 是阿拉伯数字，且 $a\leqslant b\leqslant c\leqslant d$.
试求 $|a-b|+|b-c|+|c-d|+|d-a|$ 的最大值.

3. 有理数 $a,b,c$ 均不为 0，且 $a+b+c=0$. 设 $x=\left|\frac{|a|}{b+c}+\frac{|b|}{c+a}+\frac{|c|}{a+b}\right|$，试求代数式 $x^{19}-94x+1993$ 的值.

# 第三节　整数与整除

## 知识概要

到了初中，整数概念扩充了，包括正整数、零与负整数，因此，整数整除的概念也要作相应的扩充.

$a$ 是整数，$b$ 是不等于 0 的整数，若存在一个整数 $q$，使得 $a=bq$ 成立，则称 $b$ 整除 $a$ 或 $a$ 被 $b$ 整除. 记作 $b|a$.

根据整除的定义可得整除的下列性质：

性质 1：$b|a$ 且 $c|b$ 则 $c|a$

性质 2：$k$ 为任意整数，若 $b|a$，则 $b|ka$.

性质 3：如果 $a|b, a|c$，则 $a|(b\pm c)$

性质 4：如果 $m|ab$. $(m,a)=1$，则 $m|b$.

性质 5：如果 $a|c, b|c$，且 $(a,b)=1$，则 $ab|c$.

性质 6：如果 $a|m, b|m$，则 $[a,b]|m$.

**说明**：符号 $(m,a)$ 表示 $m,a$ 两数的最大公约数.

如果 $(m,a)=1$，那么称 $m,a$ 两数互质. $[a,b]$ 表示 $a,b$ 两数的最小公倍数.

## 例题举证

**【例 1】**算式 $\dfrac{8}{华杯赛}=\dfrac{1}{新世纪}$ 寓意第 8 届华杯赛于新世纪的第 1 年举办. 新、世、纪、华、杯、赛代表 1,2,3,4,5,6,7,8,9 中的六个数字（不同的文字代表不同的数字）. 请把这个算式恢复出来.

**解析**：原式变形为 $\dfrac{华杯赛}{新世纪}=8$. 由于华杯赛最大可能是 987. 易知：新 $=1$.

由 $12\times8=96, 13\times8=104$，

可知：世 $=2$.

若　纪 $\geqslant5$，新世纪 $\times8\geqslant1000>987$，所以纪等于 4 或 3.

若　纪 $=4$，$124\times8=992$，出现华 $=$ 杯 $=9$，世 $=$ 赛 $=2$，与题设条件不符.

若　纪 $=3$，$123\times8=984$，合乎题意.

所以，题设等式恢复出来是：

$\dfrac{8}{984}=\dfrac{1}{123}$.

**【例 2】**173□是一个四位数，老师说："我在这个□中先后填入 3 个数字，所得的 3 个四位数依次被 9，11，6 整除。"问老师先后填入的数字之和是多少？

**分析**：第三次填入的数能被 6 整除，则这个四位数既能被 2 整除，又能被 3 整除.

**解**：设三次填入的数分别为 $a,b,c$，则 $6|\overline{173c}$

$\therefore 3|\overline{173c}, 2|\overline{173c}$

由 $2|\overline{173c}$ 得 $c=0,2,4,6,8$.

由 $3|\overline{173c}$ 得 $3|11+c$

$\therefore c=1,4,7$

$\therefore c=4$

由 $9|\overline{173c}$ 得 $9|11+a$，则 $a=7$

由 $11|\overline{173c}$ 得 $11|[(b+7)-(3+1)]$

即 $11|3+b$，所以 $b=8$.

于是 $a+b+c=7+8+4=19$.

故老师先后填的数字之和为 19.

**说明**：整数的整除的判别方法：

(1)被 2 整除的数的判别：末位数能被 2 整除的数必能被 2 整除；

(2)被 5 整除的数的判别：末位数能被数 0 或 5 整除的数必能被 5 整除；

(3)被 4 整除的数的判别：一个数的末两位数字组成的数能被 4 整除，则该数必能被 4 整除；

(4)被 8 整除的数的判别：一个数的末三位数字组成的数能被 8 整除，则该数必能被 8 整除；

(5)被 3 整除的数的判别：一个数的各位数字之和能被 3 整除，则这个数必能被 3 整除；

(6)被 9 整除的数的判别：一个数的各位数字之和能被 9 整除，则该数必能被 9 整除；

(7)被 11 整除的数的判别：若一个数自右至左所有偶数位上的数的和与奇数位上的数的和的差能被 11 整除，则该数必能被 11 整除；

(8)能被 7、11、13 整除的数的判别：能被 7、11、13 整除的数的特征是奇位千进位的总和与偶位千进位总和的差(或者反过来)能被 7、11、13 整除.

**【例 3】**试证 $111^{111}+112^{112}+113^{113}$ 能被 10 整除.

**分析**：只需证明 $111^{111}$，$112^{112}$，$113^{113}$ 三个数的末位数字的和为 10 即可.

**解**：显然 $111^{111}$ 的个位数字是 1.

$112^{112}=(112^4)^{28}$，因为 $112^4$ 的个位数字是 6.

所以 $112^{112}$ 的个位数字是 6.

$113^{113}=(113^4)^{28}\cdot 113$，因为 113 的个位数字是 3.

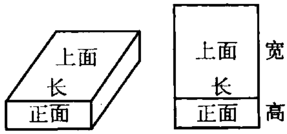
所以 $113^{113}$ 的个位数字是 3，

故 $111^{111}$，$112^{112}$，$113^{113}$ 的个位数字 1，6，3 的和为 10.

所以 $111^{111}+112^{112}+113^{113}$ 能被 10 整除.

【例 4】有一个长方体，它的正面和上面的面积之和是 209，如果它的长、宽、高都是质数，求这个长方体的体积.

**分析**：如图 1－3，长方体的正面与上面的面积之和恰等于 209.




长×(宽＋高)＝209＝11×19

↓　↓　↓　　↓　↓

质数 质数 质数　质数 质数

图 1－3

有两种可能：

(1)长＝11，宽＋高＝19；

(2)长＝19，宽＋高＝11.

由宽＋高＝奇数，易知宽、高必为一奇一偶，由于只有 2 是偶质数，19＝17＋2 合乎要求，而 11＝9＋2 不合要求(9 不是质数)，所以长＝11.

长方体的体积为 11×17×2＝374

【例 5】试证明整除性质 1：$b|a$ 且 $c|b$，则 $c|a$.

**证明**：因为 $b|a$，所以存在整数 $q_1$，使得 $a=bq_1$. ①

因为 $c|b$，所以存在整数 $q_2$，使得 $b=cq_2$. ②

②代入①得　$a=bq_1=(cq_2)q_1=c(q_2q_1)$，

根据整除的定义，有 $c|a$.

【例 6】，试证明 $7|\overline{abcabc}$.

**证明**：$\overline{abcabc}=\overline{abc}\times1000+\overline{abc}=\overline{abc}\times1001=7\times143\times\overline{abc}=7\times(143\times\overline{abc})$.

这表明，存在整数 $143\times\overline{abc}$，使得

$\overline{abcabc}=7\times(143\times\overline{abc})$　成立，

根据整除的定义，有 $7|\overline{abcabc}$.

【例 7】已知 $P$ 是大于 3 的质数，证明 $24|(P^2-1)$.

**分析**：∵$24=8\times3$，且$(8,3)=1$，

∴只要证明　$8|(P^2-1)$和 $3|(P^2-1)$即可

**证明**：先证 $3|(P^2-1)$

∵$P$ 的取值可分为三种情况：$3k$，$3k+1$，

$3k+2$($k$ 为整数)；且 $P$ 为质数.

∴$P=3k+1$ 或 $3k+2$

若 $P=3k+1$

则 $P^2-1=(3k+1)^2-1=9k^2+6k+1-1=3(3k^2+2k)$

∴$3|(P^2-1)$