

科學圖書大庫

# 實用光學與光學工程

(第二冊)

## 光學組件及其製造與使用

譯者 張定昌

徐氏基金會出版

4

32

科學圖書大庫

# 實用光學與光學工程

(第二冊)

光學組件及其製造與使用

譯者 張定昌

徐氏基金會出版

# 我們的工作目標

文明的進步，因素很多，而科學居其首。科學知識與技術的傳播，是提高工業生產、改善生活環境的主動力。在整個社會長期發展上，乃對人類未來世代的投資。從事科學研究與科學教育者，自應各就專長，竭智盡力，發揮偉大功能，共使科學飛躍進展，同將人類的生活，帶進更幸福、更完善之境界。

近三十年來，科學急遽發展之收穫，已超越以往多年累積之成果。昔之認為若幻想者，今多已成為事實。人類一再親履月球，是各種科學綜合建樹與科學家精誠合作的貢獻，誠令人無限興奮！時代日新又新，如何推動科學教育，有效造就科學人才，促進科學研究與發展，尤為社會、國家的基本使命。培養人才，起自中學階段，此時學生對基礎科學，如物理、數學、生物、化學，已有接觸。及至大專院校專科教育開始後，則有賴於師資與圖書的指導啓發，始能為蔚為大器。而從事科學研究與科學教育的學者，志在貢獻研究成果與啓導後學，旨趣崇高，彌足欽佩！

本基金會係由徐銘信氏捐資創辦；旨在協助國家發展科學知識與技術，促進民生樂利，民國四十五年四月成立於美國紐約。初由旅美學人胡適博士、程其保博士等，甄選國內大學理工科優秀畢業生出國深造，前後達四十人，惜學成返國服務者十不得一。另曾贈送國內數所大學儀器設備，輔助教學，尚有微效；然審情度理，仍嫌未能普及，遂再邀請國內外權威學者，設置科學圖書編譯委員會，主持「科學圖書大庫」編譯事宜。以主任委員徐銘信氏為監修人，編譯委員王洪鎰氏為編輯人，各編譯委員擔任分組審查及校閱工作。「科學圖書大庫」首期擬定二千種，凡四億言。門分類別，細大不捐；分為叢書，合則大庫。為欲達成此一目標，除編譯委員外，本會另聘從事

翻譯之學者五百餘位，於英、德、法、日文出版物中精選最近出版之基本或實用科技名著，譯成中文，供給各級學校在校學生及社會大眾閱讀，內容嚴求深入淺出，圖文並茂。幸賴各學科之專家學者，於公私兩忙中，慨然撥冗贊助，譯著圖書，感人至深。其旅居國外者，亦有感於為國人譯著，助益青年求知，遠勝於短期返國講學，遂不計稿酬多寡，費時又多，迢迢乎千萬里，書稿郵航交遞，其報國熱忱，思源固本，至足欽仰！

今科學圖書大庫已出版一千餘種，都二億八千餘萬言；尚在排印中者，約數百種，本會自當依照原訂目標，廣續進行，以達成科學報國之宏願。

本會出版之書籍，除質量並重外，並致力於時效之爭取，舉凡國外科學名著，初版發行半年之內，本會即擬參酌國內需要，選擇一部份譯成中文本發行，惟欲實現此目標，端賴各方面之大力贊助，始克有濟。

茲特掬誠呼籲：

**自由中國大專院校之教授，研究機構之專家、學者，與從事工業建設之工程師；**

**旅居海外從事教育與研究之學人、留學生；**

**大專院校及研究機構退休之教授、專家、學者**

主動地精選最新、最佳外文科學名著，或個別參與譯校，或就多年研究成果，分科撰著成書，公之於世。本基金會自當運用基金，並藉優良出版系統，善任傳播科學種子之媒介。尙祈各界專家學人，共襄盛舉是禱！

徐氏基金會 敬啓

中華民國六十四年九月

## 譯 者 序

本書係一集體著作，分由專家本其歷年從事光學設計及製造之實際經驗發抒爲之，藉供青年工程師們之參考。原名“Applied Optics and Optical Engineering”故逕譯爲“實用光學與光學工程”。本譯本爲第二冊，內容著重於特種光學分件及其製造、結構與應用。

近年來科技發展異常神速，使用光學儀器之領域特多，惟世界各國設有光學工程科系之學府尚不多見，故而有關該方面之實用文獻真是鳳毛麟角，有則散見於各篇查閱匪易。本書之成實可因應各方之殷切需求，貢獻殊鉅。

本書名詞凡有標準譯名者，莫不儘予採用，惟部分無從查考者，則由譯者試譯并附原文參考，凡不常見之人名或專有名詞，均逕用原文而不另譯。由於本書內容極爲專門，而譯者本人又才薄學淺，雖已竭盡所能，恐仍難免疏失謬誤之處，尚祈海內外專家學者不吝指正幸。

# 目 錄

## 譯者序

## 第一章 透鏡設計..... 1

- 第一節 透鏡的設計過程..... 1
- 第二節 設計者的工具... 4
- 第三節 簡單無色差透鏡的設計..... 18
- 第四節 柯克三重物鏡的設計..... 20
- 第五節 其他形式的透鏡..... 24
- 第六節 自動調焦透鏡的設計..... 31
- 第七節 自動改進的程式..... 35

## 第二章 光學製造..... 39

- 第一節 緒論..... 39
- 第二節 製造透鏡及鏡子的各種材料..... 41
- 第三節 光學加工..... 52
- 第四節 表面檢驗..... 72
- 第五節 膠合..... 72
- 第六節 光學圓柱..... 74
- 第七節 近似球面鏡..... 76
- 第八節 光學元件的裝配

- ..... 80
- 第九節 大型光學另件... 81

## 第三章 攝影物鏡..... 84

- 第一節 緒論..... 84
- 第二節 基本形式的演進史..... 84
- 第三節 早期形式的各種後續品..... 90
- 第四節 特種物鏡..... 102
- 第五節 複印物鏡..... 107
- 第六節 變像系統..... 110
- 第七節 可變焦距與自動調焦物鏡..... 114
- 第八節 反射物鏡..... 120
- 第九節 非球面物鏡..... 123
- 第十節 一般參考文獻... 125

## 第四章 顯微鏡物鏡..... 126

- 第一節 緒論..... 126
- 第二節 鑑別力..... 126
- 第三節 數值鏡徑..... 129
- 第四節 放大率..... 131
- 第五節 玻璃罩..... 133
- 第六節 焦點深度..... 136
- 第七節 視場範圍..... 137
- 第八節 顯微鏡物鏡像的品質..... 138

第九節 顯微鏡物鏡的裝置.....	142	第二節 反射定律.....	233
第十節 物鏡的種類.....	145	第三節 鏡系統中像的位置.....	239
第十一節 最佳物鏡的選擇.....	156	A. 單鏡.....	239
第十二節 物鏡的防護保養.....	158	B. 雙鏡.....	240
<b>第五章 完整物鏡的測試</b> .....	<b>160</b>	C. 結論.....	243
第一節 緒論.....	161	D. 第三個範例.....	244
第二節 像品質的測定.....	161	第四節 反射矩陣.....	245
第三節 透鏡的目視測試.....	163	第五節 普通稜鏡系統.....	258
第四節 像的光度測定.....	177	第六節 稜鏡的分類.....	263
第五節 照相試驗.....	195	第七節 稜鏡的數據表.....	267
<b>第六章 眼用透鏡</b> .....	<b>200</b>	<b>第八章 鏡面鍍膜</b> .....	<b>270</b>
第一節 緒論.....	200	第一節 緒論.....	270
第二節 材料.....	202	第二節 紫外線，可見光線，與紅外線等無防護的鏡面鍍膜.....	271
第三節 常備透鏡的尺寸與形狀.....	204	第三節 有防護層的鏡面鍍膜與增加反射比的表面鍍膜.....	280
第四節 軸向鏡度.....	205	第四節 濾光性的鏡子.....	285
第五節 透鏡形式與厚度.....	208	第五節 真空紫外線的反射鍍膜.....	286
第六節 校正曲線透鏡的設計.....	211	<b>第九章 目鏡與放大鏡</b> .....	<b>290</b>
第七節 複焦點透鏡的類別.....	214	第一節 放大倍率.....	290
第八節 安全透鏡.....	219	第二節 觀看技巧.....	291
第九節 眼用透鏡的製造.....	220	第三節 折光常數.....	291
第十節 檢驗方法與公差.....	230	第四節 光柱的橫切面與光學製造的條件.....	292
<b>第七章 鏡與稜鏡系統</b> .....	<b>233</b>	第五節 放大鏡.....	293
第一節 緒論.....	233	第六節 高倍放大鏡與目鏡.....	293

第七節	目鏡的一般要點	295
第八節	負目鏡	315
第九節	望遠顯微鏡	316
第十節	有物鏡作用的目鏡	317



# 第一章 透鏡設計

## 第一節 透鏡的設計過程

透鏡在能製作之前，當須先行設計；換言之，鏡面的曲率半徑，各種零件的厚度、空間、與直徑、以及所用玻璃的種類等等，均須予以決定及說明。透鏡之所以如此複雜，其原因則以所有發自物體各種波長的光線，在理想的情形下，必須令其精確地通過該物點的像，一個平面物體所成的像，必須仍為一平面，凡是直線的像，都應無絲毫的歪曲變形。

設計者幾乎不管在任何情況下，都限制於使用球面來折射或反射，包含球面半徑無窮大時，以其球面作為平面的情形在內。下一章所述的標準製造過程，足可生產極度精確的球面，但是，擴大設計者的自由允其運用非球面的嘗試，則導致了極為困難的製造問題，因之，非球面的使用，僅在情非得已之時，方始為之。典型的實例，則見之於第V節中，G段所述的“席密第像機”（Schmidt Camera）。基於透鏡功能的觀點來尋求其結構數據上的數學解答，是過於複雜而無實際上的可能。所能採取的最佳途徑，莫過於利用我們已有的光學知識，確立第一個可能的方法，加以研判、修改、再研判等等步驟。此種過程可用下述的流路圖說明之（圖1）。

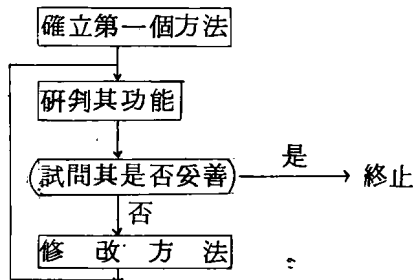


圖1 表示透鏡設計過程的流路圖

科學家經常都將一個複雜的情事，試行分解成一件一件的小部分，對透鏡何能例外？數百年來，透鏡能生成不良的影像，亦即是所謂的各種像差，已是不容否認的事實，每一種像差都可因其組成的透鏡元件之變換，而有所變化。典型的像差計有球面像差、色像差、像散差與畸變，但是，任何透鏡中，像差的出現，并非單獨存在，都是相伴而生，“校正”（或消除）其中的一種，也僅能作局部的改善，無法頓收整體的效果。有些像差祇要將透鏡元件的形狀，稍作改變，即可隨之變化。至於其他的像差，則須大費周章，始能為功。時至今日，要設計一個具有高性能，廣角度而影像清晰的鏡頭，仍然是一個非常困難的問題，可能須窮數月之力，始克有成。這些時間全花在繁冗的光學計算上，其結果至少須達七位數字的準度。這種繁重的工作，迄至1925年，都是運用對數方法行之，嗣後改用電動計算機，及至1950年，始由電腦取代。現在，幾乎每一個透鏡設計者，都運道十足，或多或少都有某種型式的電腦可資利用，不管小型的也好，大型高速的也罷，雖然費用甚高，但總算十分普遍。

透鏡結構中的元件，能由設計者改變者，稱為“自由度”。此等包含表面的曲率半徑，厚度與空間，鏡片的折射率與色散率。可是，無論何時，透鏡的焦距都必須維持，不然，透鏡相對的鏡徑與像高可能改變，乃至設計人所得的，確是一個優良的透鏡，但并非原來所求者。因而，結構上每一項所作的變更，必伴隨着其他的改變，俾使焦距保持定值。同時，假若透鏡是用於固定的放大倍數，此項倍率，無論何時在物體與影像既定的距離內，必須予以維持。

設計的人也應時時刻刻記着、透鏡的元件、所費不貲，因此，應儘可能予以少用，以節省成本。有時，影像的品質當然是一項重要考慮的因素，際此情形，透鏡的複雜性與尺寸大小就不須予以限制。為了經濟的理由，促請設計的人使用較少的分件，選用較平的表面（以便一塊型板可以同時研磨較多的透鏡），利用較廉的玻璃與較厚的透鏡元件（厚者在製造業中，易被邊框夾牢，不易破碎）。

一件設計的初期，透鏡設計者經常寧可將透鏡視為由許多個別的透鏡所組成的一個系統，而不視之為由獨立的折射面所組成。其優點則為一個元件當被彎曲時，可能改變一個像差（譬如，球面像差），但不致於改變其他諸種（例如，色像差），以及影響焦點距離。首先，這些透鏡元件，可能認為非常的薄，同時，可以利用許多公式計算由此等分離的薄型元件所組成系統的像差。至此，所謂的自由度則為倍率，形狀（彎曲度），薄型元件的間隔

，以及各種不同鏡片的折射性質。將這些自由度稍加改變，一般而言，可能使薄型系統的像差減低到接受的程度。設計者然後將每一薄片代之以實際粗厚的元件。自此以後，可以改變個別的折射面，同時，也可能改變元件的厚度，以便完成整個的設計。

目前，現有各種光學玻璃的類別，似乎寬廣，但并不如想像中那麼廣大，因為所有玻璃的折射率，都擁擠在由 1.47 至 1.90 的狹小範圍內，而色散率倒數（ $V$ ）則落於 25 至 70 之間。在紅外線區域內，折射率的範圍較廣，有時可高達 4.0 左右，惟此等材料，對可見光線一般都不透明。

透鏡欲求其絕對完美無瑕，實屬幻想，事實上，亦無此必要。光線的有限波長，產生一些繞射，即使是一個完美系統所生成的影像，亦將因之模糊不清。只要代表單一物點所計算影像的幾何光點，小於該物點的繞射影像，而且整個範圍，均是如此，則這一光學系統，可說是“有限的繞射”達到了應有的完美。真正繞射有限的透鏡，迄今所能設計者，少之又少，但持續地配合高速電子計算機的應用，其實現的可能，當為期不遠。

除却目前所謂的自由度以外，設計者尚有其他條件供其支配，其中之一是兩塊透鏡膠合一起的分界面。假若分界面兩邊鏡片的折射率相同，而色散率則不一致，分界面則稱之為“隱藏面”（buried surface），改變曲率半徑就將改變色像差而毫不影響其他的補救措施。假若在膠合力極強的表面兩側，折射率有些微的相差，接近透鏡光軸的光線，極少受到影響，只有靠近透鏡邊緣的光線折射較大。光線偏離隨入射高度的改變是非常不成比例，這種表面在某些情況下尚頗具價值。與此相反之情形，一個分隔兩種折射率相差極大的介質而彎曲極微的曲面，在光線偏折上增加的比例較多。這於改正其他種類的像差，亦具價值。一個精明的設計人員，當善於利用此等特性，小心選用鏡片的色散率，以期對色像差獲致預期的控制。當然此一步驟之是否成功，端賴有無多種玻璃類別可資選用。

另一種控制像差而有價值的方法是對稱一途。經 Bow 及 Sutton 二位先生的證明，一個對於中心點對稱的光學透鏡系統，可以自動改善三種橫向的像差（慧形差，橫向色差，及畸變），只要某些條件能符合，這項改善對所有目標的距離，都能持續不輟。對稱攝影用的物鏡，如馳名已久的 Goerz Dagor 鏡頭，仍在繼續生產供銷。對稱形式使用得最多者，莫過於照相刻版用彩色攝影鏡頭，也同時用於放大或複印方面，此等的放大倍率，都接近於一倍。

就設計者而論，透鏡系統，以其所涵蓋的角度範圍而言，可分為兩大類。望遠鏡與顯微鏡的物鏡，要求其所生成的影像清晰，靠近透鏡的光軸，而照相用的物鏡，則不然，要求其涵蓋的角度要寬廣。目鏡、聚光鏡、及照相機的觀察鏡等，則形成了另一類單獨的系統，此乃由於所成的影像、距離甚遠，以致透鏡的直徑要遠大於軸向的光束，俾可容納足夠的視野。對本類而言，尚可再細分為自動調整焦距以及影像變形等系統，此乃由於設計這些特殊系統時，遭遇到甚多不尋常難題的原故。

## 第二節 設計者的工具

### A 光線的追蹤

位於透鏡軸線與物點所成平面的光線，稱為子午光線。此外尚有許多其他發自另一軸向物點的射線而穿越子午面前透鏡的各部分者，這些光線都稱之為斜射線 (Skew ray)，需特殊的處理。

所謂斜射線係由一射線穿越原折射面一點的座標 (可能為原有的物平面) 與其本身又作為另一折射面的入射線的方向餘弦  $K, L, M$  而定其意義。在折射面上入射點的坐標  $X, Y, Z$  設定如下：

$$X = KD + (X_0 - d); \quad Y = LD + Y_0; \quad Z = MD + Z_0 \quad (1)$$

式中  $D$  是  $X_0, Y_0, Z_0$  至  $XYZ$  沿着射線的長度， $d$  是兩折射面在光軸上兩頂點間的距離 (圖 2)。

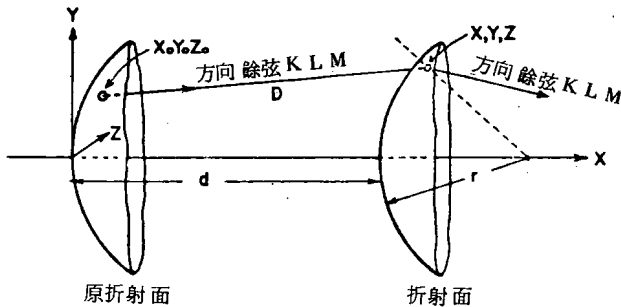


圖 2 斜射線自折射面轉移到另一折射面的情形

設  $r$  為一球的半徑，則其折射面的方程式為

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - 2rX = 0 \quad (2)$$

將前述的(1)式代入(2)式中，可解之而得  $D$ ：

$$D^2 - 2rD \left[ K - \frac{KX_0 + LY_0 + MZ_0 - Kd}{r} \right] + r \left[ \frac{(X_0 - d)^2 + Y_0^2 + Z_0^2}{r} - 2(X_0 - d) \right] = 0 \quad (3)$$

將  $D$  的值再代回(1)式中，可得到  $(X, Y, Z)$  的座標，亦即是入射點在折射面上的位置。

在入射點上法線的方向餘弦為

$$k = 1 - X/r; \quad l = -Y/r; \quad m = -Z/r$$

入射角， $I$ ，則表示如下

$$\cos I = Kk + Ll + Mm = K - (KX + LY + MZ) / r$$

$$\text{而 } \cos I' = [1 - n^2(1 - \cos^2 I) / n'^2]^{1/2} \quad (4)$$

折射線的方向餘弦  $(K', L', M')$ ，可由下式求得

$$n'K' = nK - J(X - r); \quad n'L' = nL = JY; \\ n'M' = nM - JZ$$

$$\text{而 } J = (n' \cos I' - n \cos I) / r \quad (5)$$

計算以上各式的順序，則為(3)，(1)，(4)，及(5)。

射線轉移到下一個表面，自可如法泡製，只要將現行折射面上的  $X, Y, Z$  作為下一折射面的  $X_0, Y_0, Z_0$ 。以及將  $K', L', M'$  用作新的  $K, L, M$  即可。

## B 透鏡的像差

### 1. 軸向像差

有一個典型的望遠鏡物鏡，係膠合而成的雙透鏡，其焦距為 10 個單位，鏡徑為 2 個單位，且由普通冕牌玻璃及鉛玻璃製成，假若由此一透鏡鏡徑的三個區域（邊緣區，十分之七區及順軸區）來追踪觀察四種波形（C, D, F 及 g）的一組光線，可調製成各種光線相交波長的表如下：

	C	D	F	g
邊緣區	9.5320	9.5302	9.5414	9.5648
十分之七區	9.5300	9.5257	9.5301	9.5475
順軸區	9.5368	9.5303	9.5290	9.5414

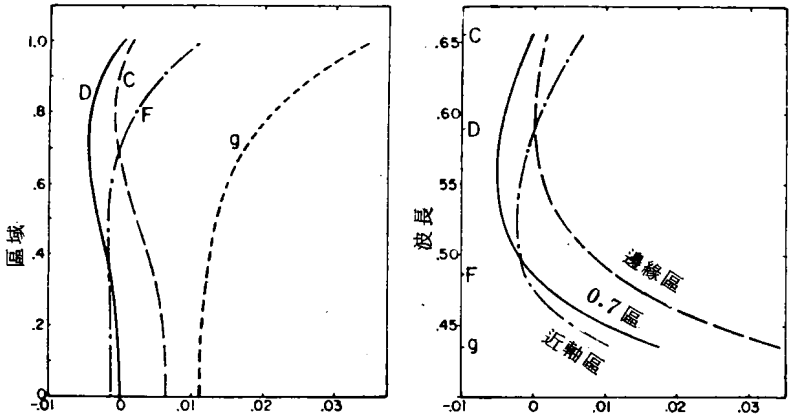


圖 3 消色雙透鏡的球面色差

前述數據可繪成兩種曲線如第 3 圖。左側表示透鏡四種波長的“球面像差曲線”，右側顯示一個透鏡在三個選定區域內的色像差曲線。整個現象則稱之為“球面色差”(Spheromatism)或為球面像差的色異。應注意者，每一球面像差曲線，均有彎曲部份，以及由於在光軸上下相等距離的光線，完全一致，故可以鏡徑偶次方的級數來表示其像差：

$$\text{縱向球面像差} = a S^2 + b S^4 + \dots$$

式中  $S$  為透鏡中一個區域的半徑。假若， $a S^2$  及  $b S^4$  兩項符號相反，在邊緣區之值相等，同時所有較高次各項量極微小可以忽而不計，則可獲得類似圖 3 中的光線  $D$  所示的曲線。在內側各區，殘餘而校正不足者，則已知為“區間像差”。在藍色光線 ( $F$ ) 中，正的四次方一項勝過負的二次方者，但在紅色光 ( $C$ ) 中，則不如此。這乃由於膠合面的過度校正的措施，在藍色光中較強，而在紅色光中則較弱，其之所以如斯，則因透鏡所用玻璃的

折射率隨波長而改變之故。

射綫  $C$  與  $F$  相交於十分之七區域的事實，已顯示色散差的改善已儘其可能了。因為該區域以外過度校正部份相等於區域以內校正不足部份。惟應注意黃色射綫  $D$  的焦點較  $C-F$  組合的焦點更接近於透鏡。藍色的各焦點則遠離於透鏡。此一現象已知為“副光譜”。迄今，它仍然是最難於校正的像差之一。因其產生乃由藍色到紅光的色散，其比率不等之故，而這是冕牌玻璃及鉛玻璃典型的現象。要消除副光譜，就得尋求一低色散的物質具有較寬的藍色光譜，或是另求一高色散的鉛玻璃具有較短的藍色光譜。前者稱為“長冕玻璃”，後者稱為“短鉛玻璃”。一種典型的長冕玻璃是透明晶狀的氟石，有些塑膠也展示了或多或少的類似現象。多數廠商都擁有一些短鉛玻璃；惟因其化學性能常欠穩定，在潮濕的空氣中，表面上易起水泡，不幸者，其藍色光譜僅較一般鉛玻璃具有相同色散率者略為稍短。副光譜的改善，在一些鏡徑與視野不大的大型光學系統中，是一項非常迫切的問題，至於其他所有像差，實際上都可克服。

## 2. 斜像差

a. 畸變 今設一光綫，自透鏡軸線一側的物點，斜射入透鏡。假若，光柱的主要射綫（中間的）穿入影像平面，其高度為  $H'$ ，又假若理想的像高度由高斯光學（Gaussian optics）而得  $H'_0$ （ $H'_0 = f \tan U_F$ ，適用於遠處物體；或  $H'_0 = H \cdot m = Hu_1 / u'_x$  適用於近處物體），則

$$\text{畸變} = H' - H'_0 = aH'_0^3 + bH'_0^5 + \dots$$

畸形常以理想像的高度  $H'_0$  的百分率表示之。因為畸形經常隨像高度的三次方而改變，一項正值則可令一個正方形的像每一處變大而成凹邊尖角形，反之，若是一負值，可使之每一處縮小而成凸邊鈍角的桶形（如圖 4）。然而，在某些廣角鏡頭中，五次方的一項可能大得足以克制高傾斜時第三次方的一項，而使視野極外緣部份的畸變符號相反。

b. 橫向色差 兩種色彩主要光綫高度間的差異，稱之為“橫向色差”，或是透鏡的色差放大率可以下式表示之

$$\text{橫向色差} = H'_F - H'_C = a + bH'_s + cH^5 + \dots$$

常數項  $a$  表示焦距的改變，或隨波長而改的放大倍率，其他諸項實在就是畸變的色彩變異。

c. 歪斜球面像差 幾乎在所有透鏡中，球面像差當傾斜增加時，有逐漸過度校正之勢。圖 5 是說明一個校正良好而為三重攝影物鏡的現象，至於該一

鏡頭焦距為 10 個單位，相對的鏡徑為  $f/2.8$ ，圖中垂直座標， $A$ ，表示進入射線與第一個透鏡切平面所交接的高度。傾斜度漸次增高，頂部的歪斜光線，在透鏡後方鏡面上已使其逐漸變淡而削弱。下部的歪斜光線，似無甚變化

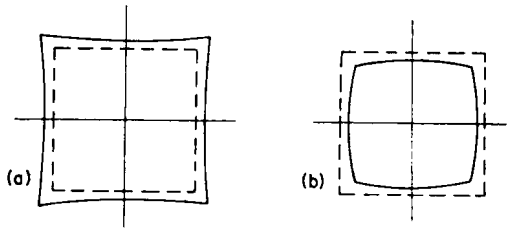


圖 4 畸變 (a) 凹邊尖角形 (b) 凸邊鈍角桶形圖

，大致具有相同高度的  $A$  值。垂直的虛線示意順軸的焦平面；對此鏡頭而言，平均最佳的焦距是在順軸影像之左約 0.05 單位。

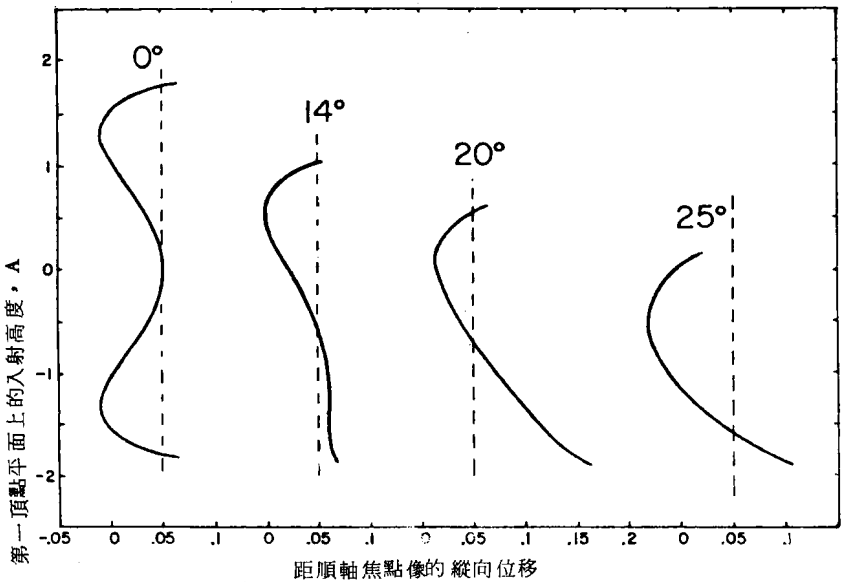


圖 5 球面像差因傾斜增加，而校正過度的現象



d. 慧形像差 慧形像差最簡單的概念，就是假想射線來自透鏡單一區域的上下兩方相交位於同一光束主要射線上方或下方的一點，實際上，此一情勢非常複雜，斷非三言兩語所能解釋，從一透鏡鏡徑的單一區域，透射而來的一族光線，在最佳的焦平面上描繪出一個圖形兩次，而這圖形即是慧形差較低級時的一個圓圈，但對較高級者則為一環甚至而為一短徑向線。總之，像因焦點失調所呈的形狀在最佳像平面以內或以外相等距離的位置完全一樣無何不同。



圖 6 慧形差：透鏡單一區域的光線，焦點失調過與不及的像差情形

慧形差隨鏡頭的鏡徑與傾斜度而變，有兩種慧形差的無窮量，由透鏡區域半徑  $S$  的偶次方，及傾斜或影像高度  $H$  的奇次方決定之。其表示方程式如圖 7。在這一圖中各傾斜虛線之間，已分別出慧形差的“等級”，如第三，第五等等，等級的組成由鏡徑及區域影像高度的方次總合而定。

$$\begin{array}{l}
 \text{慧形差} = \frac{S^2 H^3}{\text{第三級}} + \frac{S^4 H^5}{\text{第五級}} + \frac{S^6 H^7}{\text{第七級}} + \frac{S^8 H^9}{\text{第九級}} + \dots \\
 + \frac{S^2 H^5}{\text{第三級}} + \frac{S^4 H^7}{\text{第五級}} + \frac{S^6 H^9}{\text{第七級}} + \dots \\
 + \frac{S^2 H^7}{\text{第三級}} + \frac{S^4 H^9}{\text{第五級}} + \dots \\
 + \frac{S^2 H^9}{\text{第三級}} + \dots
 \end{array}$$

圖 7 慧形差的等級

e. 像散差 當一束光線傾斜投射於一透鏡的表面，位於子午面上的光線較位於垂直於此子午面上的光線焦聚的狀況不是多就是少（如圖 8）。因此，使一點的像不是一點，而是一對短線，其中有一條靠近透鏡，且在其中間有一個小的圓光圈（圖 9）。一條線與像場相切，一條與其垂直。慧形差也有很多複雜較高的像散形式，其中有些焦聚線形如古代計時鐘漏斗，在這些中間