Guidance Series for Mathematics Majors

数学类专业学习辅导丛书

近世代数三百题

冯克勤　章璞

高等教育出版社
Higher Education Press

数学类专业学习辅导丛书

Guidance Series for Mathematics Majors

近世代数三百题

Jinshi Daishu Sanbai Ti

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容简介

本书为近世代数的教学提供了丰富的例子，内容包括群论、环论、域论和 Galois 理论。全书包含了 500 多个习题（包括一大题中若干小题）的解答；有近三分之一或更多的题目对初学者是较难的；有的题目是很难的（例如，华罗庚恒等式等题，在一般的书中也很难找到解答）。为帮助学生回顾所学内容，在每一节前加了"知识要点"。

本书可作为数学系本科生和研究生及其他相关专业学生的教学参考书和课外读物。

图书在版编目（CIP）数据

近世代数三百题/冯克勤，章璞．—北京：高等教育出版社，2010.1
ISBN 978-7-04-028324-2

Ⅰ．近… Ⅱ．①冯… ②章… Ⅲ．抽象代数－习题
Ⅳ．0153-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 221324 号

策划编辑 杨 波 **责任编辑** 张耀明 **封面设计** 赵 阳
版式设计 史新薇 **责任校对** 王 超 **责任印制** 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**咨询电话**	400-810-0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京联兴盛业印刷股份有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×960 1/16	**版　　次**	2010 年 1 月第 1 版
印　　张	12.25	**印　　次**	2010 年 1 月第 1 次印刷
字　　数	220 000	**定　　价**	16.20 元

物料号 28324-00

前　言

由冯克勤、李尚志、查建国、章璞编写的《近世代数引论》，历经三版反复修改，作为数学系本科生教材使用已二十余年。这本教材有不少较难的习题。十几年前，我们在教学过程中把这些习题的解答汇集成册，并不断增加一些新的问题；2002 年起又将手写稿不断完善成打印稿，当时都是为自己教学上的方便(有些难题同学问到，我们有时也难以当场作答)，从未打算正式出版。近年来，不少同学和青年教师口头或来信索要这份材料。经过反复和认真考虑，我们决定对原稿进行增删加修订，并交付出版。

近世代数研究一般的代数结构，它是大学生代数训练的一门重要课程。这种训练不仅对于数学系学生是很基本的，而且由于数字计算和数字通信的发展，近世代数目前已成为通信和计算机科学的重要数学工具。目前我国高等学校近世代数的教学有很大改进和完善的余地。在代数研究方面有一定实力或教师梯队较强的高校，代数教学具有好的水准，学生受到较为充分的近世代数训练。而另有部分学校的近世代数为选修课，学时少并且没有后续课程，不少学生只是听到一些莫名其妙的定义和定理，做一点形式逻辑的推导，没有领会到这门课程的真谛；并且在考试之后，就把学到的一点知识几乎忘光了。

对于二年级或三年级大学生来说，学习近世代数这门课普遍感到比较抽象，但是抽象恰恰是数学的基本特性之一，也是数学训练的一个重要方面。在这门课程中应当让学生学会抽象的思维方式，如何从许多具体的数学研究对象中提炼出它们的本质 (群、环、域的定义)，并且从这些本质的共性中推导出其他共性 (各种类型群、环、域的公共性质)，如何对研究对象进行合理的分类，学会不同研究对象之间的比较方式 (即同态)，并以此来研究各种对象的代数结构。这些数学思考方式的训练不仅对整个数学领域是重要的，而且对于其他科学领域 (乃至于社会生活) 也是基本的。

要使学生受到这种训练，首先需要大量的例子。在学习近世代数的时候，学生所熟悉的例子主要来自初等数论和高等代数。一般来说，高等代数的教学效果还可以，这门课提供向量空间和多项式环的例子，并且初步学习了抽象思考方式：向量空间之间的同态 (线性映射)，子空间和商空间，二次型的分类，实或复系数多项式的零点，带余除法和因子分解 (这本质上是在讲 $\mathbb{C}[x]$ 和 $\mathbb{R}[x]$ 是主理想整环)。同时又使学生感受到这些抽象思考方式和方法是有用的：它给出线性方程组的完整解法，给出欧式空间中二次曲面的完整分类，也给出解一元高次方程的初步手段。另一方面，初等数论中的模 m 同余类环和它的可逆元构成的集合给

出有限交换群的例子，还是近世代数许多概念的源头 (元的阶，循环群和它的生成元，环的直和 – 中国剩余定理等等)。由于多数学生事先没有初等数论的“代数化”训练，教师在课时本来就不多的近世代数课上先补授初等数论的相关内容，也很难使学生吃透。这本习题集的目的之一是给学生和教师提供更多的例子。除了原教材中的习题之外，这次出版前增加了不少我们认为有意义的新例子；每节前也加上了“知识要点”。由于有限域在理论和应用上的重要性以及它在学习过程中的有趣性，我们增加了“有限域上的不可约多项式”和“有限域上的线性代数”两节。对由定义可直接得出结论的，只指出此点而未详述。

我们还需要解决学习动机的问题：为什么需要学这门课程？善于思考的同学甚至会问：为什么非要研究群、环和域，而不研究其他的代数结构？在这个课程中，我们无法讲授群、环、域在物理和通信等方面的广泛应用，但是可以展示几何对称的群论意义，集合在群作用下的分类和计数。我们还可以做的，是讲述群的起源和它在数学发展中的作用，即域的 Galois 理论和用它来解决几个古代数学问题。这会使一部分学生欣赏到数学的优美，并且从历史中真切地认识到，除了应用的动力，数学本身的追求真谛和完美也是重要和不可缺少的。可惜由于学时所限，上述精品内容在课上无法讲授。我们在习题中作了补充，例如对 Galois 理论基本定理和代数方程根式可解性定理以习题的形式给出了证明；对于“同构延拓定理”，也以习题的形式给出了它的强形式。

总之，这本习题集的出版，目的是帮助同学和年轻教师进一步了解近世代数的真谛，掌握它的思想和方法，提高抽象思维能力。对于只想走捷径、应付作业和考试的同学，它似乎没有太大的益处，因为要真正读懂这些习题的解答也需要认真思考。一个习题的解答通过简单的照搬，很难成为另一个习题的解答。

北京师范大学张英伯教授仔细审阅了全书，给予热情支持并提出宝贵意见。北京航空航天大学李尚志教授和同济大学查建国教授一直关心此项工作。华东师范大学周青教授给予支持和关心。上海交通大学姜翠波教授和武同锁教授督促我们尽快完稿。2003 年，当时的中国科学技术大学自动化系研究生胡可、计算机系研究生张大力、数学系本科生张伟、数学系研究生赵青、程智先后主动提出帮助打印本书最初的手写稿。中国科学技术大学叶郁教授和山东大学黄华林教授帮助校对。我们一并致谢！

作者欢迎读者提出宝贵意见。

冯克勤　于清华大学
章　璞　于上海交通大学
2009 年 1 月 10 日

目　录

第一部分　问题总汇

第二部分 问题解答

第一部分 问题总汇

第 1 章 群 论

§1 集合与映射

1.1.1. 设 B, A_i $(i \in I)$ 均是集合 Ω 的子集, 试证:

(1) $B \bigcap \left(\bigcup\limits_{i \in I} A_i \right) = \bigcup\limits_{i \in I} (B \bigcap A_i)$.

(2) $B \bigcup \left(\bigcap\limits_{i \in I} A_i \right) = \bigcap\limits_{i \in I} (B \bigcup A_i)$.

(3) $\overline{\bigcup\limits_{i \in I} A_i} = \bigcap\limits_{i \in I} \overline{A_i}$.

(4) $\overline{\bigcap\limits_{i \in I} A_i} = \bigcup\limits_{i \in I} \overline{A_i}$.

1.1.2. 设 $f:\ A \longrightarrow B$ 是集合的映射 (A, B 是非空集合), 试证:

(1) f 为单射 $\Longleftrightarrow$ 存在 $g:\ B \longrightarrow A$, 使得 $gf = 1_A$.

(2) f 为满射 $\Longleftrightarrow$ 存在 $h:\ B \longrightarrow A$, 使得 $fh = 1_B$.

1.1.3. 如果 $f:\ A \longrightarrow B$, $g:\ B \longrightarrow C$ 均是一一对应, 则 $gf:\ A \longrightarrow C$ 也是一一对应, 且 $(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$.

1.1.4. 设 A 是有限集, $P(A)$ 是 A 的全部子集 (包括空集) 所构成的集族. 试证 $|P(A)| = 2^{|A|}$. 换句话说, n 元集合共有 2^n 个不同的子集.

1.1.5. 设 $f: A \longrightarrow B$ 是集合的映射. 在集合 A 上如下定义一个关系: 对任意 a, $a' \in A$, $a \sim a'$ 当且仅当 $f(a) = f(a')$. 试证这样定义的关系是一个等价关系.

1.1.6. 设 A, B 是两个有限集合, 则

(1) A 到 B 的不同映射共有多少个?

(2) A 上不同的二元运算共有多少个?

(3) A 到 B 的单射共有多少个?

1.1.7*. 证明等价关系的三个条件是互相独立的, 即: 已知任意两个条件不能推出第三个条件.

1.1.8*. 设 V 是数域上的线性空间, 证明 V 有一组基.

§2 群的概念

1.2.1. 令 N 是所有 $n \times n$ 上三角非奇异复方阵的集合, P 是主对角线上的元都是 1 的上三角方阵的集合, 运算定义为矩阵的乘法. 试证 N 和 P 都是群.

1.2.2. 令 G 是实数对 (a, b), $a \neq 0$ 的集合, 在 G 上定义 $(a, b)(c, d) = (ac, ad+b)$. 试证 G 是群.

1.2.3. 令 Ω 是任意一个集合, G 是一个群, G^{Ω} 是 Ω 到 G 的所有映射的集合. 对任意两个映射 $f, g \in G^{\Omega}$, 定义乘积 fg 是这样的映射: 对任意 $a \in \Omega$, $(fg)(a) = f(a)\, g(a)$. 试证 G^{Ω} 是群.

1.2.4. 令 G 是所有秩不大于 r 的 $n \times n$ 复方阵的集合, 试证在矩阵的乘法下 G 成半群.

1.2.5. 举出一个半群的例子, 它不是含幺半群; 再举出一个含幺半群的例子, 它不是群.

1.2.6*. (这可作为群的另一定义, 即群的单边定义) 设 G 是一个半群, 如果

(a) G 中含有左幺元 e, 即对任意 $a \in G$, $ea = a$.

(b) G 的每个元 a 有左逆 a^{-1}, 使得 $a^{-1} \cdot a = e$.

试证 G 是群.

1.2.7*. (这可作为群的另一定义: 即群的除法定义) 设 G 是半群, 若对任意 $a,\ b \in G$, 方程 $xa = b$ 和 $ay = b$ 在 G 内有解, 则 G 是群.

1.2.8*. (这可作为有限群的另一定义) 设 G 是一个有限半群, 如果在 G 内左右消去律均成立, 即由 $ax = ay$ 或 $xa = ya$ 可推出 $x = y$, 则 G 是群.

1.2.9. 设 G 是含幺半群, $a,\ b \in G$.

(1) 如果 a 有逆元 a^{-1}, 则 a^{-1} 也有逆元且 $(a^{-1})^{-1} = a$.

(2) 如果 a 和 b 都具有逆元, 则 ab 也有逆元, 且 $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

1.2.10. 设 $f : G \longrightarrow H$ 是群的同态, 则 $f(1_G) = 1_H$; 且对任意 $x \in G$ 有 $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$.

1.2.11. 对任意 $a \in G$, $a \mapsto a^{-1}$ 是群 G 的自同构当且仅当 G 是 Abel 群.

1.2.12. 证明有理数加法群 $\mathbb{Q}$ 和非零有理数乘法群 $\mathbb{Q}^*$ 不同构.

1.2.13. 证明:

(1) 有理数加法群 $\mathbb{Q}$ 和正有理数乘法群 $\mathbb{Q}^+$ 不同构.

(2) 实数加法群 $\mathbb{R}$ 同构于正实数乘法群 $\mathbb{R}^+$.

1.2.14*. 在偶数阶群 G 中, 方程 $x^2 = 1$ 总有偶数个解.

1.2.15*. 令 G 是 n 阶有限群, S 是 G 的一个子集, $|S| > \dfrac{n}{2}$. 试证对任意 $g \in G$, 存在 $a, b \in S$ 使得 $g = ab$.

1.2.16*. 求有理数加法群 $\mathbb{Q}$ 的自同构群 $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q})$.

1.2.17*. b 是含幺半群 G 中的元 a 的逆元当且仅当成立 $aba = a$, $ab^2a = 1$.

1.2.18*. 令 G 是 n 阶有限群, $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是群 G 的任意 n 个元, 不一定两两不同. 试证存在整数 p 和 q, $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant n$, 使得 $a_p a_{p+1} \cdots a_q = 1$.

1.2.19*. 群 G 的自同构 α 称为没有不动点的自同构, 是指对 G 的任意元 $g \neq 1$ 有 $\alpha(g) \neq g$. 如果有限群 G 具有一个没有不动点的自同构 α 且 $\alpha^2 = 1$, 则 G 一定是奇数阶 Abel 群.

1.2.20*. 设 a, b 是群 G 的两个元, 满足 $aba = ba^2b, a^3 = 1, b^{2n-1} = 1$. 试证 $b = 1$.

§3　子群和陪集分解

1.3.1. 设 A 是群 G 的非空子集, 试证 A 是 G 的子群当且仅当对任意元 $a, b \in A, ab^{-1} \in A$ (这也相当于 $AA^{-1} = A$).

1.3.2. 设群 G 中元 g 的阶 $o(g) = mn$, $(m, n) = 1$. 则 $g = ab$, $o(a) = m$, $o(b) = n$, 且 a, b 均为 g 的幂.

1.3.3. 设群 G 中两个元 g, h 可换, $o(g) = m$, $o(h) = n$. 记 (m, n), $[m, n]$ 分别是 m, n 的最大公因子和最小公倍数. 则

(1) $o(g^n h^m) = \dfrac{[m, n]}{(m, n)}$;

(2) G 中存在阶为 (m, n) 的元;

(3) G 中存在阶为 $[m,n]$ 的元.

1.3.4. 设 A 是群 G 的有限子集, 则 A 是 G 的子群当且仅当对任意元 a, $b \in A$, $ab \in A$.

1.3.5. 设 A, B 分别是群 G 的两个子群, 试证 $A \bigcup B$ 是 G 的子群当且仅当 $A \leqslant B$ 或 $B \leqslant A$. 利用这个事实证明群 G 不能表示成两个真子群的并.

1.3.6. 设 A, B 是群 G 的两个子群, 试证 $AB \leqslant G$ 当且仅当 $AB = BA$.

1.3.7. 设 A, B 是群 G 的两个子群且 $G = AB$. 如果子群 C 包含 A, 则 $C = A(B \bigcap C)$.

1.3.8. 设 A 和 B 是有限群 G 的两个非空子集. 若 $|A| + |B| > |G|$, 则 $G = AB$.

1.3.9. 设 A 和 B 均为群 G 的子群, 则

(1) $g(A \bigcap B) = gA \bigcap gB$, $\forall\, g \in G$.

(2) 若 A 和 B 均有有限的指数, 则 $A \bigcap B$ 也有有限的指数.

1.3.10. 如果 R 是群 G 对于子群 A 的右陪集代表元系, 则 R^{-1} 是群 G 对于 A 的左陪集代表元系.

1.3.11. 设 $A \leqslant G$, $B \leqslant G$. 如果存在 a, $b \in G$, 使得 $Aa = Bb$, 则 $A = B$.

1.3.12. 设 $n > 2$, 则有限群 G 中有偶数个阶为 n 的元.

1.3.13. 设 a, b 是群 G 的任意两个元, 试证 a 和 a^{-1}, ab 和 ba 有相同的阶.

1.3.14*. 设 $A \leqslant G$, 试证 $C_G C_G C_G(A) = C_G(A)$.

1.3.15*. 试证有限群 G 的一个真子群的全部共轭子群之并不能覆盖整个群 G. 结论对无限群是否成立?

1.3.16*. 设 H 和 K 分别是有限群 G 的两个子群, 试证:

$$|HgK| = |H|[K : K \bigcap g^{-1}Hg] = |K|[H : H \bigcap gKg^{-1}].$$

1.3.17*. 设 A 是群 G 的具有有限指数的子群, 试证: 存在 G 的一组元 g_1, $g_2, \cdots, g_m$, 它们既可以作为 A 在 G 中的右陪集代表元系, 又可以作为 A 在 G

中的左陪集代表元系.

1.3.18*. 令 $G = GL(n, \mathbb{C})$, P 是主对角线上的元均为 1 的 $n \times n$ 上三角方阵全体形成的 G 的子群. 确定 $N_G(P), C_G(P)$ 和 P 的中心 $Z(P)$.

1.3.19*. 设 G 是有限 Abel 群, 试证 g 对应到 g^k 是 G 的一个自同构当且仅当 k 和 $|G|$ 互素.

1.3.20*. 设 G 是奇数阶有限群, $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ 且 $\alpha^2 = 1$. 令

$$G_1 = \{g \in G \,|\, \alpha(g) = g\}, \quad G_{-1} = \{g \in G \,|\, \alpha(g) = g^{-1}\}.$$

试证: $G = G_1 G_{-1}$ 且 $G_1 \bigcap G_{-1} = 1$.

1.3.21*. 设群 G 的元 a_1, a_2, b_1, b_2 满足

$$a_1 b_1 = a_2 b_2 = b_1 a_1 = b_2 a_2, \quad a_1^m = a_2^m = b_1^n = b_2^n = 1,$$

其中 m 和 n 是互素的正整数. 则 $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$.

§4 循 环 群

1.4.1. 证明 Euler 定理: 若 n 是正整数, a 是与 n 互素的整数, 则 $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$, 其中 $\varphi(n)$ 是 Euler 函数, 即 $\varphi(n)$ 是与 n 互素的不超过 n 的正整数的个数.

特别地, 若 p 是素数, 则得到 Fermat 小定理: $a^p \equiv a \pmod{p}$, $\forall\, a \in \mathbb{Z}$.

1.4.2. 设 n 是正整数, 试证: 满足方程 $x^n = 1$ 的复数的集合 G 在通常乘法下是一个 n 阶循环群.

1.4.3. 群 G 没有非平凡子群的充分必要条件是 $G = \{1\}$ 或是素数阶循环群.

1.4.4. (1) 设 a 和 b 是群 G 的元, 阶数分别是 n 和 m, $(n, m) = 1$ 且 $ab = ba$. 求 $|\langle ab \rangle|$.

(2) 设群 G 中元 g 的阶 $o(g)$ 与正整数 n 互素, 在 $\langle g \rangle$ 中求解方程 $x^n = g$.

1.4.5. 真子群 M 称为群 G 的极大子群, 如果不存在 G 的子群 B 使得 $M < B < G$. 确定无限循环群的全部极大子群.

1.4.6*. 如果有限群 G 有唯一的极大子群, 则 G 是素数幂阶循环群.

1.4.7. 举一个无限群的例子, 它的任意阶数不为 1 的子群都具有有限指数.

1.4.8. 设 p 是一个素数, $G = \{x \in \mathbb{C} \mid 存在正整数\ n\ 使得\ x^{p^n} = 1\}$, 则 G 对于复数的乘法作成群. 试证 G 的任意真子群都是有限阶的循环群.

1.4.9. 若群 G 只有有限多个子群, 则 G 是有限群.

1.4.10*. 有理数加法群 $\mathbb{Q}$ 不是循环群, 但它的任意有限生成的子群都是循环群.

1.4.11*. 在 n 阶循环群 G 中, 对 n 的每个正因子 m, 阶为 m 的元恰好有 $\varphi(m)$ 个, 其中 $\varphi(m)$ 是与 m 互素且不超过 m 的正整数的个数. 由此证明等式 $\sum\limits_{m|n} \varphi(m) = n$.

1.4.12*. 设 G 是一个 n 阶有限群, 若对 n 的每一个因子 m, G 中至多只有一个 m 阶子群, 则 G 是循环群.

1.4.13*. 群 G 是循环群当且仅当 G 的任一子群形如 $G^m = \{g^m \mid g \in G\}$, 其中 m 是非负整数.

§5　正规子群和商群

1.5.1. 令 G 是实数对 (a, b), $a \neq 0$ 带有乘法 $(a, b)(c, d) = (ac, ad + b)$ 的群. 试证:$K = \{(1, b) \mid b \in \mathbb{R}\}$ 是 G 的正规子群且 $G/K \cong \mathbb{R}^*$, 这里 $\mathbb{R}^*$ 是非零实数的乘法群.

1.5.2. 设 G 是群, $N < M < G$.

(1) 如果 $N \lhd G$, 则 $N \lhd M$.

(2) 如果 $N \lhd M$, $M \lhd G$, N 是否一定是 G 的正规子群?

1.5.3. 试证:

(1) 群 G 的中心 $Z(G)$ 是 G 的正规子群.

(2) 群 G 的指数为 2 的子群 N 一定是 G 的正规子群.

1.5.4. (1) 设 $N \lhd G$, M 是 G 的子群且 $N \leqslant M$. 则 $N_G(M)/N = N_{\overline{G}}(\overline{M})$, 这里 $\overline{G} = G/N$, $\overline{M} = M/N$.

(2) 设 $f: G \longrightarrow H$ 是群同态, $M \leqslant G$. 试证 $f^{-1}(f(M)) = KM$, 这里 $K = \operatorname{Ker} f$.

(3) 设 $f: G \longrightarrow H$ 是群同态. 若 g 是 G 的一个有限阶元, 则 $f(g)$ 的阶整除 g 的阶.

1.5.5. 设 M 和 N 分别是群 G 的正规子群. 如果 $M \bigcap N = 1$, 则对任意 $a \in M$, $b \in N$ 有 $ab = ba$.

1.5.6. 设 $N \lhd G$, g 是群 G 的任意一个元. 若 g 的阶和 $|G/N|$ 互素, 则 $g \in N$.

1.5.7. 如果 $G/Z(G)$ 是循环群, 则 G 是 Abel 群.

1.5.8*. 用 $I(G)$ 表示 G 的全部内自同构组成的集合. 试证: $I(G) \leqslant \mathrm{Aut}(G)$, 且 $I(G) \cong G/Z(G)$.

1.5.9*. 试证非可换群 G 的自同构群 $\mathrm{Aut}(G)$ 不是循环群.
特别地, 若群 G 只有素数个自同构, 则 G 是可换群.

1.5.10*. 用 $[G,G]$ 表示群 G 的换位子群, 即由所有换位子 $[g,h] = ghg^{-1}h^{-1}$, $g,h \in G$ 生成的 G 的子群; 记 $G^{(1)} = [G,G]$, $G^{(n)} = [G^{(n-1)}, G^{(n-1)}]$, $\forall\, n > 1$. 则 $G^{(n)}$ 均是 G 的正规子群, $\forall\, n \geqslant 1$.

1.5.11. 设 $N \lhd G$, $N \bigcap [G,G] = \{1\}$, 则 $N \leqslant Z(G)$.

1.5.12*. 群 G 的非平凡子群 N 称为 G 的极小子群, 如果不存在子群 B 使得 $1 \subsetneqq B \subsetneqq N$. 试证:
(1) 整数加法群 $\mathbb{Z}$ 没有极小子群.
(2) 有理数加法群 $\mathbb{Q}$ 既没有极小子群也没有极大子群.

1.5.13*. 设 α 是有限群 G 的自同构. 令 $I = \{g \in G \mid \alpha(g) = g^{-1}\}$. 试证:
(1) 若 $|I| > \dfrac{3}{4}|G|$, 则 G 是 Abel 群.
(2) 若 $|I| = \dfrac{3}{4}|G|$, 则 G 一定有指数为 2 的 Abel 正规子群.

§6 置 换 群

1.6.1. 把置换 $\sigma = (4\,5\,6)(5\,6\,7)(7\,6\,1)$ 写成不相交轮换的积.

1.6.2. 讨论置换

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n & n-1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

的奇偶性.

1.6.3. 一个置换的阶等于它的轮换表示中各个轮换因子的长度的最小公倍数.

1.6.4. 设 $\sigma = (1\,2\,\cdots\,n) \in S_n$, 证明: $C_{S_n}(\sigma) = \langle\sigma\rangle$.

1.6.5. 试证当 $n \geqslant 3$ 时, 中心 $Z(S_n) = \{1\}$.

1.6.6. 当 $n \geqslant 3$ 时, 试证 $n-2$ 个 3 轮换 $(1\,2\,3)$, $(1\,2\,4)$, $\cdots$, $(1\,2\,n)$ 是 A_n 的生成元.

1.6.7. 试证 A_4 没有 6 阶子群.

1.6.8. 设 σ_1 和 σ_2 是 S_n 中的两个偶置换. 若 σ_1 和 σ_2 在 S_n 中共轭, 则它们在 A_n 中也一定共轭吗?

1.6.9*. 确定 S_4 的全部正规子群.

1.6.10*. 试证:

(1) 对称群 S_n 是交错群 A_{2n} 的子群.

(2) 每个有限群均是某个交错群的子群.

1.6.11*. S_n 中型为 $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\cdots n^{\lambda_n}$ 的置换共有 $n!/\prod\limits_{i=1}^{n} i^{\lambda_i}\lambda_i!$ 个, 由此证明

$$\sum_{\lambda} \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n} i^{\lambda_i}\lambda_i!} = 1,$$

其中 λ 取遍所有的型, 即 λ 取遍所有的数组 $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$, λ_i 均为非负整数且满足 $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \cdots + n\lambda_n = n$.

1.6.12*. 当 $n \geqslant 2$ 时, 试证 $(1\,2)$ 和 $(1\,2\,3\,\cdots\,n)$ 是 S_n 的一组生成元.

§7 群在集合上的作用

1.7.1. 设 G 作用在集合 S 上, 对任意 $a, b \in S$, 若存在 $g \in G$ 使得 $ga = b$, 则 $G_a = g^{-1}G_b g$. 换句话说, 同一轨道中元的固定子群彼此共轭.

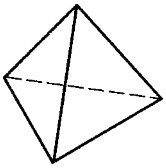
1.7.2. 设群 G 在集合 S 上的作用是可迁的, N 是 G 的正规子群, 则 S 在 N 作用下的每个轨道有同样多的元.

1.7.3*. (Burnside 引理) 设群 G 作用在集合 S 上, 令 t 表示 S 在 G 作用下的轨道的条数. 对任意 $g \in G$, $F(g)$ 表示 S 在 g 作用下不动点的个数, 即 $F(g) = |\{x \in S | gx = x\}|$. 试证

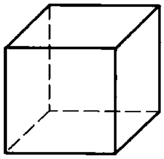
$$t = \frac{\sum_{g \in G} F(g)}{|G|}$$

这就是说, G 的每个元在 S 上作用平均使得 t 个文字不动.

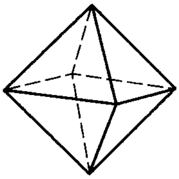
1.7.4. 求正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体和正二十面体 (如下图所示) 的旋转群和对称群各有多少个元?



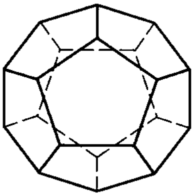
正四面体 (tetrahedron)



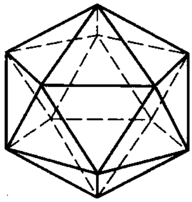
正六面体(hexahedron)



正八面体 (octahedron)



正十二面体 (dodecahedron)



正二十面体 (icosahedron)

1.7.5*. 设 p 是一个素数, G 是 p 的方幂阶的群. 试证 G 的非正规子群的个数一定是 p 的倍数.

1.7.6*. 令 G 是一个单群, 如果存在 G 的真子群 H 使得 $[G : H] \leqslant 4$, 则 $|G| \leqslant 3$.

1.7.7*. 设 H 是群 G 的指数为 $n < \infty$ 的真子群, 试证 H 一定含有 G 的一个有有限指数的真正规子群.

如果还有 $|G| > n!$, 则 G 不是单群.

1.7.8*. 试证一般线性群 $GL(n, \mathbb{C})$ 不含有指数有限的真子群.

1.7.9*. 求对称群 S_3 的自同构群 $\mathrm{Aut}(S_3)$.