徐任吾
仲子明 編著

復興高級中學教科書

解析幾何學

商務印書館發行

徐任吾
仲子明　編著

復興高級中學教科書

解析幾何學

商務印書館發行

C二四三七

中華民國二十三年九月初版
中華民國二十三年十月五版

(57021·1)

高級中學用

復興教科書解析幾何學一册

每册定價大洋捌角
外埠酌加運費匯費

編著者　徐任吾　仲子明

主編兼發行人　王雲五　上海河南路

印刷所　商務印書館　上海河南路

發行所　商務印書館　上海及各埠

(本書校對者　楊靜盦　胡達聰)

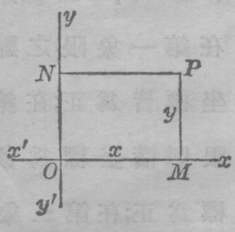
目　次

解析幾何

第一章

坐標* (Coördinates)

1. 平面上點之位置. 如圖, P 爲平面上之一點.若在此平面上引互相垂直之兩直線 $x'x$ 及 $y'y$ 相交於 O, 從 P 點引 $x'x$ 及 $y'y$ 之垂直線 PM 及 PN, 則 OM 及 MP 稱爲 P 點之坐標. OM 爲橫坐標 (abscissa), MP 爲縱坐標 (ordinate). $x'x$ 及 $y'y$ 爲坐標軸 (coördinate axes), 而橫軸 $x'x$ 常稱爲 $\boldsymbol{x}$ 軸

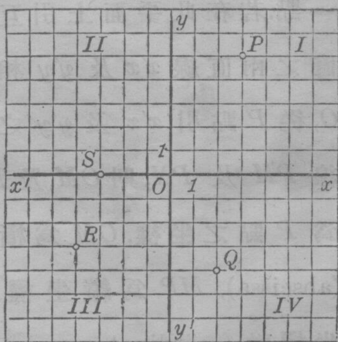


*本章所述之坐標一名笛卡兒坐標,因笛卡兒氏(Descartes)所發明,故名.又兩坐標軸互相垂直者稱爲正坐標,斜交者稱爲斜坐標.本書祇用正坐標.

(x-axis), 縱軸 $y'y$ 常稱爲 **y 軸** (y-axis), 又其交點爲**原點** (origin).

橫坐標在 $y'y$ 之**右者爲正**, 在**左者爲負**; 縱坐標在 $x'x$ 之**上者爲正**, 在**下者爲負**.

$x'x$ 與 $y'y$ 分平面爲四部份, 稱爲**象限**(quadrants); 在右上角者稱爲第一象限 (first quadrant), 左上角者爲第二象限 (second quadrant), 左下角者爲第三象限 (third quadrant), 右下角者爲第四象限 (fourth quadrant). 所以在第一象限之點之兩坐標皆爲正; 在第二象限則橫坐標爲負, 縱坐標爲正; 在第三象限兩坐標皆爲負; 在第四象限則橫坐標爲正, 縱坐標爲負.



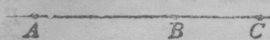
如圖, P 點之橫坐標爲 3, 縱坐標爲 5, 爲簡便計, 記爲 (3,5). 在括弧內先記橫坐標, 次記縱坐標.

此(3,5)非但表示P點之坐標,以後竟以此代表P點.仿此,(2,−4)乃代表橫坐標爲2,縱坐標爲−4之Q點,(−4,−3)代表R點,(−3,0)代表S點,(0,0)代表原點.

在1頁圖中,縱坐標MP等於ON,故有時以ON作爲縱坐標.

由上述知幾何學上之**一點必有二實數爲其坐標;以二實數爲坐標必可決定一點.**故可以代數方法或稱爲解析方法研究幾何圖形之性質,**解析幾何學卽用代數方法研究幾何之科學也**

2. 有向線分及射影(directed line segment and projection).初等幾何學中之線分有**大小而無方向**,解析幾何學中則線分除大小外兼有方向.如圖,線分AB與線分BA**大小**



相等而方向相反.線分由A至B以AB表之,由B至A以BA表之.若AB爲正,則BA爲負.故$AB=-BA$.又在水平位置時,**從左向右爲正**;在鉛垂位置時,**從下向上爲正**.

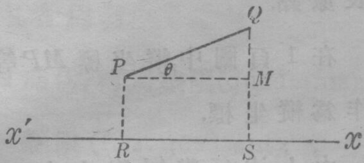
因　　　　$AB=-BA,$

故 $AB+BA=0.$

又因 $AB+BC=AC=-CA,$

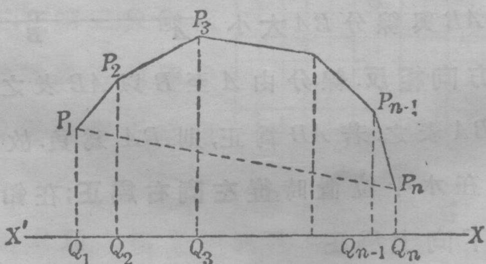
故 $AB+BC+CA=0.$

一有向線分PQ及無限直線$x'x$.從P及Q各引$x'x$之垂線PR及QS,則R稱爲P點之射影,S爲Q點之射影,而RS爲PQ之射影.又QP之射影爲SR.因$RS=-SR$,故PQ之射影與QP之射影大小相等而方向相反.



若已知PQ與$x'x$所成之角爲θ,則$RS=PQ\cos\theta$.

定理: 任意折線$P_1P_2, P_2P_3, \cdots\cdots, P_{n-1}P_n$之射影之和等於$P_1P_n$之射影.



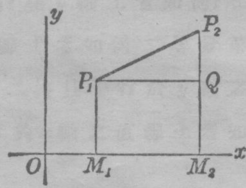
證: 如圖 $P_1P_2, P_2P_3 \cdots\cdots P_{n-1}P_n$ 之諸射影爲

$Q_1Q_2, Q_2Q_3 \cdots Q_{n-1}Q_n$,則$Q_1Q_2+Q_2Q_3+\cdots+Q_{n-1}Q_n=Q_1Q_n$.

系. 多邊形各邊順次所成之射影之和爲零.

3 兩點間之距離. 若已知兩點之坐標,則兩點間之距離可用其坐標求得之.

設P_1之坐標爲(x_1, y_1),又P_2之坐標爲(x_2, y_2). 自P_1, P_2引Ox之垂線P_1M_1, P_2M_2,又過P_1點引Ox之平行線P_1Q,則



$$P_1P_2\text{之距離}\ d=\sqrt{\overline{P_1Q}^2+\overline{QP_2}^2}$$

但 $$P_1Q=M_1M_2=OM_2-OM_1=x_2-x_1,$$

$$QP_2=M_2P_2-M_2Q=y_2-y_1,$$

$$\therefore\quad d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \qquad \text{公式(1)}$$

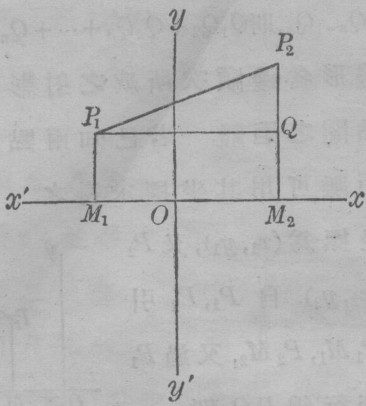
P_1, P_2二點不論在任何象限中,此公式亦能應用,今舉例如下:

若P_1在第二象限,P_2在第一象限,則

$$P_1P_2=d=\sqrt{\overline{P_1Q}^2+\overline{QP_2}^2};$$

但 $$P_1Q=M_1M_2$$

$$=M_1O+OM_2=-x_1+x_2=x_2-x_1,$$



又　　$QP_2 = M_2P_2 - M_2Q = M_2P_2 - M_1P_1$

$$= y_2 - y_1,$$

$$\therefore\ d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

例題 1. 求點(1, 3)與點(−5, 5)間之距離.

解. 設(1, 3)爲P_1, 又(−5, 5)爲P_2, 則

$$x_1 = 1, y_1 = 3, x_2 = -5, y_2 = 5.$$

代入公式(1)得

$$d = \sqrt{(-5-1)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$$

習 題 一

1. 以(−10,−8), (36,24), (−12,20)爲頂點,繪一三角形.

2. 繪諸點: $\left(\frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{6}, -\frac{5}{6}\right)$, $\left(1, \frac{7}{6}\right)$.

x y

3. 以 (0, 0), (0.07, 0.11), (−0.03, 0.06), (0.20, −0.08) 爲頂點, 繪一四邊形.

4. 繪諸點: $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0\right)$, $(-2\sqrt{3}, \sqrt{3})$, $\left(\frac{1}{2}\pi, \pi\right)$.

5. 在 x 軸上之各點之坐標若何? 在 y 軸上者如何? 在過 O 且二等分第一及第三象限之直線上者如何? 二等分第二及第四象限上者如何? 在 y 軸右邊二格且平行於 y 軸之直線上者如何? 在 x 軸下三格且平行於 x 軸之直線上者如何?

求下列二點間之距離及其在二坐標軸上之射影.

6. (−4, −4) 及 (1, 3), 答: 距離 $=\sqrt{74}$; 射影爲 5, 7.

7. $(-\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 及 $(\sqrt{3}, \sqrt{2})$.

答: 距離 $=\sqrt{10}$; 射影爲 $\sqrt{3}+\sqrt{2}$, $\sqrt{2}-\sqrt{3}$.

8. (0, 0) 及 $\left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$. 答: 距離 $=a$; 射影爲 $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{2}\sqrt{3}$.

9. $(a+b, c+a)$ 及 $(c+a, b+c)$.

答: 距離 $=\sqrt{(b-c)^2+(a-b)^2}$; 射影爲 $c-b$, $b-a$.

10. 證明以 (2, −2), (−1, −1), (1, 5) 爲頂點之三角形乃一直角三角形, 且求其面積, 答: 10.

11. 證明以 (5, 5), (−7, 3), (0, −2) 爲頂點之三角形乃一等腰三角形, 且求其面積. 答: 37.

12. 若一圓之中心爲 (2, 5), 且過一點 (14, 10), 求其半徑 此圓過點 (13, 12) 否?

13. 一圓之中心爲$(5,6)$，且切於y軸．此圓過$(4,1)$否？過$(1,3)$否？

14. 若弦長爲4，此弦被一點$(5,4)$所二等分，又中心爲$(3,0)$，求圓之半徑．答：$2\sqrt{6}$．

15. 直徑之兩端爲$(10,-2)$及$(-4,-4)$．此圓過$(-2,2)$否？

16. 圓之中心爲$(-4,2)$，又半徑爲5．求被一點$(-2,1)$所二等分之弦之長．答：$4\sqrt{5}$．

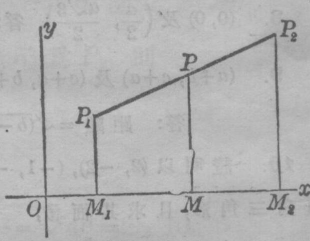
17. 求證三點$(10,2)$，$(7,1)$，$(-2,-2)$在一直線上．

18. 三點$(3,0)$，$(-1,8)$，$(48,-90)$在一直線上否？

19. 若一點(x,y)與一點$(-5,3)$間之距離爲5，用方程式表之．答：$(x+5)^2+(y-3)^2=25$．

20. 一點與原點之距離爲10，又距y軸爲-6．求此點之坐標．答：$(-6,\pm 8)$．

4. 線分之分點及中點． 如圖，P：(x,y)爲線分P_1P_2上之任意一點．



設P_1之坐標爲(x_1,y_1)，

P_2爲(x_2,y_2)，

又$P_1P:PP_2=m:n$，則

$$OM=OM_1+M_1M.$$

但 $$OM=x,\ OM_1=x_1,$$

又因 $$M_1M:MM_2=m:n,$$

$$\therefore\ M_1M : M_1M + MM_2 = m : m+n,$$

即 $$M_1M : M_1M_2 = m : m+n,$$

$$\therefore\ M_1M = \frac{m}{m+n}(x_2 - x_1),$$

$$\therefore\ x = x_1 + \frac{m}{m+n}(x_2 - x_1),$$

同理, $$y = y_1 + \frac{m}{m+n}(y_2 - y_1),$$

$m:n=\lambda$

簡單之, $$\begin{cases} x = \dfrac{nx_1 + mx_2}{m+n}, \\ y = \dfrac{ny_1 + my_2}{m+n}. \end{cases}$$ 公式(2)

$\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$

$\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$

又 P: (x, y) 爲 P_1P_2 之中點時, 則 $m=n$.

故 $$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(x_1 + x_2), \\ y = \dfrac{1}{2}(y_1 + y_2). \end{cases}$$ 公式(3)

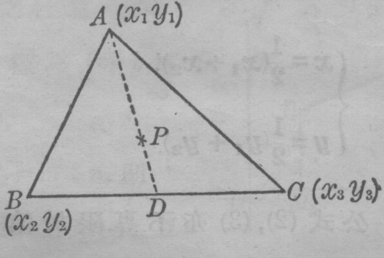
〔注意〕 公式(2), (3) 亦不專限於第一象限, 即在其他任何象限亦能通用. 嗣後從第一象限所得之公式皆能應用於其他任何象限, 不再說明矣.

例題 1. 求分 $P_1\ (-1, -6)$ 與 $P_2\ (3, 0)$ 間線分使成 $m : n = -\frac{1}{4}$ 之點之坐標.

解.
$$x_1 = -1,\ y_1 = -6,\ x_2 = 3,\ y_2 = 0,$$
$$m : n = 1 : -4,$$
$$\therefore\quad x = \frac{(-4)\times(-1)+1\times 3}{1-4} = -2\frac{1}{3},$$
$$y = \frac{(-4)\times(-6)+1\times 0}{1-4} = -8.$$

故所求之分點為 $\left(-2\frac{1}{3}, -8\right)$.

例題 2. 一三角形之頂點為 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), 求其中線交點之坐標.



解. 從平面幾何知 $AP = \frac{2}{3}AD$, 即 $AP : PD = 2 : 1$. D 之坐標為 $\frac{1}{2}(x_2 + x_3)$, $\frac{1}{2}(y_2 + y_3)$. 故得

$$x=\frac{x_1+2\cdot\frac{1}{2}(x_2+x_3)}{1+2}=\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3),$$

$$y=\frac{y_1+2\cdot\frac{1}{2}(y_2+y_3)}{1+2}=\frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3).$$

習題二

1. 自(8, −18)至(−6, −4)間之線分被分成四等分. 求各分點之坐標.

2. 自(−11, 1)至(7, −2)間之線分,延長至何處適等於原線分之二倍? 答: (25, −5).

3. 圓之中心爲(5, 5),求過圓上一點(6, −9)之直徑之其他一端之坐標.

4. 等腰三角形以(3, −9)與(6, −4)間之線分爲底;頂點爲(−8, 1),求其高. 答: $\frac{5}{2}\sqrt{34}$.

5. 分自(−1, 4)至(−5, −8)間之線分使成1:3,求分點之坐標. 答: (−2, 1).

6. 分自(−3, −5)至(6, 9)間之線分使成2:5. 求分點之坐標. 答: $\left(-\frac{3}{7}, -1\right)$.

7. 分自(2, 6)至(−4, 8)間之線分使其比爲$-\frac{4}{3}$之點之坐標. 答: (−22, 14).

8. 直角三角形斜邊之中點至三頂點等距離,試證明之.

9. 矩形之三頂點爲 $(3, -2), (7, 6), (3, 8)$. 求第四頂點.

10. 用二種方法證明以 $(3, 4), (4, 12), (6, -2), (5, -10)$ 爲頂點之四邊形爲一平行四邊形.

11. 平行四邊形之順次三頂點爲 $(5, 2), (-2, -3), (3, -4)$. 求第四頂點.

12. 若四邊形之頂點爲 $(6, 8), (-4, 0), (-2, -6), (4, -4)$, 求證對邊中點之聯結線互相二等分.

13. 若梯形之頂點爲 $(-8, 0), (-4, -4), (-4, 4)$ 及 $(4, -4)$, 證明不平行之兩邊之中點之聯結線等於二底和之半.

14. 求一點 $(16, 3)$ 分自 $(-5, 0)$ 至 $(4, -9)$ 間之線分之比.

答: $-\frac{3}{2}$.

15. 若一三角形三邊之中點爲 $(2, 1), (3, 3)$ 及 $(6, 2)$, 求三角形三頂點之坐標. 答: $(-1, 2), (5, 0), (7, 4)$.

5. 直線之斜角 (angle of inclination) **及斜率** (slope). 一直線與 x 軸相交, 在交點右側之 x 軸部分與直線在 x 軸上方部分所成之正角稱爲**斜角**. 如圖, α 卽斜角. 又斜角之正切稱爲**斜率**. 斜角之範圍自 $0°$ 起迄 $180°$ 止.