

修正課程標準適用

# 高中甲組代數學

第三冊

編者 余介石

上海中華書局印行

民國三十六年三月十二版

修正課程標準適用

高中甲組代數學 (全四冊)

◎第三冊定價國幣七角

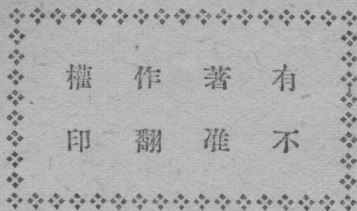
(郵運匯費另加)

編者 余介石

發行人 顧樹森  
中華書局股份有限公司代表

印刷者 上海澳門路四六九號  
中華書局永寧印刷廠

發行處 各埠中華書局



有權 著作 不准 翻印

修正課程標準適用

高中甲組代數學第三冊

目次

	頁數		頁數
<b>第十二章</b>		<b>151. 對數和記號</b> .....	10
指數及對數函數		<b>152. 對數函數的圖解</b> .....	11
<b>141. 指數意義的推廣</b> .....	1	習題六十二.....	11
<b>142. 分指數</b> .....	1	<b>153. 定位部和定值部</b> .....	12
<b>143. 零指數</b> .....	2	<b>154. 定位部求法</b> .....	12
<b>144. 負指數</b> .....	2	<b>155. 定值部求法</b> .....	13
<b>145. 廣義指數的效用</b> .....	3	<b>156. 真數對數的互求</b> .....	14
習題五十九.....	4	習題六十三.....	16
<b>146. 新指數和舊定律</b> .....	4	<b>157. 對數的特性</b> .....	16
<b>147. 無理指數</b> .....	5	<b>158. 餘對數</b> .....	17
<b>148. 指數函數的圖解</b> .....	6	<b>159. 對數的運用</b> .....	18
習題六十.....	6	<b>160. 負數的計算</b> .....	20
<b>149. 曲線上面重要的</b>		習題六十四.....	20
一段.....	6	<b>161. 圖形對數表</b> .....	23
<b>150. 計算上的應用</b> .....	8	<b>162. 對數尺、算尺</b> .....	24
習題六十一.....	10	<b>163. 換底法</b> .....	25

習題六十五	25	減等比級數	49
164. 超函數	26	習題七十	52
165. 超性方程式	26	178. 年金的計算	52
166. 複利計算題	29	179. 其他實用題	53
習題六十六	31	習題七十一	55
第十二章摘要	33	180. 二項式定理	56
第十三章		181. 二項式定理的普 通項	57
級數		182. 算學歸納法	58
167. 絛列數	34	183. 二項式定理證明	59
168. 等差級數	35	習題七十二	61
169. 等差級數的要件	35	184. 無窮連級數	62
170. 要件的關係	35	185. 二項連級數	62
171. 解答的限制	37	186. 自然對數的底 $e$	64
172. 等差中項插入法	38	習題七十三	65
習題六十七	38	187. 對數連級數	66
173. 高級等差級數	40	188. 模數的求法	66
174. 調和級數	42	189. 常用對數的求法	68
習題六十八	43	190. 補算法原理	68
175. 等比級數	44	習題七十四	69
176. 要件的關係	45	第十三章摘要	70
習題六十九	47	第十四章	
177. 無窮項絕對值遞			

## 排配分析、或然率

191. 本章研究的問題……72
192. 基本問題同原則……72
193. 求  ${}_n P_r$  法……74
194. 關於排列的問題……74  
習題七十五……75
195. 物件不盡相異的  
排列……76
196. 求  ${}_n C_r$  法……78
197. 關於配合的定理……78
198. 重複配合法……80
199. 實際的例題……81  
習題七十六……82
200. 或然率……83
201. 近真出現數……85
202. 算學的期望……85  
習題七十七……86
203. 複合或然率:乘法  
定理……87
204. 完全或然率:加法  
定理……88

習題七十八……90

205. 重複的試驗……91

206. 原因或然率……93

習題七十九……93

207. 經驗或然率……94

208. 生命年金的現價……96

209. 人壽保險費……97

習題八十……99

第十四章摘要……100

## 附表

一. 四位對數表

二. 圖形四位對數表

三. 款額 1 的複利表

四. 款額 1 的複利現價  
表

五. 款額 1 的年金表

六. 款額 1 的年金現價  
表

七. 美國經驗生沒表

八. 聚積記號數值表

中西名詞對照表

修正課程標準適用

# 高中甲組代數學

第三冊

## 第十二章

### 指數及對數函數

141. 指數意義的推廣 以前所說的指數，以正整數爲限，因爲指數是表示相等因式連乘積內因式的個數，但爲便利計算同推展理論起見，實有將指數意義推廣的必要，推廣後，指數才能一般的存在，而爲效用最宏的利器。

本書一再的說過，凡算理的推廣，都應以公律常住性爲原則，現在從正整數指數推廣到分指數，負指數，無理指數，也要使得新指數的算法，能合於§10的指數定律。

142. 分指數 就特例  $a^{\frac{1}{2}}$  說，要規定他的意義，合於同底乘法定律，應有  $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = a^1 = a$ 。可見必須規定  $a^{\frac{1}{2}}$  爲  $\sqrt{a}$  或  $-\sqrt{a}$ ，再參照主根的限制 [§9 注意二(二)]，應令  $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ 。

同理應規定  $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ .

依着這種規定,根式化約律 1-4 (§125) 便可寫做

$$\begin{aligned} 1. a^{m/n} &= a^{m \cdot \frac{1}{n}} & 3. \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m &= a^{\frac{m}{n}}. \\ 2. \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m &= \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} & 4. (ab)^{\frac{1}{n}} &= a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

可見分指數保持分數原有的性質,並且根式乘法定律和同指數乘法定律,形式一致.

【例】  $a^{6/8} = a^{3/4} = a^{12/16}$ ,  $a^{6/3} = a^2 = a^{4/2}$ .

【註】為避免虛數方根的複雜情形起見,此後遇  $a^m$  時除有特別聲明以外,總是假設  $a > 0$ .

**143. 零指數** 仍為同底乘法定律能推行無礙計,應有

$$a^0 a^m = a^{0+m} = a^m.$$

$$\therefore a^0 = a^m / a^m = 1.$$

所以應當規定  $a^0 = 1$  (參看 §17 註)

一個數的任何乘方,都與這數本身有關.只有零次乘方總是 1,不論這數是怎樣大小.這層性質,很為奇特,值得我們注意.

**144. 負指數** 由零指數的規定,並為同底乘法定律常住性起見,應該令  $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ .

如此才能使  $a^{-m} \cdot a^m = a^{-m+m} = a^0 = 1$ .

負指數如此規定以後，同底除法定律便可寫做

$$a^m \div a^n = a^{m-n}.$$

將原來的兩種情形，化成一種形式，並且這定律還可歸入同底乘法定律裏去。

又根式化約律 5，可寫做同指數乘法定律的形式

$$(ab^{-1})^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} b^{-\frac{1}{n}}.$$

145. 廣義指數的效用 根式的化約律，都可化為相當的新指數表示式，意義較為顯明，所以根式的運算，也以化為新指數再算為便。

$$\begin{aligned} \text{【例一】 } \sqrt[5]{(\sqrt{32x^{10}})^3} &= \left\{ \left[ (2^5 x^{10})^{\frac{1}{2}} \right]^3 \right\}^{\frac{1}{5}} = (2^5 x^{10})^{\frac{3}{10}} = 2^{\frac{3}{2}} x^3 \\ &= 2^{1\frac{1}{2}} x^3 = 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} x^3 = 2\sqrt{2} x^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{【例二】 } \sqrt[3]{16x^6y^6} &= (2^4 x^6 y^6)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{4}{3}} x^{\frac{5}{3}} y^{\frac{6}{3}} = 2^{1\frac{1}{3}} x^{1\frac{2}{3}} y^2 \\ &= 2xy^2 \cdot 2^{\frac{1}{3}} x^{\frac{2}{3}} = 2xy^2 \cdot \sqrt[3]{2x^2}. \end{aligned}$$

$$\text{【例三】 } \sqrt[5]{\frac{a^6 b}{4c^3}} = \left( \frac{a^6 b}{2^2 c^3} \right)^{\frac{1}{5}} = \left( \frac{2^3 a^6 b c^2}{2^6 c^6} \right)^{\frac{1}{5}} = \frac{a}{2c} \sqrt[5]{8abc^3}.$$

$$\begin{aligned} \text{【例四】 } \sqrt[3]{a^2 b^4 c^5} \cdot \sqrt{a^3 b^5 c^3} &= a^{\frac{2}{3} + \frac{3}{2}} b^{\frac{4}{3} + \frac{5}{2}} c^{\frac{5}{3} + \frac{3}{2}} = a^{\frac{13}{6}} b^{\frac{23}{6}} c^{\frac{25}{6}} \\ &= a^{2\frac{1}{6}} b^{3\frac{5}{6}} c^{4\frac{1}{6}} = a^2 b^3 c^4 \cdot \sqrt[6]{ab^5 c}. \end{aligned}$$

$$\text{【例五】 } 6\sqrt{xy} / 2\sqrt[4]{xy} = 3 \cdot x^{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} y^{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = 3x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{4}} = 3\sqrt[4]{xy}.$$

【註】上面的例子，已在 §§125—127 裏演過，可以比較。



## 習題五十九

用 §144 的方法演算習題五十四內各題。

146. 新指數和舊定律 在上面幾節裏，已可就例題內看出新指數能符合原有的指數定律。現在再來正式加以證明。

(一)  $a^m a^n = a^{m+n}$ ,  $m, n$  是任何有理數。

證 設  $p, q, r, s$  是正整數。

(1) 如  $m = p/q, n = r/s$ 。

$$\begin{aligned} a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} &= \sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[s]{a^r} && \text{(分指數定義)} \\ &= \sqrt[qs]{a^{ps}} \cdot \sqrt[qs]{a^{qr}} && (\S 125, 1; \S 127) \\ &= \sqrt[qs]{a^{ps+qr}} && \text{[指數定律(六)(一)]} \\ &= a^{\frac{ps+qr}{qs}} = a^{\frac{p}{q} + \frac{r}{s}} && \text{(分指數定義).} \end{aligned}$$

(2) 如  $m = -p/q, n = -r/s$ 。

$$a^{-\frac{p}{q}} \cdot a^{-\frac{r}{s}} = 1/a^{\frac{p}{q}} a^{\frac{r}{s}} = 1/a^{\frac{p}{q} + \frac{r}{s}} = a^{-\frac{p}{q} + (-\frac{r}{s})}.$$

(3) 如  $m = p/q, n = -r/s$ 。

$$\begin{aligned} a^{p/q} a^{-r/s} &= \sqrt[q]{a^p} / \sqrt[s]{a^r} = \sqrt[qs]{a^{ps}} / \sqrt[qs]{a^{qr}} \\ &= \sqrt[qs]{a^{ps-qr}} = a^{\frac{ps-qr}{qs}} = a^{\frac{p}{q} + (-\frac{r}{s})}. \end{aligned}$$

(4) 如  $m = -p/q, n = r/s$ 。證法同(3)。

(二)  $(a^m)^n = a^{mn}$ ,  $m, n$  是任何有理數。

證 設  $m$  爲任何有理數。

(1) 如  $n$  是正整數,

$$(a^m)^n = a^m \cdot a^m \cdots (n \text{ 個因式}) = a^{\overbrace{m+m+\cdots}^{\text{共 } n \text{ 項}}} = a^{mn}.$$

(2) 如  $n = p/q$ ,  $p, q$  是正整數,

$$(a^m)^{p/q} = \sqrt[q]{(a^m)^p} = \sqrt[q]{a^{mp}} = a^{mp/q} = a^{m \cdot \frac{p}{q}}$$

(3) 如  $n = -s$ ,  $s$  是正有理數.

$$(a^m)^{-s} = 1/(a^m)^s = 1/a^{ms} = a^{-ms} = a^{m(-s)}.$$

(三)  $(ab)^n = a^n b^n$ ,  $n$  是任何有理數.

證 (1) 如  $n = p/q$ ,  $p, q$  是正整數.

$$\begin{aligned} (ab)^{p/q} &= \sqrt[q]{(ab)^p} = \sqrt[q]{a^p b^p} = \sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[q]{b^p} \\ &= a^{p/q} b^{p/q}. \end{aligned}$$

(2) 如  $n = -s$ ,  $s$  是正有理數.

$$(ab)^{-s} = 1/(ab)^s = 1/a^s b^s = a^{-s} b^{-s}.$$

147. 無理指數 無理指數的意義,須用極限來說明.

例如  $3^{\sqrt{2}}$  便是  $3^1$ ,  $3^{1.4} = 3^{\frac{14}{10}} = \sqrt[10]{3^{14}}$ ,  
 $3^{1.41} = 3^{\frac{141}{100}} = \sqrt[100]{3^{141}}$ ,  $3^{1.414} \dots$  等值所趨的極限.

【註】就理論上說,我們應當證明這種極限的存在.

無理指數的意義既然有了規定,還可證明他們也合於指數定律.這層和上面所說的極限有無那一個問題,都要先了解極限運算,才能明

白,本書不能講到,只好作為一種假設.

### 148. 指數函數的圖解 現在取特例 $y=10^x$

來研究.

$$(-) x > 1, y > 10; 1 > x > 0,$$

$$10 > y > 1; x = 0, y = 1; 0 > x, y < 1;$$

$$x \rightarrow -\infty, y \rightarrow 0.$$

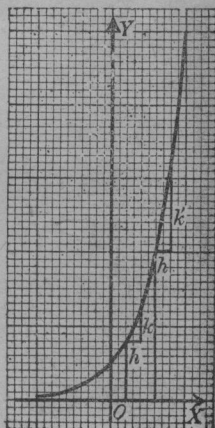
(二)  $x$  的數值增加,  $y$  的也增加,即曲線常向右上升.

(三)如  $x$  增加一個正值  $h$ ,  $y$  所增加的正值是  $k$ ,即

$$y+k=10^{x+h}=10^x \cdot 10^h,$$

$$\therefore k=10^x(10^h-1).$$

可見對於同一的  $h$  值,在  $x$  值大時,  $k$  值也大,就是說曲線在愈右的地方,上升愈快.



### 習題六十

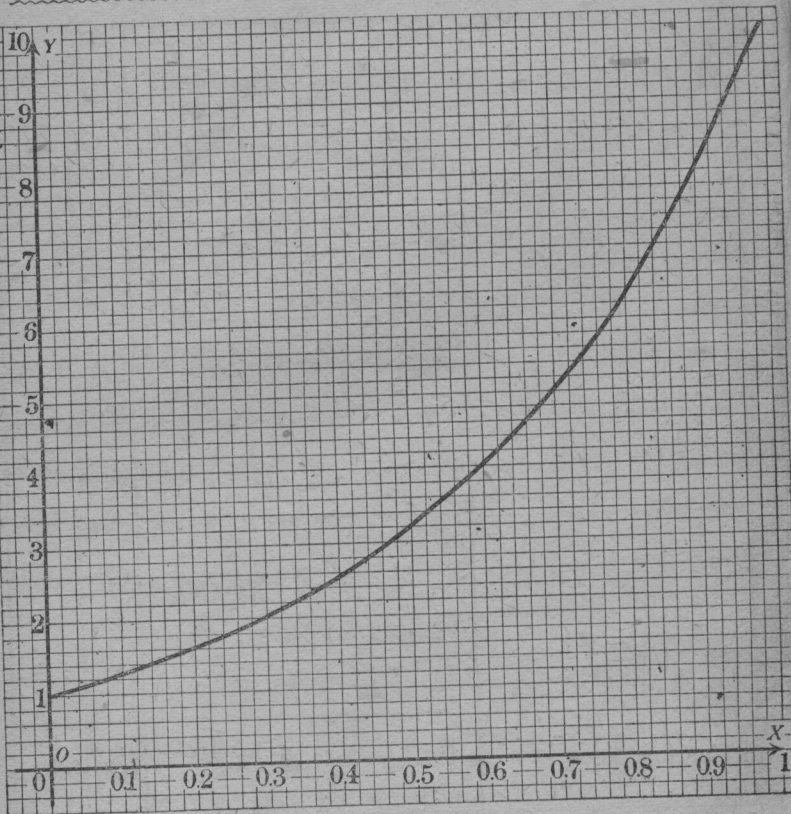
1. 如無理指數意義未定,能作指數函數的曲線麼?

2. 討論  $y=1^x$ ,  $y=\left(\frac{1}{10}\right)^x$  的圖解性質,并作略圖.

### 149. 曲線上面重要的一段 $x$ 自 0 到 1

的一段曲線,很為重要.現在算出對應值,再作圖如下:

$x$	算 法	次序	$y$
0	$10^0 = 1$		1.000
$0.0625 \left( = \frac{1}{16} \right)$	$10^{\frac{1}{16}} = \sqrt[16]{10} = \sqrt{\sqrt[8]{10}}$ $= \sqrt{1.333}$	(四)	1.154
$0.125 \left( = \frac{1}{8} \right)$	$10^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{10} = \sqrt{\sqrt[4]{10}}$ $= \sqrt{1.778}$	(三)	1.333
$0.25 \left( = \frac{1}{4} \right)$	$10^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{10} = \sqrt{\sqrt{10}}$ $= \sqrt{3.162}$	(二)	1.778
$0.375 \left( = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right)$	$10^{\frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = 10^{\frac{1}{4}} \cdot 10^{\frac{1}{8}}$ $= 1.778 \times 1.333$	(四)	2.37
$0.5 \left( = \frac{1}{2} \right)$	$10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$	(一)	3.162
$0.75 \left( = \frac{3}{4} \right)$	$10^{\frac{3}{4}} = (\sqrt[4]{10})^3 = (1.778)^3$	(四)	5.62
$0.8125 \left( = \frac{3}{4} + \frac{1}{16} \right)$	$10^{\frac{3}{4} + \frac{1}{16}} = 10^{\frac{3}{4}} \cdot 10^{\frac{1}{16}}$ $= 5.62 \times 1.154$	(五)	6.49
$0.875 \left( = \frac{3}{4} + \frac{1}{8} \right)$	$10^{\frac{3}{4} + \frac{1}{8}} = 10^{\frac{3}{4}} \cdot 10^{\frac{1}{8}}$ $= 5.62 \times 1.333$	(五)	7.49
$0.9375 \left( = \frac{3}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \right)$	$10^{\frac{3}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}} = 10^{\frac{3}{4} + \frac{1}{8}} \cdot 10^{\frac{1}{16}}$ $= 7.49 \times 1.154$	(六)	8.65



從上圖又可讀出各組相當值如下：

$x$	0	0.30	0.48	0.60 <sup>+</sup>	0.70 <sup>-</sup>	0.78	0.85	0.90 <sup>+</sup>	0.95	1
$y$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

就是已知  $y$  的值，也可讀出相當的  $x$  值來。

**150. 計算上的應用** 上節所列的圖解，對於計算問題，有許多應用，舉例如下：

【例一】求  $240 \times 0.35$ .

【解】  $240 = 10^2 \times 2.4$ ,  $0.35 = 10^{-1} \times 3.5$ .

又由圖解讀得  $2.4 = 10^{.38}$ ,  $3.5 = 10^{.54}$ ;

即  $240 = 10^2 \times 10^{.38} = 10^{2.38}$ ,  $0.35 = 10^{-1} \times 10^{.54} = 10^{-1+.54}$ .

$\therefore 240 \times 0.35 = 10^{2.38+(-1)+.54} = 10^{1.92} = 10 \cdot 10^{.92}$ .

再由圖解讀得  $10^{.92} = 8.4$ ,

所以  $240 \times 0.35 = 10 \times 8.4 = 84$ .

【例二】求  $0.047 \div 58$ .

【解】  $0.047 = 10^{-2} \times 4.7 = 10^{-2+.67}$ ,  $58 = 10^1 \times 5.8 = 10^{1.76}$

$\therefore 0.047 \div 58 = 10^{-2+.67} \div 10^{1.76} = 10^{-2+.67-1.76}$

$= 10^{-3.09} = 10^{-4+.91} = 10^{-4} \cdot 10^{.91}$

$= 10^{-4} \times 8.2 = 0.00082$ .

【例三】求  $(3.8)^3$ .

【解】  $(3.8)^3 = (10^{.58})^3 = 10^{3 \times .58} = 10^{1.74} = 10 \times 10^{.74}$

$= 10 \times 5.5 = 55$ .

【例四】求  $\sqrt[5]{490}$ .

【解】  $\sqrt[5]{490} = (100 \times 4.9)^{\frac{1}{5}} = (10^2 \times 10^{.69})^{\frac{1}{5}} = 10^{2.69 \div 5}$

$= 10^{.54} = .35$ .

用這法計算的答數,當然是近似值.由圖解讀出的指數,只能到小數兩位,結果只有到兩位

有效數字,不能精密.

### 習題六十一

用上節的方法計算下列各題:

1.  $3800 \times 5.4$ ,      2.  $76 \div 0.015$ ,      3.  $0.05 \div 0.68$ .

4.  $(0.95)^3$ ,      5.  $(1.1)^2$ ,      6.  $\sqrt[3]{30}$ .

7.  $\sqrt[3]{300}$ ,      8.  $\frac{(3.2)^2 \times 0.6}{5.7}$ ,      9.  $\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$ .

**151. 對數和記號** 就上節看來,可知如能將一數化成10的乘方,則在計算上有極大的便利,即是能“以加代乘,以減代除,以乘代冪,以除代開方.”利用指數函數圖解來求,嫌結果不能精密.如將這些一對一對的相當值,用無窮連級數算出(見下章),列成一表,以代圖解,可使結果的準確,合於需要.這表就是對數表.

定義: 等式  $y = a^x$

裏( $a > 0$ 且 $\neq 1$ ), $a$ 叫做底, $x$ 叫做 $y$ 的 $a$ 底對數, $y$ 叫做 $x$ 的真數.這種關係,也可寫做 $x = \log_a y$ .

為計算上應用起見,宜於以10做底.10底對數叫做常用對數.以後所說的對數,皆是這種,符號也可省寫為 $\log y$ ,底數10略去不記.

【例】 $240 = 10^{2.38}$ , 即 $\log 240 = 2.38$ .

【註】任何正數，都有一實對數，就是說，任何正數，都可化爲10的乘方數，這理須用極限證明，本書不能講到。

正有理數的對數，多是無理數，例如  $\log 2$  便是。

假若  $\log 2 = \frac{m}{n}$ ，  $m, n$  是互質的整數。

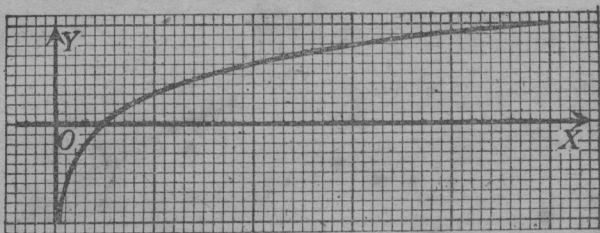
則  $2 = 10^{\frac{m}{n}}$ ，  $2^n = 10^m = 2^m \cdot 5^m$ 。

式中右邊的質因數 5，是左邊所無的，所以這等式決不能成立。（§36 定理三推論一）。

152. 對數函數的圖解 設  $y = \log x$ ，

則  $x = 10^y$ 。

可見如在指數函數圖解裏，將  $x$  軸和  $y$  軸對調，便得對數函數的圖解了。



【註】就圖可知負數沒有實對數（參看 §4 註三）。

### 習題六十二

1. 如  $3^x = 81$ ，  $x = ?$  又  $\log_3 81 = ?$
2. 如  $2^3 = x$ ，  $x = ?$  又如  $\log_2 x = 3$ ，  $x = ?$
3. 如  $x^4 = 16$ ，  $x = ?$  又如  $\log_x 16 = 4$ ，  $x = ?$



4. 求  $\log a$ , 已知 (1)  $\sqrt{a} = \sqrt{10} \cdot 10^p$ ; (2)  $\frac{a}{10^3} = (10^p)^{\frac{2}{3}} 10^{\frac{q}{3}}$ .

153. 定位部和定值部 設已知

$$3.162 = 10^{\frac{1}{2}} = 10^{.5},$$

則  $31.62 = 10 \times 3.162 = 10^{1.5},$

$$316.2 = 10^{2.5}, \quad \dots\dots,$$

$$0.3162 = 10^{-1} \times 3.162 = 10^{-1+.5},$$

$$0.03162 = 10^{-2+.5}, \quad \dots\dots.$$

用對數的符號表出,就是

$$\log 3.162 = .5, \quad \log 31.62 = 1.5, \quad \log 316.2 = 2.5, \dots\dots,$$

$$\log 0.3162 = -1 + .5, \quad \log 0.03162 = -2 + .5, \dots\dots.$$

可見一數進位或退位所得各數,他們的對數,小數部相同,整數部互異.所以整數部可定真數的位,小數部可定真數各位的值,因此對數的整數部,便叫做定位部,小數部叫做定值部.

154. 定位部求法 一個數的對數的定位部,由這數的位數便可定出,法則如下:

設  $a$  的第一位有效數字,在  $n$  位上(以個位爲零位,向左依次推去,位數爲正;向右推去,位數爲負),則他的對數定位部是  $n$ .

【例】  $a = 304.2, \quad n = 2, \quad \therefore$  定位部  $= 2$ .