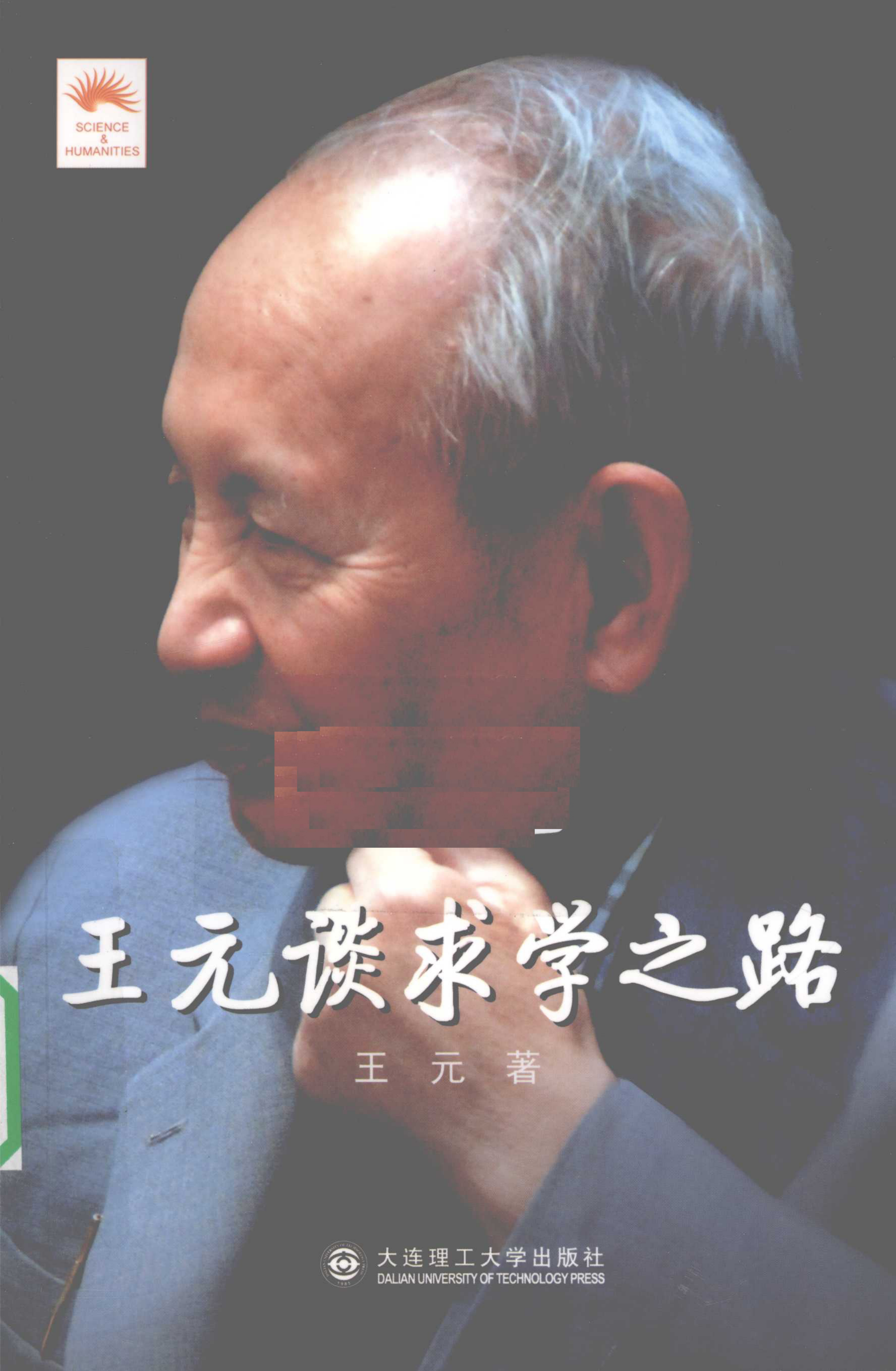
SCIENCE & HUMANITIES



王元谈求学之路

王元 著

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

SCIENCE
&
HUMANITIES

“十一五”国家重点图书出版规划项目

科 学 素 养 大 家 谈 丛 书

王元谈求学之路

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

王元谈求学之路/王元著. —大连:大连理工大学出版社,2010.4
(科学素养大家谈丛书)
ISBN 978-7-5611-5503-5

Ⅰ.①王… Ⅱ.①王… Ⅲ.①数学—文集②王元—访谈录 Ⅳ.①O1-53②K826.11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 065277 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市软件园路 80 号　邮政编码:116023
发行:0411-84708842　邮购:0411-84703636　传真:0411-84701466
E-mail:dutp@dutp.cn　URL:http://www.dutp.cn
大连金华光彩色印刷有限公司印刷　　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:155mm×230mm　印张:20.75　插页:6　字数:200 千字
2010 年 4 月第 1 版　　2010 年 4 月第 1 次印刷

责任编辑:刘新彦　于建辉　　责任校对:欣　宇
插页设计:齐冰洁　　封面设计:孙　元

ISBN 978-7-5611-5503-5　　定　价:48.00 元

序

1999年，承蒙李文林教授编辑了我的小品文集，以其中的一篇文章将书定名为《王元论哥德巴赫猜想》，由山东教育出版社出版。文集分成四部分，即哥德巴赫猜想与数论、综合论述、数学家、自述。

转眼过去了十年，这十年中，我又陆续发表了一些小品文，承蒙大连理工大学出版社之邀，要我以这些文章为主，编辑成册。经考虑，我仍按李文林教授之分类，以这十年中写的文章为主，编辑了这本书。

首先，卷首仍放上李文林与袁向东教授撰写的关于我的生平与工作简介，作为对我的数学工作的概貌介绍。第一部分为数学，收集了三篇数学普及文章。第二部分为综合论述，其中有三个附录，均为报纸上的评述，尽管我不完全赞同关于数学竞争的一些提法，但我赞成各种观点都可以发表这个观点，所以仍发表出来，让读者思考。第三部分为数学家，第四部分为自述。第五部分则为几篇朋友与记者对我的采访记录，这几篇采访真实地反

映了我对一些问题的看法。

最后，我要借此机会对大连理工大学出版社出版我的小品文集表示衷心的感谢。由于这本文集涉及面较广，错误之处谅亦不少，更盼望得到读者的指教。

王　元

2009 年 2 月 10 日

王元：生平与工作简介①

李文林　袁向东

生　平

王元于1930年4月15日出生于浙江省兰溪县。他的父亲王懋勤当时任兰溪县长。抗日战争开始后，举家迁往四川，居于重庆江北县悦来场乡下，家庭生活颇难。王元的小学就是在战乱与艰难中，在农村小学中度过的。

1942年，王元小学毕业，考取了位于合川县的国立第二中学。那时他的父亲出任中央研究院总办事处主任秘书。1946年，随家一起回到南京，转入社教附中就读高中二年级，一年后，学校改名为南京市立六中。

1948年，高中毕业。王元考取位于浙江金华的英士大学数学系。1949年，随英士大学并入浙江大学数学系就读。浙江大学是我国著名数学家陈建功与苏步青教授多年执教的地方。特别是

---

①原载：王元论哥德巴赫猜想．济南：山东教育出版社，1999

他们倡导的高年级学生读书讨论班，对于培养学生的独立工作能力很有帮助，浙大数学系的良好环境培育了王元对数学的浓厚兴趣。大学四年级时，王元在读书讨论班上报告了英格姆(A. E. Ingham)的“素数分布论”(The distribution of prime numbers, Camb, Tracts 30, 1932)，解析数论的优美深深地吸引着他。

1952 年，王元以优良的成绩从浙大毕业。在陈建功与苏步青教授的推荐下，由政府分配到中国科学院数学研究所工作。一年后，他被分配到数论组，在华罗庚教授指导下，研究解析数论。

王元在数论组很快显示出数学才能。1954 年，波兰数学家库拉托夫斯基(K. Kuratowski)来华访问，带来了西尔宾斯基(W. Sierpinski)与辛哲尔(A. Schingel)关于数论函数的论文。王元对这些工作作了一些改进，他的处女作就是与辛哲尔合作的《关于函数 $\varphi(n)$，$\sigma(n)$ 与 $\theta(n)$ 若干性质的一个注记》，并在波兰发表。以后他就致力于筛法与哥德巴赫(C. Goldbach)猜想的研究，并于 1957 年证明(2,3)，即每个充分大的偶数都是一个不超过 2 个素数之积与一个不超过 3 个素数之积之和。

1958 年，华罗庚与王元一起合作研究数论方法在近似分析中的应用，特别是高维空间的数值积分问题。他们建立了基于经典代数数论与丢番图逼近论的高维积分近似计算方法，他们的这一合作延续了 20 年。

1966 年，“文化大革命”中断了王元的工作，他受到了错误的批判与不公正的待遇。1972 年，王元恢复了他的数学研究工作，此后他从事代数数域上的丢番图方程与不等式的研究及与方开泰教授一起研究数论方法在统计中的应用。1985 年以后，王元还从事中国近代数学史的研究。

1978 年以后，王元致力于撰写一些专著，计有：《数论在近似

分析中的应用》(1978,与华罗庚合作),《哥德巴赫猜想》(1984),《在中华人民共和国普及数学方法的个人体会》(1989,与华罗庚合作),《代数数域上的丢番图方程与不等式》(1991),《统计中的数论方法》(1994,与方开泰合作),《华罗庚》(1995)与《微积分》(1997,与方源合作)。

由于王元在数学上的成就,他于1978年被提升为中国科学院数学研究所研究员,1980年被选为中国科学院学部委员(院士)。王元得到过国家自然科学一等奖(与陈景润、潘承洞一起)、陈嘉庚物质科学奖(与华罗庚一起)及何梁何利数学奖。

王元于1984～1987年任中国科学院数学研究所所长。1988～1992年任中国数学会理事长。1986年以后任全国政协委员。

王元于1967年与郭宝文女士结婚,他们有两个儿子。

数学工作

一、数 论

1. 筛法与哥德巴赫猜想

哥德巴赫猜想是1742年哥德巴赫在与欧拉(L. Euler)通信中提出来的,可以表述为:

(A)每个偶数>5都是两个奇素数之和。

(B)每个奇数>8都是三个奇素数之和。

显然由(A)可以推出(B)。这一问题至今仍未解决。直至20世纪20年代,由于圆法与筛法的产生,才使这个问题的研究有了一些好的结果。

筛法起源于古老的"埃拉托塞尼氏(Eratosthenes)筛法"。布

伦(V. Brun)于 1919 年对它作出了重要改进，并且用于猜想(A)，他证明了(9,9)，即每个大偶数都是两个素因子个数均不超过 9 的整数之和，类似地可以定义(a,b)。布伦之后，又出现了其他一些关于筛法的改进。例如，赛尔伯格(A. Selberg)筛法(1947)，布赫夕塔布(A. A. Buchstab)恒等式(1937)及孔恩(P. Kuhn)加权筛法(1954)等。至 1954 年，最好的结果为(4,4)(布赫夕塔布，1940)与$(a,b)(a+b\leqslant 6)$(孔恩，1954)。

综合上述方法，王元于 1956 年与 1957 年分别证明了：

$$(3,4)(1956),(2,3)(1957) \tag{1}$$

筛法可以简单叙于下：考虑集合 $P_\alpha=\{m: 1\leqslant m<n, p\mid m(n-m)\Rightarrow p>n^{1/\alpha}\}$，此处 $\alpha\geqslant 2$，n 为偶数及 p 表示素数，若能证明当 l 为正整数且当 n 充分大时有 $P_{l+1}>0$，则得(l,l)，再考虑 $Q_\alpha=\{q: 1<q<n, p\mid(n-q)\Rightarrow p>n^{1/\alpha}\}$，此处 q 表示素数，则由 $Q_{l+1}>0$ 就导出$(1,l)$。

首先是埃斯特曼(T. Estermann)于 1932 年在广义黎曼(G. Riemann)猜想(GRH)之下证明了：每个大偶数都是一个素数与一个不超过 6 个素数之积之和。简单记为$(1,6)_R$。

王元将埃斯特曼的结果改进为：

$$(1,4)_R(1956),(1,3)_R(1957) \tag{2}$$

利用布伦筛法、素数分布理论与林尼克(Yu. V. Linnik)大筛法，瑞尼(A. Renyi)于 1948 年证明了$(1,c)$，此处 c 是一个常数，瑞尼定理的证明中隐含了下面的中值公式：存在 $\delta>0$，使

$$(M_\delta)\sum_{k\leqslant x^\delta}\max_{(l,k)=1}\left|\pi(x;k,l)-\frac{1}{\varphi(k)}\int_z^x\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}\right|$$
$$=O\left(\frac{x}{(\ln x)^{c_1}}\right)$$

此处 $c_1\geqslant 6$ 为一个常数，$\varphi(k)$ 表示欧拉函数及 $\pi(x;k,l)=\sum\limits_{\substack{p\leqslant x\\ p\equiv 1(\bmod k)}}1$，其中 p 过素数$\leqslant x$。若将(M_δ)中的 k 的范围扩大至 $x^{1/2-\varepsilon}$，其中 ε 为任意正数，则(M_δ)就可以用来代替$(1,3)_R$ 证明中的(GRH)。巴尔巴恩(M. B. Barban)与潘承洞分别在 1961 年与 1962 年独立地证明了(M_δ)，其中 $\delta=\frac{1}{6}-\varepsilon$ 与 $\delta=\frac{1}{3}-\varepsilon$。潘承洞并由他的 $M_\delta\left(\delta=\frac{1}{3}-\varepsilon\right)$推出了(1,5)，以后他们又独立得出$(M_\delta)$，其中 $\delta=\frac{3}{8}-\varepsilon$ 并推出(1,4)。

王元指出由潘承洞的$(M_\delta)\left(\delta=\frac{1}{3}-\varepsilon\right)$即能推出(1,4)。

以后，庞比尼(E. Bombieri)与阿·维诺格拉朵夫(A. I. Vinogradov)于 1965 年分别证明瑞尼公式中 k 的范围可以扩大为 $k\leqslant x^{1/2}/(\ln x)^A$ 与 $x^{1/2-\varepsilon}$，此处 $A>0$ 为一个常数，从而由王元证明的$(1,3)_R$ 的方法即推出(1,3)。1966 年，陈景润改进了$(1,3)_R$ 的方法并证明了(1,2)，该结果被称为“陈氏定理”。1975 年，王元与潘承洞、丁夏畦一起给出了陈氏定理的一个简化证明。

王元还将他处理猜想(A)的方法用于小区间中殆素数的分布及$\{F(x):x=1,2,\cdots\}$中的殆素数分布问题，此处 $F(x)$为一个整值多项式。所谓殆素数即素因子个数不超过一个固定常数的整数。我们常常用 P_k 表示素因子个数不超过 k 的殆素数。王元改进了以往的结果，特别地，他首次考虑了小区间中 P_2 的分布。他证明了当 x 充分大时，有 P_2 满足

$$x<P_2\leqslant x+x^{10/17} \tag{3}$$

以后引起不少数学家对(3)进行改进。

2. 圆法与哥德巴赫猜想

圆法起源于哈代(G. H. Hardy)与拉马努金(S. Ramanujan)关于整数分拆与表整数为平方和的一篇文章(1918),接着哈代与李特伍德(J. E. Littlewood)在一系列论文中系统地发展了一个新的分析方法——圆法,并用于华林(G. Waring)问题与哥德巴赫问题。他们在(GRH)之下,基本上证明了猜想(B),即每一个大奇数都是三个素数之和。基于素数变数三角和的天才估计,依·维诺格拉朵夫(I. M. Vinogradov)于 1937 年取消了哈代与李特伍德关于猜想(B)证明中的(GRH)。

林尼克于 1951 年将圆法用来处理小区间中的猜想(A),他的研究涉及密度猜想(DH):命 $0\leqslant v\leqslant 1/2$ 及 $T>0$,命$N(T,v)$表示$\xi(s)$在矩形

$$\frac{1}{2}+v\leqslant\sigma\leqslant 1,\quad |t|\leqslant T$$

中的零点个数,估计式

$$\text{(DH)}\quad N(T,v)\leqslant cT^{1-2v}\ln(T+2)\quad (0<v<1/2)$$

此即密度猜想,它是(RH)的推论,但至今尚未得到证明。1951 年,林尼克在假定(DH)成立时证明了对于任何整数 n 与 $\varepsilon>0$,皆存在素数 p_1,p_2,使

$$|n-p_1-p_2|\leqslant c(\varepsilon)(\ln n)^{7+\varepsilon}$$

其中 $c(\varepsilon)$为依赖于 ε 的正常数,每次出现的值不一定相同。

王元于 1977 年指出了林尼克结果的证明有错并给出了一个正确的证明。详细言之,在较(DH)更弱的假设

$$\text{(DH}')\quad N(T,v)\leqslant c(\varepsilon)T^{1-2v}\ln(T+2)\left(0<v<\frac{12}{37}+\varepsilon,\varepsilon>0\right)$$

之下，他证明了对于任何整数 n，皆存在 p_1,p_2，使

$$|n-p_1-p_2|\leqslant c(\varepsilon)(\ln n)^{148/13+\varepsilon} \tag{4}$$

王元与单墫还证明了：命 q,n 为两个正整数满足 $q\leqslant n/c(\ln n)^2$ 及当 q 为偶数时，n 亦为偶数，则在(GRH)之下，方程

$$n=p_1+p_2+hq$$

恒有解 p_1,p_2,h，其中 p_1,p_2 为素数，h 为整数，适合 $0\leqslant h\leqslant c(\ln n)^2$。这是林尼克一个结果的改进，他原来结果中 h 的范围为 $0\leqslant h\leqslant c(\varepsilon)(\ln n)^{6+\varepsilon}(\varepsilon>0)$。

3. 素数 p 的最小原根

所谓模 p 之原根 g 即模 p 之缩系 $\{1,2,\cdots,p-1\}$ 的生成元。命 $g(p)$ 表示模 p 之最小正原根，依・维诺格拉朵夫首先在 1930 年证明了：

$$g(p)<2^m p^{1/2}\ln p$$

此处 $m=c_0(p-1)$ 表示 $p-1$ 的互异素因子个数。其后，他将自己的结果改进为 $g(p)<2^m p^{1/2}\ln\ln p$。华罗庚、爱多士(P. Erdös)及爱多士与夏皮罗(H. N. Shapiro)又先后进一步证明了

$$g(p)<2^{m+1}p^{1/2},g(p)=O(p^{1/2}\ln^{17}p)$$

与

$$g(p)=O(m^c p^{1/2})$$

其中 c 及与 O 有关常数都是绝对常数。关于 $g(p)$ 的下界估计，吐朗(P. Turan)证明了 $g(p)=\Omega(\ln p)$。而安琦尼(N. C. Ankeng)在(GRH)之下，证明了 $g(p)=O(2^m\ln^2 p\ln^2(2^m\ln^2 p))$。

利用布尔吉斯(D. A. Burgess)方法，王元(1959)与布尔吉斯(1962)独立地证明了

$$g(p)\leqslant c(\varepsilon)p^{1/4+\varepsilon} \tag{5}$$

王元(1959)又将安琦尼的结果改进为：在(GRH)之下有

$$g(p)=O(m^6\ln^2 p) \tag{6}$$

王元还改进了以往关于模 p 的最小 n 次非剩余及佩尔氏(J. Pell)方程最小解的估计。

4. 数论函数的分布

1956 年,王元与辛哲尔用布伦筛法证明了下面的结果:对于任何非负整数矢量 $\underline{\underline{a}}=(a_1,\cdots,a_h)$ 及 $\varepsilon>0$,皆存在整数 n 使

$$\left|\frac{\varphi(n+i)}{\varphi(n+i+1)}-a_i\right|<\varepsilon,\quad 1\leqslant i\leqslant h \tag{7}$$

进而言之,存在常数 $c_0(\underline{\underline{a}},\varepsilon)$ 及 $X_0(\underline{\underline{a}},\varepsilon)$,使当 $X>x_0$ 时,区间 $1\leqslant n\leqslant X$ 中有多于 $c_0X/(\ln x)^{k+1}$ 个 n 适合(7)。

过去辛哲尔只能得到使(7)成立的整数 n 的存在性,但不能得到满足(7)的整数个数的估计。

结合布伦筛法及林尼克-瑞尼大筛法,王元于 1958 年进一步证明了:对于任何非负矢量 $\underline{\underline{a}}$ 及 $\varepsilon>0$,皆存在素数 p 使

$$\left|\frac{\varphi(p+v)}{\varphi(p+v+1)}-a_v\right|<\varepsilon,\quad 1\leqslant v\leqslant h \tag{8}$$

进而言之,存在常数 $c_1(\underline{\underline{a}},\varepsilon)$ 与 $X_1(\underline{\underline{a}},\varepsilon)$,使当 $X>X_1$ 时,区间 $1\leqslant n\leqslant X$ 中有多于 $c_1X/(\ln x)^{h+2}\ln\ln x$ 个素数适合(8)。

将欧拉函数换成其他数论函数仍有相应的结果。

5. 丢番图方程与不等式的最小解

对于复矢量 $\underline{\underline{x}}=(x_1,\cdots,x_s)$,命 $|\underline{\underline{x}}|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant s}|x_i|$,对于复系数型 F,命 $|F|$ 表示 F 的系数的最大绝对值。对于每一个 k 次型 F,皆对应一个型 $\hat{F}(\underline{\underline{x}}_1,\cdots,\underline{\underline{x}}_k)$,它关于每个 $\underline{\underline{x}}_i(1\leqslant i\leqslant k)$ 都是线性的,且 $F(\underline{\underline{x}})=\hat{F}(\underline{\underline{x}}_1,\cdots,\underline{\underline{x}}_k)$。

施密特(W. M. Schmidt)于 1980 年证明了下述结果:给予整

数 $h\geqslant 1,m\geqslant 1$ 及奇数 $k_1,\cdots,k_h$ 与一个任意大的数 E,皆存在

$$c_0=c_0(k_1,\cdots,k_{h_j},\cdots,E)$$

使若 $M\geqslant 1$ 及 $F_1,\cdots,F_h$ 分别为 $\underline{\underline{x}}=(x_1,\cdots,x_s)$ 的次数为$k_1,\cdots,k_h$ 的实系数型,则当 $s\geqslant c_0$ 时有 m 个右 Z^s 上线性独立的点 $\underline{\underline{x}}(1),\cdots,\underline{\underline{x}}(m)$,使

$$|\underline{\underline{x}}(i)|\leqslant M,\quad 1\leqslant i\leqslant m$$

及

$$|\hat{F}_j(\underline{\underline{x}}(i_1),\cdots,\underline{\underline{x}}(i_{k_j}))|\ll m^{-E}|F_j|$$
$$1\leqslant j\leqslant h,1\leqslant i_1,\cdots,i_{k_j}\leqslant m$$

由此推出:给予 $h\geqslant 1,m\geqslant 1$,奇数 $k_1,\cdots,k_h$ 及 $\varepsilon>0$ 任意小,皆存在常数 $c_1=c_1(k_1,\cdots,k_h;m,\varepsilon)$,使当 $G_1,\cdots,G_h$ 分别为 $\underline{\underline{x}}=(x_1,\cdots,x_s)$ 的次数为 $k_1,\cdots,k_h$ 的整系数型,此处 $s\geqslant c_1$,则 $G_1,\cdots,G_h$ 在 m 个整点 $\underline{\underline{x}}(1),\cdots,\underline{\underline{x}}(m)$ 张成的 m 维子空间上皆为零,此处

$$|\underline{\underline{x}}(i)|\ll G^{\varepsilon},\quad 1\leqslant i\leqslant m$$
$$G=\max(1,|G_1|,\cdots,|G_h|)$$

取一个型 $F=x_1^2+\cdots+x_s^2$,即可知在施密特的上述结果中必须限制诸型的次数皆为奇数。王元考虑将型的丢番图不等式在全复代数数域中求解,从而取消了型的次数为奇数这一限制。详言之,命 K 为一个 $2r$ 次全复代数数域,其整数环记为 J,对于 $\xi\in K$,命 $\xi^{(i)}(1\leqslant i\leqslant 2r)$ 表示 ξ 的共轭数及 $\|\xi\|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 2r}|\xi^{(i)}|$,当 $\underline{\underline{\lambda}}=(\lambda_1,\cdots,\lambda_s)$ 时,命 $\|\underline{\underline{\lambda}}\|=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant s}\|\lambda_j\|$。

王元于 1988 年证明了下面的结果:给予正整数 h,m 及 $k_1,\cdots,k_h$,及一个任意大的整数 E,皆存在常数

$$c_2=c_2(k_1,\cdots,k_h;m,r,E)$$

使若 $M\geqslant 1$ 及 $F_1,\cdots,F_h$ 分别为 $\underline{\underline{\lambda}}=(\lambda_1,\cdots,\lambda_s)$ 的次数为$k_1,\cdots,k_h$ 的复系数型,此处 $s\geqslant c_2$,则在 J^s 中有 m 个线性独立点,$\underline{\underline{\lambda}}(1),\cdots,$

$\underset{=}{\lambda}(m)$，满足

$$\| \underset{=}{\lambda}(i) \| \leqslant M, 1 \leqslant i \leqslant m$$

与

$$|\hat{F}_j(\underset{=}{\lambda}(i_1), \cdots, \underset{=}{\lambda}(i_{k_j}))| \ll M^{-E} |F_j|, 1 \leqslant i \leqslant h, 1 \leqslant i_1, \cdots, i_{k_j} \leqslant m$$

由此也可以推出系数属于 J 型方程系的最小解的类似结果。

关于模 p 的二次同余方程的最小解问题，希斯-布朗(D. R. Heath-Brown)于 1985 年证明过：命 $Q(\underset{=}{x})=Q(x_1, \cdots, x_4)$为整系数二次型，$p$ 为素数，则同余方程

$$Q(\underset{=}{x}) \equiv 0 \pmod p$$

有解 $\underset{=}{x}$ 适合

$$0 < \max_{1 \leqslant i \leqslant 4} |x_i| \ll \sqrt{p} \ln p$$

柯克朗(Todd Cochrane)将上式的右端改进为$\sqrt{p}$。这是最佳可能的结果。

王元于 1989 年及 1993 年分别将上述结果推广至任意有限域。王元还研究了代数数域中同余方程组的最小解问题。

二、近似分析与统计

6. 近似分析中的数论方法

近似分析中的数论方法的理论基础为数论中韦尔(H. Wegl)的一致分布论。其要点为找出空间中较小偏差的点列，称为伪随机数，用它来代替蒙特卡罗方法中的随机数作统计模拟。所以这种方法又称为伪蒙特卡罗方法。其最成功的应用为高维定积分的近似计算法。

假定 $f(\underset{=}{x})=f(x_1, \cdots, x_s)$为单位立方体 $G_s=\{\underset{=}{x}: 0 \leqslant x_i \leqslant 1, 1 \leqslant i \leqslant s\}$上定义的函数，我们要求定积分

$$I=\int_{G_s} f(\underline{\underline{x}})\mathrm{d}\underline{\underline{x}},\quad \mathrm{d}\underline{\underline{x}}=\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_s$$

的近似值，不妨假定 $f(\underline{\underline{x}})$ 为 G_s 上的周期函数，且每个变数有周期 1，假定 $f(\underline{\underline{x}})$ 有绝对收敛的傅里叶(J. B. J. Fourier)展开

$$f(\underline{\underline{x}})=\sum_{-\infty}^{\infty}C(\underline{\underline{m}})\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(\underline{\underline{m}},\underline{\underline{x}})}$$

$$=\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{m_s=-\infty}^{\infty}C(m_1,\cdots,m_s)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(m_1k_1+\cdots+m_sk_s)}$$

此处

$$|C(\underline{\underline{m}})|\leqslant\frac{C}{\|\underline{\underline{m}}\|^{\alpha}},\quad \|\underline{\underline{m}}\|=\overline{m_1}\cdots\overline{m_s}$$

$$\overline{m}=\max(1,|m|)$$

其中，$\alpha>1$ 及 $C>0$ 为绝对常数。这种函数类记为 $E_s^{\alpha}(C)$。

卡罗波夫(N. M. Konolov)(1959)与那夫卡(E. Hlawka)(1962)独立地证明了对于素数 p，存在整矢量 $\underline{\underline{a}}(a_1,\cdots,a_s)$，使

$$\sup_{f\in E_s^{\alpha}(C)}\left|\int_{G_s}f(\underline{\underline{x}})\mathrm{d}\underline{\underline{x}}-\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}f\left(\frac{k\underline{\underline{a}}}{p}\right)\right|$$

$$=O\left(\frac{C(\ln p)^{\alpha s}}{p\alpha}\right)$$

此处与 O 有关的常数仅依赖于 α,s。这一方法的误差比一维古典方法的直接推广的误差 $O(n^{-\alpha/s})$ 及蒙特卡罗方法的概率误差 $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 要好得多，其中 n 表示求积公式所需的点数。但欲得到 $\underline{\underline{a}}(p)$ 的初等运算量为 $O(p^2)$，所以寻求一个依赖于分点个数 N 的整矢量 $\underline{\underline{a}}(N)$ 是很重要的问题。

命 $F_n(n=0,1,\cdots)$ 为斐波那契(L. P. Fibonacci)数列，即由 $F_0=F_1=1,F_{n+2}=F_{n+1}+F_n(n\geqslant 0)$ 定义的整数列，巴赫瓦洛夫(N. S. Bahvalov)(1959)与华罗庚及王元(1960)独立地证明了

$$\operatorname*{Sup}_{f\in E_2^\alpha(c)}\left|\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{1}{F_n}\sum_{k=1}^{F_n}f\left(\frac{k}{F_n},\frac{F_{n-1}k}{F_n}\right)\right|$$
$$=O\left(\frac{C\ln 3F_n}{F_n^\alpha}\right) \tag{9}$$

而华罗庚与王元还证明了式(9)右端的 $\ln 3F_n/F_n^\alpha$ 是最佳可能的结果。算出 F_n 所需的初等运算量仅为 $O(\ln 3F_n)$。

华罗庚与王元在一系列论文(1964～1974)中将他们的方法推广至 $s>2$ 的情况。他们的方法基于由一个 s 次全实代数数域 K 的一组独立单位出发，构造出 K 的一组单位 η_k ($k=1,2,\cdots$)满足

$$\eta_k=\eta_k^{(1)}>k,\eta_k^{(i)}\ll\eta_k^{\frac{1}{s-1}},2\leqslant i\leqslant s$$

假定 K 的基底为 ω_j ($1\leqslant j\leqslant s$)，其中 ω_j ($1\leqslant j\leqslant s-1$)为无理数，则

$$\sum_{i=1}^{s}\eta_k^{(i)}=n_k,\sum_{i=1}^{s}\omega_j^{(i)}\eta_k^{(i)}=h_{j,k},1\leqslant j\leqslant s-1$$

都是有理整数，于是联立有理逼近

$$\frac{h_{j,k}}{n_k}=\omega_j+O(n_k^{-1-\frac{1}{s-1}}),1<j\leqslant s-1$$

命 $\underline{\underline{h}}_k=(1,h_{1,k_1},\cdots,h_{s-1,k})$，这就是 n_k 所对应的整矢量。于是得求积公式

$$\operatorname*{Sup}_{f\in E_s^\alpha(c)}\left|\int_{G_s}f(\underline{\underline{x}})\mathrm{d}\underline{\underline{x}}-\frac{1}{n_k}\sum_{m=1}^{n_k}f\left(\frac{m\,\underline{\underline{h}}_k}{n_k}\right)\right|$$
$$=O(Cn_k^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2(s-1)}+\varepsilon}) \tag{10}$$

其中与 O 有关的常数依赖于 ε，在此得到矢量 $\underline{\underline{h}}_k$ 的计算量仅为 $O(\ln n_k)$，在实际操作时，华罗庚与王元建议使用分圆域 $Q(\cos\frac{2n}{m})$ ($m\geqslant 5$)。华罗庚与王元关于(9)的另一推广基于雅可比(C. Jacobi)-佩龙(O. Perron)算法。

命 $\underline{\underline{r_i}}=(r_{1i},\cdots,r_{ti})$，$1\leqslant i\leqslant s$ 为实矢量，$\underline{\underline{q}}=(q_1,\cdots,q_t)$ 为整