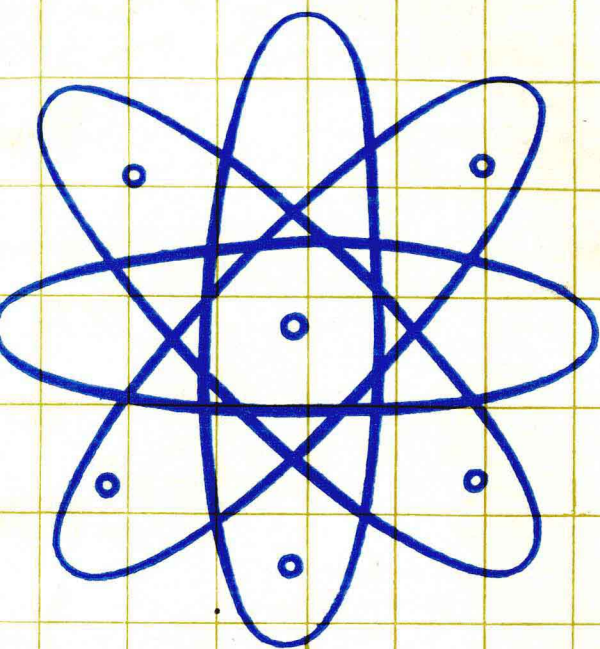


小学教师文库



几何初步知识教学

华昌年 胡 琛

江苏人民出版社



XIAOXUEJIAOSHIWENKU

几何初步知识教学

华昌年 胡 琛

江苏人民出版社

内 容 提 要

本书按《全日制十年制学校小学数学教学大纲》(试行草案)和统编小学数学课本的要求编写。全书有五个部分,一个附录。一、二部分总论小学几何初步知识教学的目的要求、内容安排、教学原则以及几何教学中的若干基本问题;三、四、五部分系统分述各简单几何平面图形和简单立体图形的认识,并着重研究这些简单图形的教学方法和教学设想。附录介绍了我国古代数学家有关“圆周率”的创造发明和拟柱体体积计算公式的推导。

本书可供小学数学教师教学和进修参考。

几 何 初 步 知 识 教 学

华昌年 胡 琛

江 苏 人 民 大 学 出 版

江苏省新华书店发行 苏州印刷厂印刷

开本 787×1092 毫米 1/32 印张 4.625 字数 97,000

1982年6月第1版 1982年6月第1次印刷

印数 1—15,500 册

书号: 7100·175 定价: 0.34 元

责任编辑 何震邦

目 录

一、概述	1
§1 科学的几何课程	1
§2 几何初步知识教学的任务	3
§3 几何初步知识教材的安排	4
§4 几何初步知识教学法的一般原则	7
二、几何初步知识教学的基本问题	11
§5 几何概念的教学	11
§6 形体性质的研究	19
§7 直观教具的准备	25
§8 测量实习的组织	33
三、简单平面图形的认识	40
§9 直线和角	40
§10 垂线和平行线	44
§11 长方形和正方形	49
§12 三角形	54
§13 平行四边形和梯形	64
§14 圆	72
四、简单平面图形的面积	76
§15 长方形的面积	76
§16 正方形的面积	81
§17 平面直线图形面积计算的准备	83
§18 平行四边形的面积	85

§19	三角形的面积·····	87
§20	梯形的面积·····	90
§21	圆的周长和面积·····	92
§22	组合图形与不规则图形的面积·····	99
§23	面积的计算问题·····	102
五、简单物体的表面积和体积	·····	109
§24	长方体和正方体·····	109
§25	长方体和正方体的表面积·····	113
§26	长方体和正方体的体积·····	115
§27	圆柱和圆锥·····	121
§28	圆柱的表面积·····	124
§29	圆柱和圆锥的体积·····	126
§30	体积的计算问题·····	130
附录	我国古代数学家研究π的成就 ·····	136
	拟柱体的体积公式 ·····	142

一、概 述

§1 科学的几何课程

现时科学的几何课程是纯粹严格的演绎科学，它的形成大体经过了三个发展阶段。

第一阶段几何学是经验的科学。这一阶段积累了不少几何事实，大多是关于物体的长度、面积、体积的度量方面的。几何学是埃及人和巴比伦人发现的，它起源于土地的测量。当时，结论的正确性是借助于经验的方法建立起来的，利用观察和测量，几乎没有有意识的抽象思维，没有逻辑的证明或直观推理。在这一阶段，它的内容虽是简单粗浅的，没有任何理论科学，但是已经出现了企图建立各个几何事实间联系的尝试，企图以已知的规则为基础建立起另一个规则。

第二阶段抽象思维代替了观察和测量，几何的经验基础变得非常狭小了。这一阶段把第一阶段积累的感性材料系统化，概念获得了精确性，这种精确性是用定义来保证的。命题也被区分为两类，一类是其真实性不引起任何怀疑的并且被日常经验所证实的公理；一类是借助这些公理和已证明过的命题用逻辑方法导出来的。这一阶段形成了严格的、演绎式的、有系统的几何学。流传至今的《几何原本》就是当时希腊数学家欧几里得（*Euclid*，公元前 300 年左右）的著作。

《原本》保存了古希腊数学发展的精华，是最早的一本内

容丰富的数学书,而且为后代人所使用,所以它对数学的影响远远超过当时的其它数学书籍.它的贡献比数学内容更重要,它创造了今日我们所理解的数学.它坚持用演绎法作证明,重视抽象,这些都决定了数学的本质.它选择了一组为人们容易接受的公理,对几百个定理的猜测和证明以及对定理按逻辑顺序的排列,深刻地影响着日后的数学.《原本》提供的思想和方法是现代数学广泛采用的公理化方法的雏型.所以,这一阶段是使几何学从直观的、经验的科学发展成严格的、演绎式的、有系统的科学的几何学的时期.

第三阶段,也就是近代的阶段.在这一阶段,由于欧氏几何公理系统的不严密性和对第五公设(平行公设)的证明的寻求,引出了与欧氏几何并列的一些非欧几何学,主要的有罗巴切夫斯基几何学与黎曼几何学等.在每一种几何学中,公理的个数达到了最小的限度.德国数学家希尔伯特(1862—1943)总结了这一阶段的研究成果,最终完善了欧氏几何的公理体系,他的代表作《几何基础》是一本体系严密,流传广泛的书.

我国是世界文明发达最早的国家之一,对几何学的科学宝库,也有过重大的贡献.在两部汉代算书《周髀算经》和《九章算术》中,记载了我国几何学研究的光辉成就.如《周髀算经》中关于“黄方二、勾三、股四、弦五”的记述,反映了我国古代劳动人民对勾股定理的早期认识.此外,圆周率的研究,我们的祖先也是最早的,魏晋时的刘徽和南北朝的祖冲之已分别算出圆周率 $\pi = 3.1416$ 和 π 介于 3.1415926 与 3.1415927 之间的高精度.他们都比欧洲人(包括希腊人)领先了一千多年.

小学的几何初步知识的内容仅是科学的几何课程中的不

多的几个部分,而且都是非常简化了的,但是这些都是每一个人在日常生活中需要应用的,更是进一步学习几何学乃至学习整个数学的重要基础。

§2 几何初步知识教学的任务

小学生学习几何初步知识,要求学生掌握这门科学的最基础的知识.那么在几何发展的三个阶段中,小学的几何初步知识应该注意哪一阶段呢?无疑地,把第三阶段希尔伯特初等几何的公理以及公理的方法直接带入小学是十分不恰当的,也是不可能实现的.就是第二阶段——欧几里得阶段,也会遇到严重的困难.所以,第二阶段应该是中学几何教学的任务,小学几何初步知识的教学应该是为中学学习打好基础的,应首先掌握一定的几何事实;获得关于最基本、最重要的几何形象清晰的概念,掌握相应的术语,使儿童几何观念的范围扩大而精确;初步培养逻辑习惯和发展空间观念;应用几何知识解决实际生活中的一些简单问题。

这一要求大体合乎几何发展第一阶段的基本要求,有了这个基础,在中学学习比较严格的、演绎式的、系统的几何学,就比较方便了。

现行小学数学教学大纲对小学数学教学的任务和要求作了明确的规定.大纲指出:“小学数学教学的目的是:使学生理解 and 掌握数量关系和空间形式的最基础的知识”,“初步了解现代数学中的某些最简单的思想,具有初步的逻辑能力和空间观念,并能够运用所学的知识解决日常生活和生产中的简单的实际问题”.大纲又指出,几何初步知识教学的具体要求

是“掌握简单几何图形的基础知识,能够计算一些几何形体的周长、面积和体积,并能进行简单的土地丈量和土石方等的计算”。

按照这个教学大纲,小学几何初步知识教学的任务应该是以下几方面:

(1) 使学生获得线段、角和简单平面图形、简单立体图形的清晰的形象,依靠直观判断简单图形的从属关系;能对比较复杂的图形进行分解和把简单图形组合成复杂图形。

(2) 使学生正确地建立长度、面积、体积的概念,能正确地计算简单平面图形的面积和简单物体的表面积和体积,能够对不太远的物体间的距离、大小有较正确的估计。

(3) 使学生能够应用几何知识解决各种实际生活中的简单问题,进行实地定线,丈量土地面积,计算土石方,绘制简单物体的草图,制作简单物体的模型等。

(4) 使学生在获得几何初步知识的同时,了解现代数学的一些最基本的思想,同时通过教学促进学生观察力的培养;记忆力的巩固,思维的锻炼和想象的发展。

切实地掌握小学数学教学大纲所规定的几何初步知识,不仅有利于以后几何学的学习,而且是整个数学学习的重要基础。

§3 几何初步知识教材的安排

为了实现小学数学教学目的,保证小学生学好几何初步知识,安排教学内容,应该体现教材现代化的需要,注意数学知识的内在联系。教材(即现行全日制十年制学校小学数学课

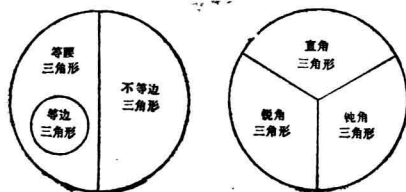
本,下同。)在选材时着重考虑了以下两个问题:

(1) 精选传统内容,适当增加几何初步知识。

现行小学教材对于传统教材中过繁的四则运算、繁难的应用题、繁杂的复名数化聚等作用不大的内容进行了删减,增加了代数、几何部分的内容,几何部分新增加的有:三角形的内角和,等腰三角形和等边三角形,轴对称图形,扇形面积等。

(2) 渗透现代数学思想。

在各年级几何知识学习的过程中,注意渗透集合、对应、函数等现代数学思想,即不系统地传授这些知识,而采用直观手段使学生积累这方面的感性材料。例如:用集合概念对三角形、四边形等图形进行分类(图1);简单几何形体中很多求面积、体积的公式,都用公式来表示数量间的函数关系(图2)。



在三角形分类中渗透集合思想

图 1

$$C = 2\pi R$$

C(米)	R(米)
18.84	—
6.28	—
25.12	—
21.98	—
15.7	—

用公式法渗透函数思想

图 2

现行小学数学教学大纲所规定的几何初步知识的内容按下表(见下页)安排。

教材编排的特点:

(1) 数和形密切联系。

小学数学的教学内容,概括起来,是数和形两个方面,在安排教材内容时,注意了数和形的联系。在小学,学习几何

几何初步知识各年级内容安排表

年 级 \ 内 容	线	角	面	体
一			利用长方形、正方形、圆帮助数的认识和计算。	利用长方体、正方体帮助数的认识和计算。
二	直线和线段的认识。	初步认识角。	长方形和正方形的认识； 长方形和正方形的周长。	
三			长方形和正方形的面积。	
四	垂线和平行线的认识。	进一步认识角；角的分类和画法。	三角形、平行四边形、梯形的认识； 三角形、平行四边形、梯形的面积。	长方体和正方体的认识； 长方体和正方体的表面积及体积。
五			圆的认识； 圆的周长和面积（扇形面积）。	圆柱和圆锥的认识； 圆柱和圆锥的表面积及体积。

初步知识是结合着数的认识和数的四则运算进行的，从一年级认数开始，就用正方形、圆形等实物和图形作为直观教具，使学生认识这些图形；以后结合数和数的计算知识的学习，逐步使学生认识一些几何图形的简单性质，掌握它们的周长、面积和体积等的计算，并利用几何图形的直观性来加深理解数的概念和计算方法，如长方形、正方形的面积和乘法表，面积、体积的单位和百进千进的关系都可以互相沟通，互相促

进.在数的计算基础上学习几何知识,使几何求积成为可能,同时又使数和数的计算得到巩固提高和应用。

(2) 注意了形的本身特点。

几何初步知识的教材编排还注意了自身的特点。几何知识的引出注意符合图形、物体的结构特征,以及计算测量的顺序,它是由直线到平面,从平面到立体,从长度到面积、从面积到体积,其中线的知识又由认识到测量、画图,面的知识从长方形、正方形到其它平面直线形,再到特殊的平面曲线形——圆,并由图形的认识到面积单位,再到面积计算;体的知识由最基本的多面体——正方体、长方体的认识到体积单位和体积计算,再到旋转体——圆柱体、圆锥体的认识、体积和表面积的计算。

(3) 注意发展学生的空间观念。

小学生空间观念的培养和几何知识的学习是密切联系着的,学生空间观念的培养要逐步地和连贯地进行。从小学一年级开始,各个年级都安排几何知识的学习,防止几何知识的学习安排过晚和过于集中的情况。

§4 几何初步知识教学法的一般原则

前面已经说过,几何初步知识的教学内容大体上属于几何发展的第一阶段。它高度概括着、压缩着人类早期对几何的认识,它是直观的、经验的科学,是以观察、测量、实验为基本要求的。

教学中应该依靠学生们的直觉,要广泛地使用直观性,从小学生容易接受的具体形象的教学入手.具体方法如下:

(1) 利用周围的事物。

开始建立几何形象要以环绕我们周围的或多或少与此形象相接近的事物为基础。小学低年级每一种几何元素的学习可从指出反映这种元素的事物开始，并尽可能利用眼前能看到的事物，或利用学生比较熟悉的事物。

(2) 运用几何教具。

教学中应使用能方便地观察几何形象的图形和模型，以有利于学生获得这些形象，并逐渐获得想象几何元素的能力，使最简单的几何元素能够在学生头脑中再现。例如，将厚纸板剪成圆，进而分割成一些相等的扇形，就可以使学生对长方形面积及圆面积之间的关系建立起清楚的永久的记忆。几何教具对于获得正确的和清晰的几何形象来说，有着巨大的意义。在教学过程中还要发展学生对愈来愈复杂的几何元素的想象能力，运用想象能力使得图形和模型达到完善的地步，并逐渐减少对图形和模型的依靠。

观察是儿童认识客观世界的重要途径，教学中，在对客观事物和现象的观察中，要使儿童在看到周围事物的现象时，注意观察它们的特征，并注意分析观察结果，作出猜测，寻求证明方法。观察力是教师在直观教学中应着重培养学生的一种能力，教师应安排学生实际观察和操作，如看一看、比一比、量一量、折一折、画一画以及制作模型和实地测量等。教师还要重视观察和实验的指导，通过它，学生容易理解自然科学的原理，同时也学会研究自然科学的基本方法和技能，因此，教师在制定每一单元的教学计划时，要明确主要的教学内容，主要的观察和实验的事项，观察和实验的准备等。

从生动的直观到抽象思维，再由抽象思维到实践，这就

是认识真理,认识客观现实的辩证的道路.直观性原则在教学上的应用过程,就是从生动的直观进入抽象思维的过程,但是,也不可过多地停留在直观阶段,因为,如果没有适当的抽象思维,对于任何科学的掌握也是不可能的。

小学数学教学大纲明确规定,小学数学教学要使学生不仅长知识,还要长智慧,要经常启发学生动脑筋、想问题,逐步培养学生肯于思考问题、善于思考问题,引导学生从大量的感性认识中,逐步抽象出数学概念和规律,进而揭示它们的逻辑联系。但是这种抽象思维并不象中学几何那样要求系统的、严谨的逻辑思维,小学儿童的思维特点主要是从具体形象思维逐步向抽象逻辑思维过渡,并且经常需要感性材料的支持。

培养学生的抽象思维能力,可以通过以下途径来实现:

(1) 善于思考一个完整的过程。

每一单元的教学,都要引导学生善于思考一个完整的过程,发现问题要进行思考,通过观察推理把握事物间的相互关系需要思考,制订解决问题的计划要用思考,通过观察和实验解决问题得出结论也要用思考……

(2) 注意使用思维的逻辑手段,把握研究事物间的联系。

通过观察和试验得到的几何知识,要避免粗糙的凭借经验的倾向,必须避免单纯依赖一连串的观察和试验的教学方法,而不去运用足够的思维,思考被研究事物间的联系和相互依存之处。例如,往往从观察和试验中作出计算正方形的面积时,没有研究把它的边长增加多少,面积就会增加多少的问题。

因此,在观察和试验时,要引导学生进行足够的思维,要

利用图形，对各种几何事实进行比较、分析、综合、抽象、概括、判断、推理，从而让学生正确、牢固地建立几何形象，把握所研究的事物间的逻辑联系。

(3) 组织学生进行图形操作。

几何图形不只是用作辨认的对象，也是显示逻辑关系的手段。

图形操作(包括作图和图形改造)，对于发展学生智慧能起积极的作用。通过图形操作可以把学生亲自建造和改造图形的主动活动纳入由简单到复杂的智力训练。具体地说，小学一、二年级学生的作图可限于点点子和沿直尺划线，从三年级起增加用圆规量距离、画弧、画圆；图形改造是指剪拼图形或把平面图形折贴成立体形状等。

图形改造是学习有关几何知识的实践基础，而且也能为以后学习某些代数知识提供直观教学的条件，如通过正方形或长方形剪拼成三角形、平行四边形、梯形(或者逆过来)的操作，对学习这些形状的面积公式有作用；通过两个不同大小的正方形剪拼成一个更大的正方形(或者逆过来)的操作，对学习勾股定理有作用；同样把一个正方形裁两下成四块(或者逆过来)的操作对今后学习完全平方公式有作用。

综上所述，几何初步知识教学的一般原则可归纳为两点：

(1) 小学生几何初步知识的基本来源是观察和实验。教学中要广泛使用直观性，从他们易于接受的具体形象的教学入手；

(2) 在得出几何事实时，要引导学生进行足够的思维，使他们通过研究事物间的联系和应用来获得知识。

二、几何初步知识教学的基本问题

§5 几何概念的教学

1. 几何概念

几何概念和其它数学概念一样，是人们对客观事物的一种认识，是反映客观事物本质的思维形式。它是人们通过长期的社会实践，把大量的关于现实世界空间形式和数量关系的生动的材料，经过抽象和概括以后得来的。例如长方形这个概念，它已经舍弃了对象的具体内容而只剩下了区别于其它图形的特征，我们把现实世界中的课桌面、黑板框等等事物加以抽象和概括，就可以得到长方形这一概念。这时的概念并没有远离客观事物，而是更接近了事物，它抓住了事物的本质，是对客观事物的更深刻、更正确、更完全的反映。

任何一个概念都有内涵和外延两个方面。

概念的内涵是概念所反映的对象属性的总和；概念的外延是概念所反映的对象的总和。

定义是揭示概念内涵的逻辑方法，也就是通过指出概念所反映的事物的属性来明确概念的逻辑方法。给概念下定义一般用种加属差法。例如要给“平行四边形”这个概念下定义，先要找到比较广泛的概念，即它的邻近的种。我们知道，平行四边形是包含在四边形的外延里面的，四边形就是它的邻近的种。但四边形这个种，除了包括平行四边形这个属外，还

包括梯形和其它四边形。所以还要进一步找出平行四边形所特有的、区别于其它四边形的性质，我们把这种性质叫做属差。平行四边形的属差是：“两组对边分别平行”。于是，用种加属差法就可以得到平行四边形的定义：

两组对边分别平行的四边形叫做平行四边形
属 差 + 种 = 被定义者

用种加属差法定义概念时，必须找出与这个概念最邻近的种和属差。如用种加属差法给直角下定义时，“角”是直角最邻近的种概念，“等于 90° ”是属差，因此有：

等于 90° 的角叫做 直角
属差 + 种 = 被定义者

又如，三角形的高是这样定义的：

从三角形的一个顶点到它的对边(或对边的延长线)作一条垂线，顶点和垂足之间的线段叫做三角形的高。

这样的定义称为发生定义。发生定义也包含种和属差，它指出了对象发生的由来。在必须指出所要研究的对象由来的时候，就要采用发生的定义。

用种加属差法给概念下定义是经常采用的。但不是所有的几何概念都可以采用这种方法下定义。例如，几何中的一些原始概念，如点、直线、平面等，因为没有比它们更广泛的种概念，所以不能用种加属差法来定义。这类原始概念，通常采用比较和描述的方法来揭示它们所反映的对象的基本特征。

为了正确地给概念下定义，首先应掌握概念所反映的对象的本质属性，还要注意遵守下定义的规则。