修正課程標準適用

高中甲組代數學

第三冊

編者　余介石

上海中華書局印行

民國三十六年三月十二版

修正課程標準適用
高中甲組代數學（全四冊）
◎第三冊定價國幣七角
（郵運匯費另加）

編者 余介石
發行人 中華書局股份有限公司代表 顧樹森
印刷者 上海澳門路四六九號 中華書局永寧印刷廠
發行處 各埠中華書局

（一一一五三）

修正課程標準適用

高中甲組代數學第三冊

目次

第十三章

級數

第十四章

附　表

修正課程標準適用

高中甲組代數學

第三册

第十二章

指數及對數函數

141. <u>指數意義的推廣</u>　以前所說的指數,以正整數爲限,因爲指數是表示相等因式連乘積內因式的個數.但爲便利計算同推展理論起見,實有將指數意義推廣的必要.推廣後,指數才能一般的存在,而爲效用最宏的利器.

本書一再的說過,凡算理的推廣,都應以公律常住性爲原則.現在從正整數指數推廣到分指數、負指數、無理指數,也要使得新指數的算法,能合於§10的指數定律.

142. <u>分指數</u>　就特例$a^{\frac{1}{2}}$說,要規定他的意義,合於同底乘法定律,應有$a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=a^1=a$.可見必須規定$a^{\frac{1}{2}}$爲$\sqrt{a}$或$-\sqrt{a}$,再參照主根的限制〔§9注意二(二)〕,應令$a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$.

同理應規定　　$a^{m/n}=\sqrt[n]{a^m}$.

依着這種規定,根式化約律 1—4(§125)便可寫做

$$1.\ a^{m/n}=a^{mk/nk}.\qquad 3.\ \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}}=a^{\frac{1}{mn}}.$$

$$2.\ \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m=\left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}.\qquad 4.\ \left(ab\right)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{1}{n}}.$$

可見分指數保持分數原有的性質,并且根式乘法定律和同指數乘法定律,形式一致.

【例】$a^{6/8}=a^{3/4}=a^{12/16}$, $a^{6/3}=a^2=a^{4/2}$.

【註】爲避免虛數方根的複雜情形起見,此後遇a^m時,除有特別聲明以外,總是假設 $a>0$.

143. <u>零指數</u>　仍爲同底乘法定律能推行無礙計,應有　　$a^0a^m=a^{0+m}=a^m$.

$\therefore$　　$a^0=a^m/a^m=1$.

所以應當規定　　$\mathbf{a^0=1}$　　(參看§17註).

一個數的任何乘方,都與這數本身有關.只有零次乘方總是1,不論這數是怎樣大小.這層性質,很爲奇特,值得我們注意.

144. <u>負指數</u>　由零指數的規定,并爲同底乘法定律常住性起見,應該令 $a^{-m}=\dfrac{1}{a^m}$.

如此才能使　　$a^{-m}\cdot a^m=a^{-m+m}=a^0=1$.

負指數如此規定以後,同底除法定律便可寫做 $$a^m \div a^n = a^{m-n}.$$
將原來的兩種情形,化成一種形式,并且這定律還可歸入同底乘法定律裏去.

又根式化約律 5,可寫做同指數乘法定律的形式 $$\left(ab^{-1}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} b^{-\frac{1}{n}}.$$

145. 廣義指數的效用　根式的化約律,都可化爲相當的新指數表示式,意義較爲顯明,所以根式的運算,也以化爲新指數再算爲便.

【例一】$\sqrt[5]{(\sqrt{32x^{10}})^3} = \left\{\left[(2^5x^{10})^{\frac{1}{2}}\right]^3\right\}^{\frac{1}{5}} = (2^5x^{10})^{\frac{3}{10}} = 2^{\frac{3}{2}}x^3$

$= 2^{1\frac{1}{2}}x^3 = 2\cdot 2^{\frac{1}{2}}x^3 = 2\sqrt{2}\,x^3.$

【例二】$\sqrt[3]{16x^5y^6} = (2^4x^5y^6)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{4}{3}}x^{\frac{5}{3}}y^{\frac{6}{3}} = 2^{1\frac{1}{3}}x^{1\frac{2}{3}}y^2$

$= 2xy^2\cdot 2^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}} = 2xy^2\cdot\sqrt[3]{2x^2}.$

【例三】$\sqrt[5]{\dfrac{a^6b}{4c^3}} = \left(\dfrac{a^6b}{2^2c^3}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(\dfrac{2^3a^6bc^2}{2^5c^5}\right)^{\frac{1}{5}} = \dfrac{a}{2c}\sqrt[5]{8abc^2}.$

【例四】$\sqrt[3]{a^2b^4c^8}\cdot\sqrt{a^3b^5c^3} = a^{\frac{2}{3}+\frac{3}{2}}b^{\frac{4}{3}+\frac{5}{2}}c^{\frac{8}{3}+\frac{3}{2}} = a^{\frac{13}{6}}b^{\frac{23}{6}}c^{\frac{25}{6}}$

$= a^{2\frac{1}{6}}b^{3\frac{5}{6}}c^{4\frac{1}{6}} = a^2b^3c^4\cdot\sqrt[6]{ab^5c}.$

【例五】$6\sqrt{xy}/2\sqrt[4]{xy} = 3\cdot x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} = 3x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}} = 3\sqrt[4]{xy}.$

【註】上面的例子,已在§§125—127裏演過,可以比較.

習題五十九

用§144的方法演算習題五十四內各題.

146. 新指數和舊定律　在上面幾節裏,已可就例題內看出新指數能符合原有的指數定律.現在再來正式加以證明.

(一)　$a^m a^n = a^{m+n}$, m、n 是任何有理數.

證　設 p、q、r、s 是正整數.

(1) 如　$m = p/q$,　$n = r/s$.

$$a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[s]{a^r} \qquad \text{(分指數定義)}$$

$$= \sqrt[qs]{a^{ps}} \cdot \sqrt[qs]{a^{qr}} \qquad (\S125,1;\S127)$$

$$= \sqrt[qs]{a^{ps+qr}} \qquad \text{〔指數定律(六)(一)〕}$$

$$= a^{\frac{ps+qr}{qs}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}} \qquad \text{(分指數定義).}$$

(2) 如　$m = -p/q$,　$n = -r/s$.

$$a^{-\frac{p}{q}} \cdot a^{-\frac{r}{s}} = 1/a^{\frac{p}{q}} a^{\frac{r}{s}} = 1/a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}} = a^{-\frac{p}{q}+\left(-\frac{r}{s}\right)}.$$

(3) 如　$m = p/q$,　$n = -r/s$.

$$a^{p/q} a^{-r/s} = \sqrt[q]{a^p} / \sqrt[s]{a^r} = \sqrt[qs]{a^{ps}} / \sqrt[qs]{a^{qr}}$$

$$= \sqrt[qs]{a^{ps-qr}} = a^{\frac{ps-qr}{qs}} = a^{\frac{p}{q}+\left(-\frac{r}{s}\right)}.$$

(4) 如　$m = -p/q$,　$n = r/s$.　證法同(3).

(二)　$(a^m)^n = a^{mn}$,　m、n 是任何有理數.

證　設 m 爲任何有理數.

(1) 如　n 是正整數,

$$(a^m)^n=a^m\cdot a^m\cdots\text{(n 個因式)}=a^{m+m+\cdots\text{共n項}}=a^{mn}.$$

(2) 如　$n=p/q$, p、q 是正整數,

$$(a^m)^{p/q}=\sqrt[q]{(a^m)^p}=\sqrt[q]{a^{mp}}=a^{mp/q}=a^{m\cdot\frac{p}{q}}$$

(3) 如　$n=-s$, s 是正有理數.

$$(a^m)^{-s}=1/(a^m)^s=1/a^{ms}=a^{-ms}=a^{m(-s)}.$$

(三)　$(ab)^n=a^nb^n$, n 是任何有理數.

證　(1) 如　$n=p/q$, p、q 是正整數.

$$(ab)^{p/q}=\sqrt[q]{(ab)^p}=\sqrt[q]{a^pb^p}=\sqrt[q]{a^p}\cdot\sqrt[q]{b^p}$$
$$=a^{p/q}b^{p/q}.$$

(2) 如　$n=-s$, s 是正有理數.

$$(ab)^{-s}=1/(ab)^s=1/a^sb^s=a^{-s}b^{-s}.$$

147. <u>無理指數</u>　無理指數的意義,須用極限來說明.

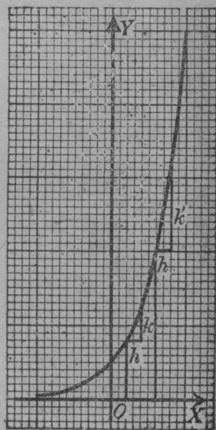
例如　$3^{\sqrt{2}}$ 便是 3^1, $3^{1.4}=3^{\frac{14}{10}}=\sqrt[10]{3^{14}}$, $3^{1.41}=3^{\frac{141}{100}}=\sqrt[100]{3^{141}}$, $3^{1.414}\cdots$ 等值所趨的極限.

【註】就理論上說,我們應當證明這種極限的存在.

無理指數的意義既然有了規定,還可證明他們也合於指數定律.這層和上面所說的極限有無那一個問題,都要先了解極限運算,才能明

白,本書不能講到,只好作爲一種假設.

148. 指數函數的圖解　現在取特例 $y=10^x$ 來研究.



(一) $x>1,\ y>10;\ 1>x>0,\ 10>y>1;\ x=0,\ y=1;\ 0>x,\ y<1;\ x\to-\infty,\ y\to 0.$

(二) x 的數值增加,y 的也增加,即曲線常向右上升.

(三)如 x 增加一個正值 h, y 所增加的正值是 k, 即

$$y+k=10^{x+h}=10^x\cdot 10^h,$$

$$\therefore\qquad k=10^x(10^h-1).$$

可見對於同一的 h 值,在 x 值大時, k 值也大,就是說曲線在愈右的地方,上升愈快.

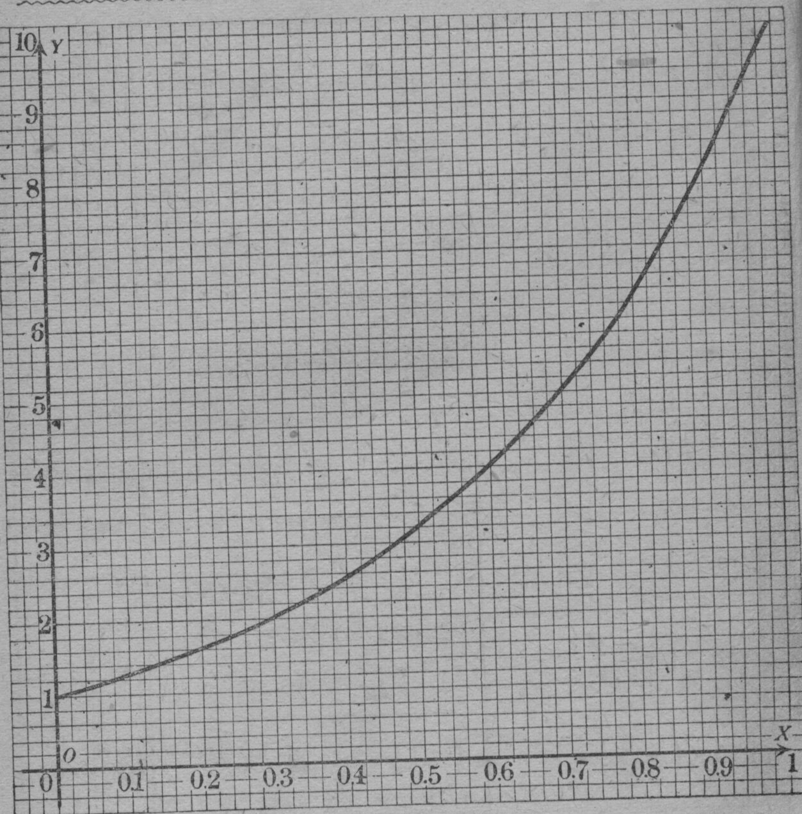
習題六十

1. 如無理指數意義未定,能作指數函數的曲線麼?

2. 討論 $y=1^x$, $y=\left(\frac{1}{10}\right)^x$ 的圖解性質,幷作略圖.

149. 曲線上面重要的一段　x 自 0 到 1 的一段曲線,很爲重要.現在算出對應值,再作圖如下:

x	算　　法	次序	y
0	$10^0=1$		1.000
$0.0625\left(=\frac{1}{16}\right)$	$10^{\frac{1}{16}}=\sqrt[16]{10}=\sqrt{\sqrt[8]{10}}$ $=\sqrt{1.333}$	(四)	1.154
$0.125\ \left(=\frac{1}{8}\right)$	$10^{\frac{1}{8}}=\sqrt[8]{10}=\sqrt{\sqrt[4]{10}}$ $=\sqrt{1.778}$	(三)	1.333
$0.25\ \left(=\frac{1}{4}\right)$	$10^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{10}=\sqrt{\sqrt{10}}$ $=\sqrt{3.162}$	(二)	1.778
$0.375\ \left(=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)$	$10^{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}=10^{\frac{1}{4}}\cdot 10^{\frac{1}{8}}$ $=1.778\times 1.333$	(四)	2.37
$0.5\ \left(=\frac{1}{2}\right)$	$10^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10}$	(一)	3.162
$0.75\ \left(=\frac{3}{4}\right)$	$10^{\frac{3}{4}}=(\sqrt[4]{10})^3=(1.778)^3$	(四)	5.62
$0.8125\left(=\frac{3}{4}+\frac{1}{16}\right)$	$10^{\frac{3}{4}+\frac{1}{16}}=10^{\frac{3}{4}}\cdot 10^{\frac{1}{16}}$ $=5.62\times 1.154$	(五)	6.49
$0.875\ \left(=\frac{3}{4}+\frac{1}{8}\right)$	$10^{\frac{3}{4}+\frac{1}{8}}=10^{\frac{3}{4}}\cdot 10^{\frac{1}{8}}$ $=5.62\times 1.333$	(五)	7.49
$0.9375\left(=\frac{3}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right)$	$10^{\frac{3}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}}=10^{\frac{3}{4}+\frac{1}{8}}\cdot 10^{\frac{1}{16}}$ $=7.49\times 1.154$	(六)	8.65



從上圖又可讀出各組相當值如下:

x	0	0.30	0.48	0.60^+	0.70^-	0.78	0.85	0.90^+	0.95	1
y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

就是已知 y 的值,也可讀出相當的 x 值來.

150. <u>計算上的應用</u> 上節所列的圖解,對於計算問題,有許多應用,舉例如下:

【例一】求240×0.35.

【解】$240=10^2\times 2.4$,　$0.35=10^{-1}\times 3.5$.

又由圖解讀得　$2.4=10^{.38}$,　$3.5=10^{.54}$;

即　$240=10^2\times 10^{.38}=10^{2.38}$, $0.35=10^{-1}\times 10^{.54}=10^{-1+.54}$.

$\therefore$　$240\times 0.35=10^{2.38+(-1)+.54}=10^{1.92}=10\cdot 10^{.92}$.

再由圖解讀得　$10^{.92}=8.4$,

所以　$240\times 0.35=10\times 8.4=84$.

【例二】求$0.047\div 58$.

【解】$0.047=10^{-2}\times 4.7=10^{-2+.67}$,　$58=10^1\times 5.8=10^{1.76}$

$\therefore$　$0.047\div 58=10^{-2+.67}\div 10^{1.76}=10^{-2+.67-1.76}$

$$=10^{-3.09}=10^{-4+.91}=10^{-4}\cdot 10^{.91}$$

$$=10^{-4}\times 8.2=0.00082.$$

【例三】求$(3.8)^3$.

【解】$(3.8)^3=(10^{.58})^3=10^{3\times 0.58}=10^{1.74}=10\times 10^{.74}$

$$=10\times 5.5=55.$$

【例四】求$\sqrt[5]{490}$.

【解】$\sqrt[5]{490}=(100\times 4.9)^{\frac{1}{5}}=(10^2\times 10^{.69})^{\frac{1}{5}}=10^{2.69\div 5}$

$$=10^{.54}=.35.$$

用這法計算的答數,當然是近似值.由圖解讀出的指數,只能到小數兩位,結果只有到兩位

有效數字,不能精密.

習題六十一

用上節的方法計算下列各題:

1. 3800×5.4. 2. $76\div0.015$. 3. $0.05\div0.68$.

4. $(0.95)^3$. 5. $(1.1)^2$. 6. $\sqrt[3]{30}$.

7. $\sqrt[3]{300}$. 8. $\dfrac{(3.2)^2\times0.6}{5.7}$. 9. $\sqrt[4]{\dfrac{2}{3}}$.

151. 對數和記號 就上節看來,可知如能將一數化成10的乘方,則在計算上有極大的便利,卽是能"**以加代乘,以減代除,以乘代冪,以除代開方.**"利用指數函數圖解來求,嫌結果不能精密.如將這些一對一對的相當值,用無窮連級數算出(見下章),列成一表,以代圖解,可使結果的準確,合於需要.這表就是對數表.

定義: 等式 $y=a^x$

裏($a>0$且$\neq1$),a叫做底,x叫做y的a底對數,y叫做x的眞數.這種關係,也可寫做$x=log_a y$.

爲計算上應用起見,宜於以10做底.10底對數叫做常用對數.以後所說的對數,皆是這種,符號也可省寫爲$logy$,底數10略去不記.

【例】$240=10^{2.38}$, 卽$log240=2.38$.

【註】任何正數,都有一實對數;就是說,任何正數,都可化爲10的乘方數.這理須用極限證明,本書不能講到.

正有理數的對數,多是無理數,例如 $log2$ 便是.

假若　$log2=\frac{m}{n}$,　m、n 是互質的整數.

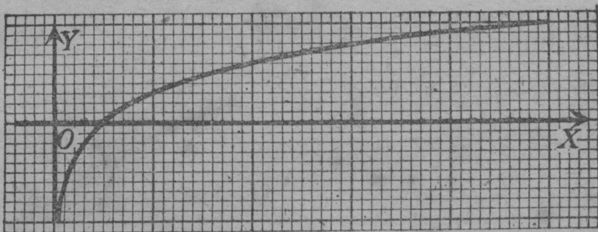
則　$2=10^{\frac{m}{n}}$,　$2^n=10^m=2^m\cdot5^m$.

式中右邊的質因數 5,是左邊所無的,所以這等式決不能成立.(§36 定理三推論一).

152. 對數函數的圖解　設　$y=logx$,

則　$x=10^y$.

可見如在指數函數圖解裏,將 x 軸和 y 軸對調,便得對數函數的圖解了.



【註】就圖可知負數沒有實對數(參看 §4 註三).

習題六十二

1. 如 $3^x=81$,　$x=?$　又 $log_3 81=?$

2. 如 $2^3=x$,　$x=?$　又如 $log_2 x=3$,　$x=?$

3. 如 $x^4=16$,　$x=?$　又如 $log_x 16=4$,　$x=?$

(天)

4. 求 $\log a$, 已知 (1) $\sqrt{a}=\sqrt{10}\cdot 10^{p}$; (2) $\frac{a}{10^{3}}=(10^{p})^{\frac{2}{3}}10^{\frac{q}{3}}$.

153. 定位部和定值部　設已知

$$3.162=10^{\frac{1}{2}}=10^{.5},$$

則

$$31.62=10\times 3.162=10^{1.5},$$

$$316.2=10^{2.5},\qquad \cdots\cdots,$$

$$0.3162=10^{-1}\times 3.162=10^{-1+.5},$$

$$0.03162=10^{-2+.5},\qquad \cdots\cdots.$$

用對數的符號表出,就是

$$\log 3.162=.5,\ \log 31.62=1.5,\ \log 316.2=2.5,\cdots\cdots,$$

$$\log 0.3162=-1+.5,\quad \log 0.03162=-2+.5,\cdots\cdots.$$

可見一數進位或退位所得各數,他們的對數,小數部相同,整數部互異.所以整數部可定眞數的位,小數部可定眞數各位的值,因此對數的整數部,便叫做**定位部**,小數部叫做**定值部**.

154. 定位部求法　一個數的對數的定位部,由這數的位數便可定出,法則如下:

設 a 的第一位有效數字在 n 位上(以個位爲零位,向左依次推去,位數爲正;向右推去,位數爲負), 則他的對數定位部是 n.

【例】$a=304.2$,　　$n=2$,　　$\therefore$ 定位部 $=2$.