经　管　综　合　类

线性代数

余长安　编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

| 经 | 管 | 综 | 合 | 类 |

线性代数

■ 余长安　编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/余长安编著. —武汉：武汉大学出版社,2010. 1
经管综合类
ISBN 978-7-307-07535-1

Ⅰ.线…　Ⅱ.余…　Ⅲ.线性代数—高等学校—教材　Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 232611 号

责任编辑:顾素萍　　责任校对:黄添生　　版式设计:马　佳

出版发行：**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件：cbs22@whu.edu.cn　网址：www.wdp.com.cn)
印刷:湖北金海印务公司
开本：720×1000　1/16　　印张：24.75　字数:443 千字　插页:1
版次:2010 年 1 月第 1 版　　2010 年 1 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-307-07535-1/O·417　　定价:35.00 元

前　言

本书是根据教育部关于高等学校“线性代数”课程教学的基本要求及“全国硕士生入学统一数学考试大纲”的要点，并结合作者本人多年的教学实践经验与体会撰写而成的.

本书在编写过程中，始终注意保持数学学科自身的科学性与系统性，着力突出线性代数科目内在的结构性与逻辑性，特别遵循由具体到抽象，由特殊到一般的写作原则，力求实现：立足基础，循序渐进；深入浅出，层次分明；阐述简洁，推导严谨；利于讲解，便于自学.

全书共分 6 章：行列式、矩阵、线性方程组、线性空间、特征值与特征向量和二次型. 内容涵盖线性代数科目的基本部分. 一般适用于 50～60 教学课时. 该书每章末皆组编有“应用”与“典型例题”两节，使用教师可根据教学时数适当取舍. 书中加了 * 号的内容(包括节、段及例)亦可根据教学需要适量安排.

本书每节均配有相应练习题，且各章后皆选编了稍显难度的复习题. 书末还附有客观题(包括填空题和选择题两部分)，仍按章分节依序编排. 全书所有习题(不论是主观题，还是客观题)在该书末尾皆给出了(参考)答案，以便读者在习作时比对.

本书作为武汉大学“十一五”规划(增补)教材，编撰出版时受到了有关领导的鼓励和学院的资助；同时，也得到了相关专家的宝贵意见和教师同仁的热忱帮助. 在该书编审过程中，得到了武汉大学出版社顾素萍编辑的大力支持. 在此，编者一并表示衷心的感谢！

本书可作为经济、管理及其综合类学科教材，亦适合于作为理(非数学专业)、工、农、医等专业“线性代数”课程的教材. 既可供工程硕士、MBA 考生及成教生与自学者作为学习参考书，也可作为全国各类高等学校相关教师的教学备课资料. 当然，还适宜于各类有关工程人员阅读.

限于编者对该课程的认知水平，加之时间仓促，书中不妥与疏误之处在

所难免，恳请广大读者批评指出，以便再版时予以修正.

编　者

于武汉大学樱园

2009.8.8

目　　录

第一章　行　列　式

线性代数的研究对象之一是由 m 个方程组成的含有 n 个变量的一次方程组. 今后我们称之为 n 元线性方程组. 行列式是在对线性方程组的研究中开发出来的一种重要工具. 我们在本章先引入二阶、三阶行列式的概念，并在二阶、三阶行列式的基础上，给出 n 阶行列式的定义并讨论其性质，进而把 n 阶行列式应用于求解 n 元线性方程组. 事实上，行列式是一种常用的数学工具，在数学及其他学科中都有着广泛的应用.

1.1　二阶行列式与三阶行列式

1.1.1　二阶行列式

初等数学中，二元线性方程组的求解公式可用行列式方便地给出.

设有二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

利用加减消元法容易求出方程组(1.1) 的解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \dfrac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases} \tag{1.2}$$

式(1.2) 中分子、分母都是 4 个数分两对相乘再相减而得.

为了便于记忆这些解的公式，引入**二阶行列式**：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{1.3}$$

其中 a_{ij} 称为行列式的**元素**，a_{ij} 的两个下标表示该元素在行列式中的位置，

第一个下标称为**行标**，表示该元素所在的行；第二个下标称为**列标**，表示该元素所在的列，常称 a_{ij} 是行列式的 (i,j) 元素.

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则当 $D\neq 0$ 时，方程组(1.1) 有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}. \tag{1.4}$$

二阶行列式(1.3) 中，等号右端的表示式又称为**行列式的展开式**，二阶行列式的展开式可以用所谓**对角线法则**得到，即

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ -\qquad\qquad + \end{array}$$

其中，实线上两个元素的乘积带正号，虚线上两个元素的乘积带负号，所得两项的代数和就是二阶行列式的展开式. 常称上式中的实线为**主对角线**，另一条对角线为**次对角线**.

注 D 是用方程组(1.1) 的系数所确定的二阶行列式，一般称 D 为方程组的系数行列式. D_1 是用方程组(1.1) 的常数项 b_1,b_2 代替 D 中第一列元素所得的二阶行列式，D_2 是用方程组(1.1) 的常数项 b_1,b_2 代替 D 中第二列元素所得的二阶行列式.

1.1.2 三阶行列式

类似地，对于三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases} \tag{1.5}$$

利用加减消元法也可得到它的求解公式，但要记住这个求解公式是很困难的. 为了便于记忆，引入了三阶行列式的概念.

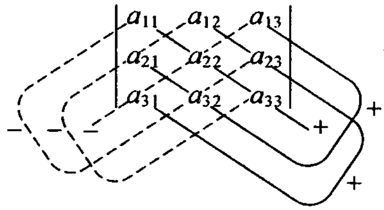
三阶行列式记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

其展开式为

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

三阶行列式的展开式也可用对角线法则得到，三阶行列式的对角线法则如下所示：



其中每一条实线上的三个元素的乘积带正号，每一条虚线上的三个元素的乘积带负号，所得 6 项的代数和就是三阶行列式的展开式.

注　对于三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，只要将 D 中三列照写，然后在其右边依次添上第一列、第二列，即为

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

也可以按上述方法计算：

$$\begin{aligned} D = & a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ & -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}. \end{aligned}$$

例 1　计算三阶行列式 $\begin{vmatrix} -1 & 6 & 7 \\ 4 & 0 & 9 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

解
$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -1 & 6 & 7 \\ 4 & 0 & 9 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} & = (-1)\times 0\times 5+4\times 1\times 7+2\times 9\times 6 \\ & \quad -7\times 0\times 2-9\times 1\times(-1)-5\times 4\times 6 \\ & = 25. \end{aligned}$$

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

则当 $D\neq 0$ 时，三元一次方程组(1.5)的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

注 类似地，也可以引入 4 阶及 4 阶以上的行列式，但这些行列式的展开不适用于对角线法则，需从其他方面给出其定义.

习题 1.1

1. 计算下列二阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^2 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$； (4) $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$.

2. 设 $D=\begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$. 问：

(1) 当 λ 为何值时，$D=0$? (2) 当 λ 为何值时，$D\neq 0$?

3. 计算下列三阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 8 & 9 & 5 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$； (4) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}$.

4. a,b 满足什么条件时，有 $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$?

5. 当 x 取何值时，$\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix}\neq 0$?

6. $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & a & a \end{vmatrix}>0$ 的充分必要条件是什么?

7. 证明下列等式：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

1.2 排列与逆序数

在 n 阶行列式的定义中，要用到排列的某些知识，所以先介绍排列的一些基本性质.

把 n 个不同的元素按一定的顺序排成一行($n \geqslant 2$)，称为这 n 个元素的一个排列. 下面只讨论由前 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 构成的排列.

定义 1.1 由 $1,2,\cdots,n$ 组成的有序数组称为一个 n **阶排列**.

常用 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 表示一个 n 阶排列，其中 i_k 表示 $1,2,\cdots,n$ 中的某个数，k 表示这个数在 n 阶排列中的位置. 共有 $n!$ 个不同的 n 阶排列.

定义 1.2 在一个 n 阶排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 中，按照在排列中的顺序任取两个数，记为(i_j,i_k)，其中 $j<k$，称为排列中的一个**数对**. 若 $i_j<i_k$，则称这两个数构成一个**顺序**；若 $i_j>i_k$，则称这两个数构成一个**逆序**. 一个 n 阶排列中所有逆序的个数称为这个排列的**逆序数**，记为 $\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)$. 当一个排列的逆序数为奇数时，称此排列为**奇排列**；当一个排列的逆序数为偶数时，称此排列为**偶排列**.

依定义 1.2，n 阶排列 $1,2,\cdots,n$ 中任何数对都不构成逆序，故有 $\tau(1,2,\cdots,n)=0$，且此排列为偶排列. 今后称此排列为前 n 个自然数的**自然排列**. n 阶排列 $n,n-1,\cdots,2,1$ 中任何数对都构成逆序，故有

$$\tau(n,n-1,\cdots,2,1)=C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}.$$

易知，当 $n=4k\ (k=1,2,\cdots)$ 或 $n=4k+1\ (k=0,1,2,\cdots)$ 时，此排列为偶排列；当 $n=4k+2$ 或 $n=4k+3\ (k=0,1,2,\cdots)$ 时，此排列为奇排列. 对于任意给定的一个 n 阶排列，可以通过计算其逆序数来确定其奇偶性.

例 1 试求 $\tau(2,3,5,4,1)$,$\tau(3,2,5,4,1)$.

解 在排列 2,3,5,4,1 中构成逆序的数对为(2,1),(3,1),(5,4),(5,1),(4,1)，所以 $\tau(2,3,5,4,1)=5$，即 2,3,5,4,1 是一个奇排列.

在排列 3,2,5,4,1 中，有逆序(3,2),(3,1),(2,1),(5,4),(5,1),(4,1)，所以 $\tau(3,2,5,4,1)=6$，这是一个偶排列.

例 2 试确定 5 阶排列 5,2,4,1,3 及 5,3,4,1,2 的奇偶性.

解 在排列 5,2,4,1,3 中构成逆序的数对依次为

$$(5,2),(5,4),(5,1),(5,3),(2,1),(4,1),(4,3).$$

于是 $\tau(5,2,4,1,3)=7$，从而 5,2,4,1,3 是奇排列.

在排列 5,3,4,1,2 中构成逆序的数对依次为

$$(5,3),(5,4),(5,1),(5,2),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2).$$

于是 $\tau(5,3,4,1,2)=8$，从而 5,3,4,1,2 是偶排列.

我们注意到，例 2 中排列 5,3,4,1,2 是由排列 5,2,4,1,3 交换其排在第 2 位和第 5 位的两个数 2 和 3 的位置而得到的. 结果这两个排列具有不同的奇偶性. 其实这里蕴藏着一个一般性规律.

定义 1.3 在一个排列中，任意对调两个元素，其余元素保持不变，这一过程称为**对换**. 相邻两个元素的对换称为**相邻对换**.

一般地，我们有以下的结论：

定理 1.1 对换改变排列的奇偶性，即经过一次对换，奇排列变成偶排列，偶排列变成奇排列.

证 先考虑相邻对换的情形. 设

$$c_1,c_2,\cdots,c_k,a,b,d_1,d_2,\cdots,d_l$$

为一个 n 阶排列，对换 a 与 b 得到 n 阶排列

$$c_1,c_2,\cdots,c_k,b,a,d_1,d_2,\cdots,d_l.$$

在这两个 n 阶排列中，除了 (a,b) 这一数对外，其他各数对在两个排列中是否构成逆序的情况完全相同. 因此，若 $a>b$，则有

$$\tau(c_1,c_2,\cdots,c_k,a,b,d_1,d_2,\cdots,d_l)=\tau(c_1,c_2,\cdots,c_k,b,a,d_1,d_2,\cdots,d_l)+1;$$

而当 $a<b$ 时，则有

$$\tau(c_1,c_2,\cdots,c_k,a,b,d_1,d_2,\cdots,d_l)=\tau(c_1,c_2,\cdots,c_k,b,a,d_1,d_2,\cdots,d_l)-1.$$

所以排列 $c_1,c_2,\cdots,c_k,a,b,d_1,d_2,\cdots,d_l$ 和排列 $c_1,c_2,\cdots,c_k,b,a,d_1,d_2,\cdots,d_l$ 的奇偶性不同.

再考虑非相邻对换的情形. 设

$$c_1,c_2,\cdots,c_s,a,e_1,e_2,\cdots,e_r,b,d_1,d_2,\cdots,d_t$$

为一个 n 阶排列，在 a 与 b 之间有 r 个数 $(r\geqslant 1)$. 对换 a 与 b 后得到 n 阶排列

$$c_1,c_2,\cdots,c_s,b,e_1,e_2,\cdots,e_r,a,d_1,d_2,\cdots,d_t.$$

由定义可知，一个 n 阶排列的逆序数是由排列中各数的相对位置确定的，与用什么方法得到它无关. 我们用另一种方式来实现这个对换，先把 a 依次与右边相邻数对换，得到排列

$$c_1,c_2,\cdots,c_s,e_1,e_2,\cdots,e_r,a,b,d_1,d_2,\cdots,d_t,$$

再将 b 依次与左边相邻数对换，得到排列

$$c_1,c_2,\cdots,c_s,b,e_1,e_2,\cdots,e_r,a,d_1,d_2,\cdots,d_t,$$

其间共进行了 $2r+1$ 次相邻两数的对换，即排列

$$c_1,c_2,\cdots,c_s,b,e_1,e_2,\cdots,e_r,a,d_1,d_2,\cdots,d_t$$

是由排列

$$c_1,c_2,\cdots,c_s,a,e_1,e_2,\cdots,e_r,b,d_1,d_2,\cdots,d_t$$

改变 $2r+1$ 次奇偶性得到的，所以它们的奇偶性不同. □

定理 1.2 在全部 n 阶排列中($n\geqslant 2$)，奇排列、偶排列各占一半.

证 设在全部 n 阶排列中有 s 个不同的奇排列和 t 个不同的偶排列，需证 $s=t$.

因为将每个奇排列的前两个数作对换，即可得到 s 个不同的偶排列，从而 $s\leqslant t$；同理可得 $t\leqslant s$. 于是 $s=t$，即奇、偶排列各占一半. □

最后我们指出，容易验证，任意 n 阶排列都可经过有限次对换变成自然排列.

习题 1.2

1. 求下列排列的逆序数：

(1) 4,1,2,5,3；　　(2) 3,7,1,2,4,5,6；

(3) 3,6,7,1,5,2,8,4；　　(4) 1,3,9,7,0,8,2.

2. 设 n 阶排列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的逆序数为 s，试求排列 $a_n,a_{n-1},\cdots,a_2,a_1$ 的逆序数.

3. 求下列排列的逆序数，从而决定它们的奇偶性：

(1) 1,3,4,7,2,6,5；　　(2) $1,3,5,\cdots,2n-1,2,4,\cdots,2n$；

(3) $2n+1,2n-1,\cdots,5,3,1$.

4. 要使 9 阶排列 $3,7,2,9,i,1,4,j,5$ 为偶排列，则 i,j 应取何值?

1.3 n 阶行列式的定义

在给出 n 阶行列式的定义之前，先观察三阶行列式的结构. 在三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

的展开式中，可以看出如下规律：

（1） 三阶行列式右边每一项都是三个元素的乘积，而这三个元素分别取自不同的行、不同的列. 每项的一般形式(舍去正负号）为 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$.

（2） 对各项的下标，当行指标按自然顺序排好后(我们是有意这样安排的)，列指标正好是 1,2,3 三个数的某个排列，这样的排列共 6 种，对应三阶行列式的展开式中共含 6 项.

（3） 各项前的正负号呈现如下规律：

带正号的三项，列指标是偶排列：1,2,3；2,3,1；3,1,2.

带负号的三项，列指标是奇排列：3,2,1；2,1,3；1,3,2.

这就是说，当行指标按自然顺序排好后，各项的正负号由列指标排列的逆序数所确定，列指标为偶排列的项为正，列指标为奇排列的项为负.

于是，三阶行列式可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1,j_2,j_3} (-1)^{\tau(j_1,j_2,j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}, \qquad (1.6)$$

其中 $\sum\limits_{j_1,j_2,j_3}$ 表示对 1,2,3 三个数的所有排列 j_1,j_2,j_3 求和.

上述规律对二阶行列式显然也成立.

受此启发，我们引入 n 阶行列式的定义.

定义 1.4 将 n^2 个元素排成 n 行、n 列：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称之为 n **阶行列式**，其值等于所有取自不同行、不同列的 n 个元素乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

的代数和，其中 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 是数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，每项前面带有符号 $(-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)}$，即当 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 是偶排列时，该项带正号，否则带负号. 记为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1,j_2,\cdots,j_n} (-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \qquad (1.7)$$

其中 $\sum\limits_{j_1,j_2,\cdots,j_n}$ 表示对所有 n 阶排列求和.

注　n 阶行列式的展开式中共有 $n!$ 项，其中每一项都是位于不同行、不同列的 n 个元素的乘积. n 阶行列式可简记为 $|a_{ij}|$ 或 $\det(a_{ij})$. 注意不要将行列式与绝对值符号相混淆.

依行列式定义 1.4 不难推知，(1.7) 式右端的和式(称之为行列式的**展开式**) 中决定各项符号的规则还可代之以如下等价形式:

n 阶行列式 $D=|(a_{ij})|$ 的一般项可以记为

$$(-1)^{\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)+\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}, \tag{1.8}$$

其中 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 与 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 均为 n 阶排列.

这是因为，一方面，由 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 与 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 都是 n 阶排列，因此，(1.8) 式中的 n 个元素是取自 D 的不同的行、不同的列. 另一方面，如果交换 (1.8) 式中两个元素 $a_{i_sj_s}$ 与 $a_{i_tj_t}$，则其行标排列由 $i_1,\cdots,i_s,\cdots,i_t,\cdots,i_n$ 换为 $i_1,\cdots,i_t,\cdots,i_s,\cdots,i_n$，按照定理 1.1 可知其逆序数奇偶性改变；列标排列由 $j_1,\cdots,j_s,\cdots,j_t,\cdots,j_n$ 换为 $j_1,\cdots,j_t,\cdots,j_s,\cdots,j_n$，其逆序数奇偶性亦改变. 但对换后两下标排列逆序数之和的奇偶性则不改变，即有

$$\begin{aligned}&(-1)^{\tau(i_1,\cdots,i_s,\cdots,i_t,\cdots,i_n)+\tau(j_1,\cdots,j_s,\cdots,j_t,\cdots,j_n)}\\&=(-1)^{\tau(i_1,\cdots,i_t,\cdots,i_s,\cdots,i_n)+\tau(j_1,\cdots,j_t,\cdots,j_s,\cdots,j_n)},\end{aligned}$$

所以变换(1.8) 式中元素的位置，其符号不改变. 这样我们总可以经过有限次交换(1.8) 式中元素的位置，使其行标 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 换为自然数顺序排列，设此时列标排列变为 $k_1,k_2,\cdots,k_n$，则(1.8) 式变为

$$\begin{aligned}&(-1)^{\tau(1,2,\cdots,n)+\tau(k_1,k_2,\cdots,k_n)}a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}\\&=(-1)^{\tau(k_1,k_2,\cdots,k_n)}a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}.\end{aligned}$$

上式结果即为定义中 D 的一般项，也就是说 D 的一般项也可以记为(1.8) 式的形式.

由此可见，n 阶行列式可定义为

$$\begin{aligned}D&=\sum_{j_1,j_2,\cdots,j_n}(-1)^{\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)+\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}\\&=(-1)^{\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)}\sum_{j_1,j_2,\cdots,j_n}(-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n},\end{aligned} \tag{1.9}$$

其中 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 是某个给定的 n 阶排列.

同理，有下面的定义:

$$D=(-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)}\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n}(-1)^{\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}, \tag{1.10}$$

其中 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 是某个给定的 n 阶排列.