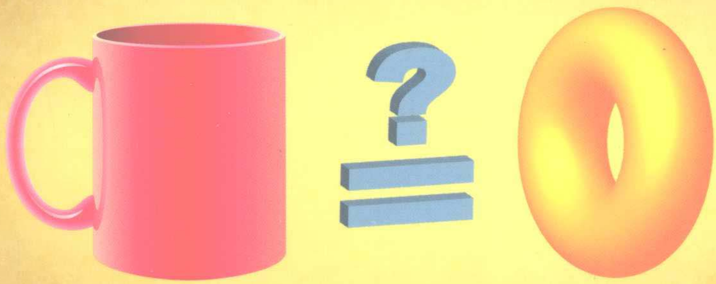
TURING 图灵数学·统计学丛书 43

Springer



Basic Topology

基础拓扑学

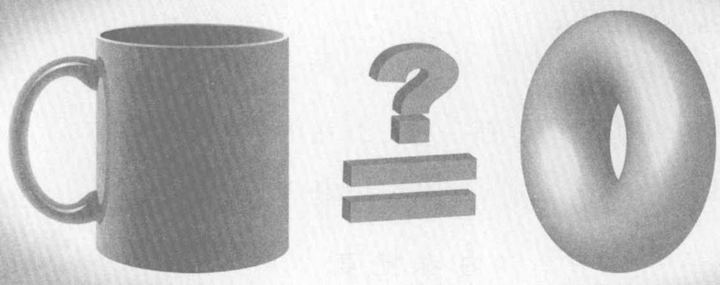
[英] M. A. Armstrong 著

孙以丰 译

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

TURING 图灵数学·统计学丛书 43

Springer



Basic Topology

基础拓扑学

[英] M. A. Armstrong 著

孙以丰 译

人民邮电出版社

北京

图书在版编目(CIP)数据

基础拓扑学/（英）阿姆斯特朗（Armstrong, M. A.）著；孙以丰译. —北京：人民邮电出版社, 2010.4
(图灵数学·统计学丛书)
书名原文：Basic Topology
ISBN 978-7-115-21886-5

Ⅰ.①基… Ⅱ.①阿… ②孙… Ⅲ.①拓扑 Ⅳ.①O189

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 221430 号

内容提要

本书是一本拓扑学入门图书，注重培养学生的几何直观能力，突出单纯同调的处理要点，并使抽象理论与具体应用保持平衡. 全书内容包括连续性、紧致性与连通性、粘合空间、基本群、单纯剖分、曲面、单纯同调、映射度与 Lefschetz 数、纽结与覆叠空间.

本书的读者对象为高等院校数学及其相关专业的学生、研究生，以及需要拓扑学知识的科技人员、教师等.

图灵数学·统计学丛书

基础拓扑学

◆ 著　[英] M. A. Armstrong
译　孙以丰
责任编辑　明永玲
◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市崇文区夕照寺街 14 号
邮编 100061　电子函件 315@ptpress.com.cn
网址 http://www.ptpress.com.cn
北京鑫正大印刷有限公司印刷
◆ 开本：700×1000 1/16
印张：13
字数：243 千字　2010 年 4 月第 1 版
印数：1－3 000 册　2010 年 4 月北京第 1 次印刷

著作权合同登记号　图字：01-2008-5817 号

ISBN 978-7-115-21886-5

定价：29.00 元

读者服务热线：(010)51095186　印装质量热线：(010) 67129223

反盗版热线：(010) 67171154

版 权 声 明

译 者 序

近年来，国外出版了许多拓扑学入门书籍，本书就是其中之一. 它的一部分内容曾经作为教材在吉林大学使用. 我认为，对于学习拓扑学课程的大学高年级学生来说，这本书确实是一本程度适当、值得推荐的参考读物.

本书作者很注意数学的美. 原文在第 1 章开头引用了英国数学家哈代的一句名言. 大意是说，只有令人产生美感的数学才可能长久流传. 这大概是作者在本书的取材和表述方面为自己立下的一条标准吧.

作者强调几何直观. 拓扑学里严谨而形式化的表述方式往往使本质的几何思想被冲淡或掩盖，这是作者所不欣赏的. 10.2 节中虚拟的一段代数学家与几何学家的对话，反映了作者的看法.

在拓扑学里，特别是涉及同调群的部分，从引进概念到主要定理的证明，中间有一个较长的准备阶段，动机不明显，而又容易使人感到太抽象. 这个过程往往使初学者扫兴. 不过基础一旦建成，就能引出多方面具体而生动的应用. 作者则力求使二者取得平衡，使形式化、抽象的论述与直观性强的内容、具体应用方面的内容有机地穿插在一起.

如果读本书时果真令人产生某种舒畅的感觉，那或许是作者按这些想法进行的编排取得了成效.

孙以丰

前　言

这是一本为大学本科生写的拓扑学，其目的有二：一是使学生能接触到点集、几何与代数拓扑学的一些技巧与应用，而又不过分深入其中任何一个领域；二是增进学生的几何想象力．拓扑学毕竟是几何学的一个分支．

阅读这本书所需要的预备知识不多：有比较扎实的实分析初步（通常都需要）、初等群论与线性代数的知识就已足够．在数学上具有一定程度的“成熟性”比事先学点儿拓扑学知识更为重要．

本书总共 10 章．第 1 章不妨看作是学习拓扑学的动员令．其他 9 章各有专题，其中粘合空间、基本群、单纯剖分、曲面、单纯同调、纽结与覆叠空间单独成章来讨论．

介绍一些来龙去脉是必需的．我认为，像这种水平的拓扑书一开始就理所当然地给出拓扑空间的一组公理，是注定要失败的．另一方面，拓扑学也不应写成如同供人消遣的杂耍节目（比如纽结与地图的染色，住宅到公用设施之间管道的布线，以及观看苍蝇从 Klein 瓶里逃出，等等）．这些东西都有它们各自的地位，但必须有机地融合在统一的数学理论中，它们本身并不是最后目的．正因为这个缘故，纽结出现在书的最末一章而不是开始．因为我们更感兴趣的不是纽结本身，而是处理纽结需要的多种多样的工具与技巧．

第 1 章从关于多面体的 Euler 定理开始，本书的主题是探索拓扑不变量及其计算技巧．按其本性拓扑不变量往往很难计算，而一些简单的数量，如 Euler 示性数的拓扑不变性，证明起来又极费事．这就使得拓扑学错综复杂．

本书取材尽量保持平衡，使理论与其应用受到同等重视．比如，同调论的建立是相当麻烦的事（用了整整一章），于是值得用一整章的篇幅讲同调论的应用．每写到一个论题总想加入更多内容以致难以做到适可而止．但为了使篇幅适度，不得不割舍有些内容．这里我要特别提到，本书没有介绍任何计算同调群的比较系统的方法．定义与证明并不总是选取那些最简捷的．因为用起来最方便的定义与结果，在初次接触时往往显得并不那么自然，而本书毕竟是一本入门读物，应该注意使初学者容易接受．

对于（英国制）大学三年级程度的学生，一学年的课程可以讲完本书的大部分内容．也可有种种方式从本书选一些论题而构成较短的课程，而本书前半部的许多内容甚至可以讲授给二年级学生．每节末尾附有习题，书末附有简短的文献介绍，

并指出哪些可以与本书平行阅读,哪些可供进一步深入之用.

本书所包含的材料可以说都是很基本的,绝大部分在别处也可见到.如果说我作了什么贡献的话,只不过是在取材与表述方面做了一些工作.

有两个论题值得特别提一下.我从 J. F. P. Hudson 那里初次学到 Alexander 多项式,E. C. Zeeman 告诉我怎样对曲面作剜补运算.特别地,Christopher Zeeman 教我拓扑学时表现出了极大的耐心.对他们三人,我衷心地表示感谢.

还要感谢 R. S. Roberts 和 L. M. Woodward 与我进行了多次有益磋商,感谢 J. Gibson 夫人快速熟练地准备了原稿,以及感谢剑桥大学出版社允许我从该社出版的 G. H. Hardy 著的《一个数学家的自白》一书中摘取一句语录置于第 1 章正文之前.最后,对我的妻子 Anne Marie 给予我的不断鼓励专诚致谢.

M. A. A.

1978 年 7 月于 Durham

目　　录

第 1 章　引　论

Beauty is the first test：*there is no permanent place in the world for ugly mathematics.*（美是首要的试金石：丑陋的数学不可能永存.）

G. H. Hardy

1.1　Euler 定理

一开始，我们来证明关于多面体的优美的 Euler 定理. 以后你将看到，这个定理及其证明是拓扑学中很多思想的根源.

图 1.1 中有 4 个多面体，看起来各不相同，但是如果我们将顶点数（v）减去棱数（e），再加上面的数目（f），则对于这 4 个多面体所得到的结果都是 2. 是不是公式 $v-e+f=2$ 对于所有的多面体都对呢？答案是否定的. 但是对于一大类有意思的多面体，这个结果总是成立的.

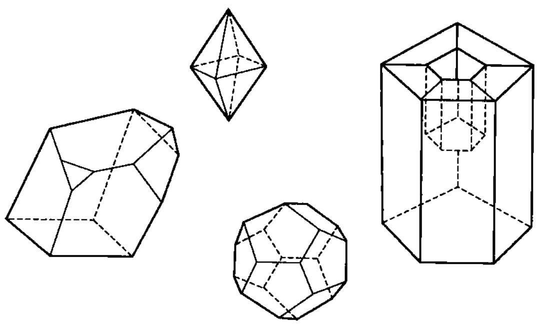
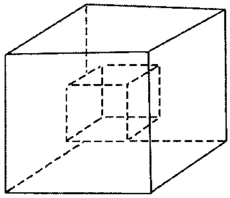


图　1.1

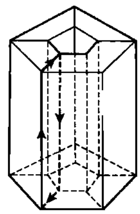
开始我们也许会倾向于只考虑正多面体，或者凸多面体，对它们来说，$v-e+f$ 确实等于 2. 但是，上面所举的例子当中有一个不是凸的，却也满足这个公式，而我们又不愿把它忽略. 为找出反例，我们要开动脑筋. 如果对图 1.2 与图 1.3 进行计算，就将分别得到 $v-e+f=4$ 以及 $v-e+f=0$. 什么地方出了问题呢？第一个图中多面体的表面分开成两块，用专业一些的语言来说就是这个表面不连通. 有理由把这种情形排除在外，因为这两块中的每一块都将使 $v-e+f$ 产生等于 2 的值. 但即使这样，也不能说明图 1.3 的情况，这时多面体的表面只有一整块. 不过这个表面有一个重要方面与前面考虑过的例子不同. 我们可以在这个表面上找到一个不

分割表面为两部分的圈. 换句话说,若设想用剪刀沿着这个圈将曲面剪开,则不至于使曲面分成两块. 在图 1.3 中用箭头标出了具有这种性质的一个圈. 我们将证明,如果多面体不具有如图 1.2 与图 1.3 所列举的缺陷,则必定满足关系 $v-e+f=2$.



空心方体

图 1.2



穿孔棱柱

图 1.3

进一步探讨前,有必要把话说得精确一些. 到现在为止(除了谈到多面体的凸性),实际上只涉及多面体的表面. 因此,“多面体”这个词将用来表示所说的表面,而不是指那些实心的立体. 因此,一个*多面体*是指按下述意义很好地拼凑在一起的有限多个平面多边形:若两个多边形相交,则它们交于一条公共边;多边形的每一条边恰好还是另一个(且只有这一个)多边形的边. 不仅如此,还要求对于每个顶点,那些含有它的多边形可以排列成 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_k$,使得 Q_i 与 Q_{i+1} 有一条公共边,$1 \leqslant i < k$,而 Q_k 与 Q_1 有一条公共边. 换句话说,这些多边形拼成围绕着该顶点的一块区域(多边形的数目 k 则可以随顶点的不同而变动). 其中最后一个条件就使两个方体只在一个公共顶点相衔接的情形排除在外了.

(1.1) Euler 定理 *设 P 为满足下列条件的多面体:*

(a) P 的任何两个顶点可以用一串棱相连接;

(b) P 上任何由直线段(不一定非是 P 的棱)构成的圈,把 P 分割成两片,则对于 P 来说,$v-e+f=2$.

公式 $v-e+f=2$ 有一段漫长而曲折的历史. 它最早出现在 1750 年 Euler 写给 Goldbach 的一封信里. 但 Euler 对所考虑的多面体没加任何限制,他的论证只适用于凸多面体的情形. 直到 60 多年以后,Lhuilier(于 1813 年)才注意到如在图 1.2 与图 1.3 中的多面体所产生的问题. 定理(1.1)的准确表述以及下面给出的证明梗概是 von Staudt 于 1847 年发表的.

证明提要 P 的一组连通的顶点与棱叫做一个*图*,连通的意思就是任意两个顶点可以用图中的一串棱连接. 更一般些,我们将用图这个字来表示三维空间内任何一组如图 1.4 那样很好地衔接起来的有限多个直线段(若两个线段相交,则交于公共顶点). 不包含任何圈的图叫做*树形*. 注意,对于一个树形来说,顶点数减去

棱数等于 1. 若以 T 来记树形,则可以写成公式

$$v(T)-e(T)=1.$$

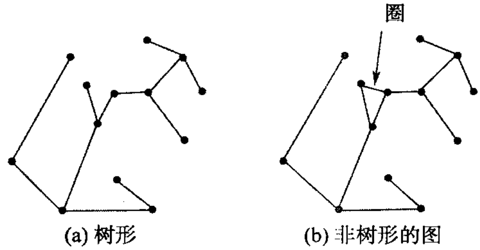


图 1.4

按假设(a),P 的全体顶点与棱构成一个图. 不难证明,在任何图中可以找到含有全体顶点的树形子图. 于是,我们选择一个树形 T,它包含 P 的某些棱,但包含 P 的全体顶点(图 1.4a 对于图 1.1 所画的一个多面体给出了这样一个树形).

然后构造 T 的一种“对偶”. 这种对偶是按下述方式定义的一个图 Γ. 相应于 P 的每个面 A,我们给出 Γ 的一个顶点 $\hat{A}$. Γ 的两个顶点 $\hat{A}$ 与 $\hat{B}$ 有一条棱相连,当且仅当它们相应的面 A 与面 B 在 P 内有一条不属于 T 的公共棱. 人们甚至可以将 Γ 在 P 上表示出来,使得它与 T 不相交(顶点 $\hat{A}$ 相当于 A 的一个内点),当然这时要允许它的棱可以有一个曲折点. 图 1.5 显示了作法.

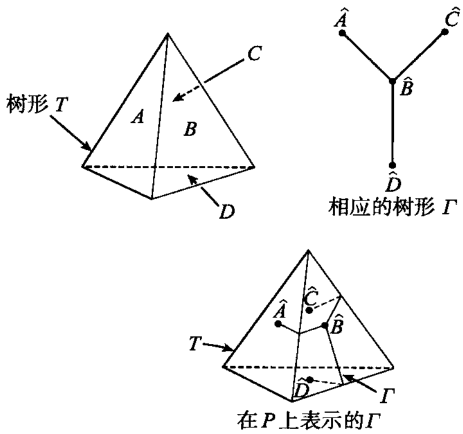


图 1.5

读者很容易相信对偶 Γ 是连通的,从而是一个图. 直观地看,如果 Γ 的某两个顶点不能用 Γ 内的一串棱相连接,则它们必然被 T 内的一个圈分开(这需要证明,我们将在第 7 章给出详细证明). 由于 T 不包含任何圈,可以推断 Γ 必然连通.

事实上，Γ 是树形. 若 Γ 内有圈，则按假设(b)，这个圈将把 P 分成两块，每一块将含有 T 的至少一个顶点. 想把分属 T 的这两块的两个顶点用一串棱相连，就不可避免地要碰上那个隔离圈，因此，这一串棱不能全在 T 内. 这就与 T 的连通性矛盾. 因此 Γ 是树形(对于像图 1.3 所示的多面体，这个证明就不成立了，因为对偶图 Γ 必定含有圈).

由于任何树形的顶点数比棱数多 1，我们有 $v(T) - e(T) = 1$，以及 $v(\Gamma) - e(\Gamma) = 1$. 于是

$$v(T) - [e(T) + e(\Gamma)] + v(\Gamma) = 2.$$

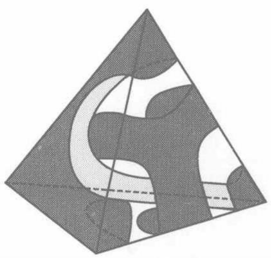
但根据构造方式

$$v(T) = v, e(T) + e(\Gamma) = e, v(\Gamma) = f.$$

这就完成了 Euler 定理的证明.

1.2 拓扑等价

Euler 定理有好几种证明. 有两点理由使我们选择了上面的证明. 首先，这个证明很精致，而其他大多数的证明是对于 P 的面数用归纳法. 其次，它给出了比 Euler 公式更多的东西. 只要稍微再多费点力气就可证明，P 是由两个盘形沿着它们的边界粘合而得到的. 为了看出这一点，将 T 与 Γ 在 P 上略微增厚(图 1.6)，得到两个不相交的盘子(将树形增厚总是得到盘形，将有圈的图增厚则得到有空洞的空间). 使这两个盘子逐步扩大直到它们的边界完全重合. 这时多面体 P 就由两个具有公共边界的盘形构成. 当然这些盘子可以是奇形怪状的，但可以把它们变形，逐步变成又圆又平的圆盘. 再回想，球面是由两个盘形(即南半球与北半球)沿着公共边界(即赤道)缝合而得到的(图 1.7). 换句话说，Euler 定理的假设告诉我们，P 在某种意义下看起来就像是变了形的球面.



在 P 上增厚的 T 与 Γ

图 1.6

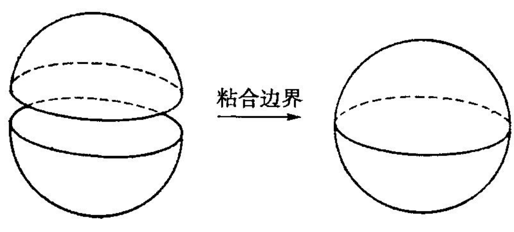


图 1.7

对于具体的多面体，当然可以很容易地建立它的点与球面的点之间明显的对

应关系. 例如，对于正四面体 T，可以从 T 的重心 $\hat{T}$ 作径向投影，把 T 映满以 $\hat{T}$ 为中心的某个球面. T 的各个面映为球面上的弯曲三角形，如图 1.8 所示. 事实上，Legendre 正是用这种方法(在 1794 年)针对凸多面体来证明 Euler 定理的，后面我们还将叙述 Legendre 的论证.

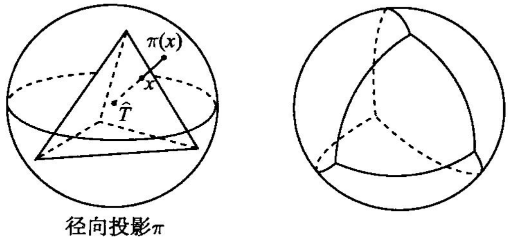


图 1.8

图 1.1 右边的多面体并不是凸的，上面的论证对它不适用. 但如果我们设想它是用橡皮做的，则不难想象怎样把它形变成一个普通的圆球. 在形变过程中可以把多面体任意拉伸、弯曲，但不允许撕裂，不允许把不同的点粘在一起. 这样所得多面体的点与球面的点之间的对应就是所谓**拓扑等价**或**同胚**的一个例子. 确切地说，就是一对一的连续满映射，并且逆映射也连续.

在 1.4 节中我们将详细地给出同胚的定义，目前为了使这个概念比较具体形象，先举出 4 个互相同胚的空间的例子(见图 1.9)：

(a)有限高度的圆柱面，去掉两端的圆周；

(b)由方程 $x^2+y^2-z^2=1$ 给出的单叶双曲面；

(c)复平面上由 $1<|z|<3$ 确定的开环形域；

(d)除去南极与北极的球面.

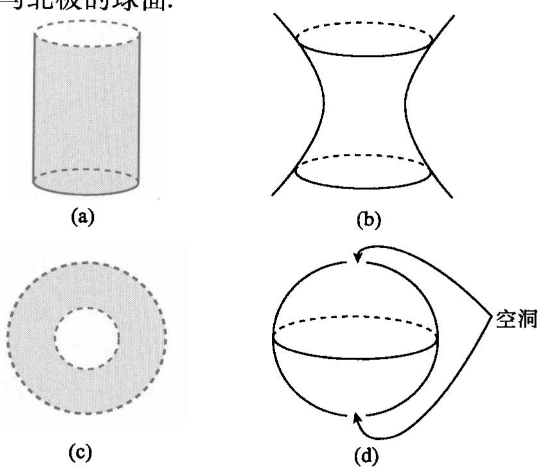


图 1.9

我们在这里给出空间(b)到空间(c)的具体的同胚(连续,一对一,满映射,并且逆映射也连续).将(b)的点用柱极坐标(r,θ,z)来刻画最方便,对于空间(c),则用平面极坐标来描述.在(b)内当$\theta=0$时,我们得到双曲线$x^2-z^2=1$的一支,设法把它好好地送到环形区域内相应的一段,即射线段$\{(x,y)\mid 1<x<3,y=0\}$.如果能对于每个θ都这样做,并且当θ从0变到2π时所作出的结果连续地依赖于θ,则将得到所需要的同胚.如以$f(x)=x/(1+|x|)+2$来定义$f:(-\infty,\infty)\to(1,3)$,则$f$是一对一连续满映射,并且有连续的逆映射.然后令双曲线的点(r,θ,z)对应于平面环形域的点$(f(z),\theta)$.

我们留给读者自己去考虑其他几种情形:注意拓扑等价显然是个等价关系,因此,只需证明空间(a)与(d)都同胚于空间(c)就够了.在拓扑学里把这4个空间看作是"同一个空间".球面上挖去3个点则不同(与上面这几个不同胚).为什么?你能描述出复平面上与球面挖去三点同胚的子空间吗?

回到Euler定理的证明,增厚树形T与Γ,使P分解成两个具有公共边界的盘形之后,把一个盘形的点对应于北半球的点,另一个对应到南半球,我们便有了一种方法来定义从多面体P到球面的同胚.相反的方向也可以论证(我们将在第7章中讨论),即证明若P拓扑等价于球面,则P满足定理(1.1)的假设(a)与(b)①,从而Euler定理对于P成立.所以,若多面体P与Q都同胚于球面,并且若把$v-e+f$叫做多面体的**Euler数**,则从以上的讨论知道P与Q有相同的Euler数,都等于2.

图1.3中的多面体却完全是另一种形状.它同胚于环面(我们也可以想象怎样把它连续地形成如图1.10b所画的环面),它的Euler数是0.对于任何其他同胚于环面的多面体计算Euler数必然得0(但这是比较难证明的,一直要等到第9章才给出证明).现在我们只差一步②就到达拓扑学里最基本的一个主要结果了.

(1.2)定理　*拓扑等价的多面体具有相同的Euler数.*

这个十分引人注目的结果是现代拓扑学的出发点.它的令人惊奇的地方在于计算多面体的Euler数时用了多面体的顶点数、棱数与面数,这些在拓扑等价之下都不是保持不变的东西.于是引起人们去寻找空间在同胚之下不改变的其他性质.

以后我们还要回到Euler数说明对于比迄今为止所考虑的多面体更广泛得多的一类空间可以定义Euler数.前面考虑的多面体只不过是有顶点、棱与面的一些具体对象,除此之外并没有使我们特别感兴趣的地方.从拓扑学的观点来看,球面就足以代表图1.1中画的所有多面体.我们的原则大体是:Euler数2不是从属于某一类多面体的,而实际上是*从属于球面的*.满足Euler定理假设的多面体(也就

① 假设(a)容易易证;假设(b)较为困难,它是著名的Jordan曲线定理的一个特殊情形.

② 只差一步是从直观数学的意义来说.若要给出严谨的证明,则还有一大段路要走.

是同胚于球面的多面体)只不过是提供了计算球面 Euler 数的一种简便的方式. 这样着重说明以后,定理(1.2)所说的就是:从看起来不同的途径计算,所得的结果是相同的. 在 9.2 节中将继续这方面的讨论.

我们用 Legendre 对于凸多面体 Euler 公式所给出的颇具匠心的证明来结束这一节. 如同图 1.8 中用径向投影将多面体映到半径为 1 的球面上. 多面体的面映为球面多边形. 若 Q 为球面 n 边形,以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 为它的角,则 Q 的面积是

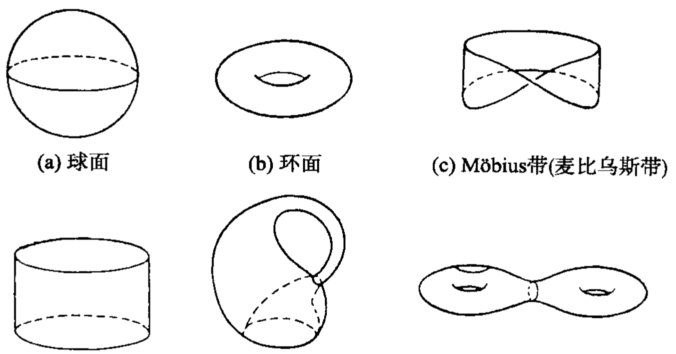
$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k-(n-2)\pi=(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k)-n\pi+2\pi.$$

从而各个球面多边形面积之和是 $2\pi v-2\pi e+2\pi f$(在每个顶点处,角度总和为 2π,所以 $2\pi v$ 包括了所有各个 α;每条棱算了两次,因为它恰好属于两个多边形;每个面贡献出 2π). 这个面积与单位球面的面积 4π 相等,从而得出结果.

1.3 曲 面

拓扑学所讨论的空间性质是空间在前面所说拓扑等价或同胚之下不改变的性质. 但什么类型的空间是我们感兴趣的,“空间”的确切含意是什么呢? 同胚的概念全靠连续性的概念来说明. 我们所说的两个空间之间的连续映射又指什么呢? 本节以及 1.4 节将回答这些问题.

先看几个有趣的空间. 搞分析的人习惯于把实数轴、复平面,甚至把单位闭区间上定义的全体连续实函数看作(度量)空间. 作为热心于几何的人,我们的兴趣更偏向于在欧氏空间内自然出现的某些有界图形. 例如,平面上的单位圆周、单位圆盘,又如图 1.10 中画的球面、环面、Möbius 带以及穿孔的双环面等曲面都是在我们所生活的三维空间内实际存在的.



(a) 球面 (b) 环面 (c) Möbius带(麦比乌斯带)

(d) 柱面 (e) Klein瓶(克莱因瓶) (f) 穿孔双环面

图 1.10

比较复杂和难以想象的是像 Klein 瓶那样的曲面. 任何企图把 Klein 瓶在三维

空间内表现出来的尝试,都必然要使曲面自己相交. 在我们所画的图 1. 10 中,曲面自己相交于一个小圆. 用一个模型来理解 Klein 瓶或许更好些. 通常用来表示环面模型的方法是取一个长方形纸片按图 1. 11 的方式粘合它的边. 若要制作 Klein 瓶,前半部分的构造完全一样,即先得出一个圆柱面,然后将圆柱面的两端按照相反的方向粘合. 为了做到这一点,需要把圆柱弯过来穿到自己里面去,如图 1. 12 所画的那样.

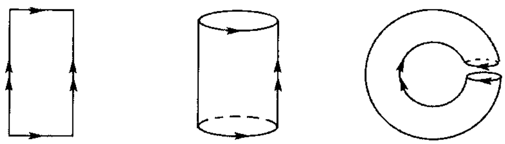


图 1. 11

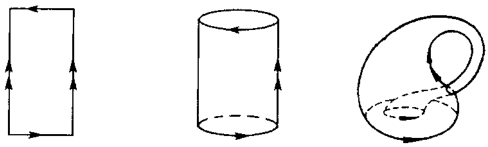
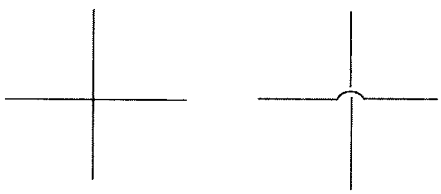


图 1. 12

在四维空间内,Klein 瓶(K)可以完全避免自己相交而表示出来. 设想垂直于纸面还有另外一个第 4 维数,并且记住纸面表示通常的 3 维空间. 在 K 的自交圆处有两个管子穿过. 现在把其中一个略微提高一些到 4 维空间中,就避开了自相交叉. 如果你觉得不好理解,可以先看下面的简单情况,或许容易想象一些:图 1. 13a 中是平面上正交的两条直线. 设想我们希望略微变动一点位置而使它们不再相交. 显然限制在平面内是做不到的. 但是,如果把垂直于纸面的第 3 维也考虑进去,在交点附近将其中一条直线顺着新添加的方向略微提高一些就消除了交点,给出如图 1. 13b 所示的两条不相交的直线.



(a) (b)

图 1. 13

依靠其在欧氏空间内的表现而介绍曲面,并不像初看起来那样令人满意. 同胚的曲面在我们看来是一样的,应当作同一个的空间来处理. 在图 1. 14 中列举了