高职高专“十一五”规划教材·经济管理类

经济数学

尹建华　主编

冶金工业出版社
www.cnmip.com.cn

高职高专“十一五”规划教材·经济管理类

经济数学

主　编　尹建华
副主编　吴　冰　李胜清

北　京
冶金工业出版社
2009

内 容 简 介

本书理论体系具有科学性，系统完整、严密。全书共9章，第1～7章讲述微积分理论，第8～9章介绍级数理论与常微分方程理论。全书实用性及适用性特点鲜明：基本理论和概念力求语言通俗易懂，便于理解，适合文科、理科基础的学生兼用；注意内容与实用相结合，更注重实用性，以培养学生掌握基本运算和实际应用的能力。本书同时设有选修内容，供老师和需要专科毕业接入本科的学生使用。

本书为经济管理类公共基础课教材，适用于专科及高职经济类、管理类在校大学生，也可作为同类专业成人教育自学考试用书及函授学习教材。

图书在版编目(CIP)数据

经济数学/尹建华主编. —北京：冶金工业出版社，2009.1
ISBN 978-7-5024-4841-7

I. 经… II. 尹… III. 经济数学—高等学校—教材 IV. F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 009749 号

出 版 人 曹胜利
地 址 北京北河沿大街嵩祝院北巷39号，邮编100009
电 话 (010)64027926 电子信箱 postmaster@cnmip.com.cn
责任编辑 刘 源
ISBN 978-7-5024-4841-7
北京天正元印务有限公司印刷；冶金工业出版社发行；各地新华书店经销
2009年1月第1版，2009年1月第1次印刷
787mm×1092mm 1/16；11.5印张；265千字；174页；1-3000册
24.00 元

前　　言

随着全国高等教育高职高专在校生数量逐年增加，各校相继增设了经济类和管理类等专业，并开设了经济数学作为必修或选修课。编者为了配合经济数学课程的教学编写了本书。本书适用于专科及高职经济类、管理类在校大学生，也可作为同类专业成人教育自学考试用书及函授学习教材。

本书全文共分 9 章，其中第 1～7 章讲述微积分理论，第 8～9 章介绍级数理论与常微分方程理论。在编写过程中，编者力求做到以下几点：

(1) 在内容取舍上，以微积分理论为核心内容，以极限理论作为重要的基础工具，对级数理论和微分方程等延伸理论加以介绍。书中一些章节加设了“*”，由任课教师根据课时和学生的实际情况进行选择。

(2) 在结构上，在保证知识科学性、系统性与严密性的前提下，对文科、理科学生进行兼顾，对基本概念和基本理论偏重描述，力求使用通俗易懂的语言。在内容上，注意理论与应用相结合，注重实用价值，以培养学生解决问题的能力。

(3) 为了使学生能巩固所学的知识，书中每章均配有一定数量的难易适中的习题，并附有参考答案。

本书由尹建华任主编，吴冰、李胜清任副主编，安会彦、吴海平参加编写。

由于编者水平所限，书中如有不足之处敬请使用本书的师生与读者批评指正，以便修订时改进。如读者在使用本书的过程中有其他意见或建议，恳请向编者(bjzhangxf@126.com)踊跃提出宝贵意见。

编　者

目　　录

第 1 章　函　　数

在中学我们已经学习了函数的概念及函数的简单性质，这一章将进一步给出复合函数、初等函数的相关概念，同时介绍需求函数、供给函数和利润函数等几个常见的经济函数。

1.1　初 等 函 数

1.1.1　邻域

邻域：以点 x_0 为中心的任何开区间称为点 x_0 的邻域，记作 $U(x_0)$。

设 δ 是一正数，则称开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 为**点 x_0 的 δ 邻域**，记作 $U(x_0,\delta)$。即

$$U(x_0,\delta)=\{x \mid x_0-\delta<x<x_0+\delta\}=\{x \mid |x-x_0|<\delta\}$$

其中点 x_0 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径。

去心邻域 $\overset{0}{U}(x_0,\delta)$ 是指：$\overset{0}{U}(x_0,\delta)=\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$。

一般，邻域是指 x_0 为心的很小的开区间。

1.1.2　复合函数

引例　设 $y=f(u)=\sqrt{u}$，而 $u=1-x^2$，则 $y=\sqrt{1-x^2}$ 由 $y=f(u)=\sqrt{u}$ 和 $u=1-x^2$ 复合而成。

定义 1.1　设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，而函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_φ，如果 $u=\varphi(x)$ 的值域 $Z_\varphi \subseteq D_f$，则称由 x 经过 u 到 y 的函数 $y=f\left[\varphi(x)\right]$ 为由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**，u 称为**中间变量**。

对于复合函数，做下面的说明：

(1) 不是任何两个函数都可以构成一个复合函数。

例如 $y=f(u)=u^2$，$u=\varphi(x)=\sin x$ 可以复合成 $y=\sin^2 x$。

而 $y=\arcsin u$，$u=2+x^2$ 不可以复合，因为 $u=2+x^2$ 的值域是 $u\geqslant 2$，函数 $y=\arcsin u$ 的定义域是 $|u|\leqslant 1$，因此，函数 $u=2+x^2$ 的值域不包含在 $y=\arcsin u$ 的定义域内。

(2) 复合函数不仅可以有一个中间变量，还可以有多个中间变量，这些中间变量是经过多次复合产生的。

【例 1】 已知 $y=\sin u$, $u=2x^3+5$，将 y 表示成 x 的函数。

解：将 $u=2x^3+5$ 代入 $y=\sin u$，可得 $y=\sin\left(2x^3+5\right)$。

【例 2】 已知 $y=\ln u$，$u=4-v^2$，$v=\cos x$，将 y 表示成 x 的函数。

解：$y=\ln(4-v^2)=\ln(4-\cos^2 x)$。

【例 3】指出下列复合函数是由哪些简单函数复合而成的。

(1) $y=\sin\ln(x^3+4)$　　(2) $y=5^{\arcsin x}$

解：(1) 设 $y=\sin u$，$u=\ln v$，$v=x^3+4$，其中 u，v 都是中间变量。

(2) 设 $y=5^u$，$u=\arcsin x$，其中 u 是中间变量。

【例 4】已知 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，求 $f(0)$，$f(-x)$，$f(x^3)$。

解：$f(0)=\dfrac{1-0}{1+0}=1$，$f(-x)=\dfrac{1-(-x)}{1+(-x)}=\dfrac{1+x}{1-x}$，$f(x^3)=\dfrac{1-x^3}{1+x^3}$。

【例 5】设 $f(x)=x^2$，$g(x)=3^x$，求 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$。

解：$f[g(x)]=[g(x)]^2=(3^x)^2=9^x$，$g[f(x)]=3^{f(x)}=3^{x^2}$。

【例 6】求下列函数的定义域。

(1) $f(x)=\dfrac{3}{5x^2+2x}$　　(2) $f(x)=\lg(4x-3)$

(3) $f(x)=\arcsin(2x-1)$　　(4) $f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ x & x\leqslant 0\end{cases}$

解：(1) 分母不能为零，所以 $5x^2+2x\neq 0$，解得 $x\neq\dfrac{-2}{5}$ 且 $x\neq 0$。

即定义域为

$$\left(-\infty,-\frac{2}{5}\right)\cup\left(-\frac{2}{5},0\right)\cup(0,+\infty)。$$

(2) 真数必须大于零，所以有 $4x-3>0$，解得其定义域为 $\left(\dfrac{3}{4},+\infty\right)$。

(3) 反正弦的自变量绝对值必须小于等于 1，所以有 $-1\leqslant 2x-1\leqslant 1$，解得 $0\leqslant x\leqslant 1$，即定义域为 $[0,1]$。

(4) 这是一个分段函数，分段函数的定义域是各段自变量取值集合的并集，即此函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$。

1.1.3 初等函数

初等函数是本课程的主要研究对象。构成初等函数的元素是基本初等函数。因此，学习经济数学一定要熟练掌握 6 类**基本初等函数**的表达式、定义域、值域及其图形。

1.1.3.1 常数函数 $y=c$

它的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，无论 x 取何值，都有 $y=c$，所以，它的图像是过点 $(0,c)$ 平行于 x 轴的一条直线。

1.1.3.2 幂函数 $y=x^\alpha$（α 为常数）

当 α 取不同值时，幂函数的定义域不同，但是无论 $\alpha<0$ 还是 $\alpha>0$，图像都过点 $(1,1)$，定义域都包含 $(0,+\infty)$。

1.1.3.3 指数函数 $y=a^x\,(a>0,\ a\neq 1)$

它的定义域是$(-\infty,+\infty)$，由于无论a取何值，总有$a^x>0$，$a^0=1$，所以它的图像全部在x轴上方，且通过点$(0,1)$。也就是说，它的值域是$(0,+\infty)$。

1.1.3.4 对数函数 $y=\log_a{}^x\,(a>0,\ a\neq 1)$

它的定义域是$(0,+\infty)$，图像全部在y轴的右方，值域是$(-\infty,+\infty)$。无论a取何值，曲线都通过点$(1,0)$。

对数函数$y=\log_a{}^x\,(a>0,\ a\neq 1)$和指数函数$y=a^x$互为反函数，它们的图像关于直线$y=x$对称。

1.1.3.5 三角函数

(1) 正弦函数$y=\sin x$，它的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[-1,1]$。

(2) 余弦函数$y=\cos x$，它的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[-1,1]$。

(3) 正切函数$y=\tan x$，它的定义域为$(k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi+\dfrac{\pi}{2})$，$k\in Z$，值域为$(-\infty,+\infty)$。

(4) 余切函数$y=\cot x$，它的定义域为$(k\pi,\ k\pi+\pi)$，$k\in Z$，值域为$(-\infty,+\infty)$。

1.1.3.6 反三角函数

(1) 反正弦函数$y=\arcsin x$，它的定义域为$[-1,1]$，值域为$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$。

(2) 反余弦函数$y=\arccos x$，它的定义域为$[-1,1]$，值域为$[0,\pi]$。

(3) 反正切函数$y=\arctan x$，它的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$。

(4) 反余切函数$y=\mathrm{arccot}x$，它的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$(0,\pi)$。

定义 1.2 由基本初等函数经过有限次的四则运算及有限次的复合运算并能用一个式子表示的函数，称为**初等函数**。

例如 $y=\sin\ln(x^3+4)$，$y=5^{\arcsin x}$，$y=\dfrac{3^x+\sqrt[3]{x^2+5}}{\log_2{}^{(3x-1)}-x\sec x}$ 都是初等函数。而$y=1+x+x^2+x^3+\cdots$不满足有限的四则运算，$f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ x & x\leqslant 0\end{cases}$不是一个解析表达式，因此都不是初等函数。

1.2 几种常见的经济函数

在用数学方法解决实际问题时，往往需要找出经济变量之间的函数关系，建立数学模型。下面介绍几种经济中常用的函数。

1.2.1 成本函数

成本就是生产者用于生产商品的费用。成本可分为两类：第一类是厂房和设备等固定

资产的折旧，管理者的固定工资等，这一类成本的特点是短期内不发生变化，即不随商品产量的变化而变化，称为**固定成本**。第二类是能源费用、原材料费用和劳动者的工资等，这类成本的特点是随商品产量的变化而变化，称为**可变成本**。而总成本由固定成本C_1和可变成本$C_2(q)$两部分组成。固定成本与产量q无关，如设备维修费和和企业管理费等；可变成本随产量q的增加而增加，如原材料费等。即$C(q)=C_1+C_2(q)$。

总成本函数$C(q)$是q的单调增加函数。最典型的成本函数是三次函数

$$C=a_0+a_1q-a_2q^2+a_3q^3(a_i>0,\ i=1,\ 2,\ 3)$$

但有时为了使问题简化，也常常采用线性成本函数$C(q)=C_1+pq$（p为单位成本)及二次成本函数。

只给出总成本不能说明企业生产的好坏，为了评价企业的生产状况，需要计算产品的平均成本，即生产q件产品时，单位产品的成本平均值，记作$\overline{C}$，则$\overline{C}=\dfrac{C(q)}{q}=\dfrac{C_1}{q}+\dfrac{C_2(q)}{q}$，其中$\dfrac{C_2(q)}{q}$称为**平均可变成本**。

1.2.2 需求函数

一种商品的市场需求量Q与该商品的价格p密切相关，通常降低商品价格会使需求量增加；提高商品价格会使需求量减少。如果不考虑其他因素的影响，需求量Q可以看成是价格p的一元函数，称为**需求函数**，记作$Q=Q(p)$。

一般来说，需求函数为价格p的单调减少函数。

根据市场统计资料，常见的需求函数有以下几种类型：

(1) 线性需求函数$Q=a-bp$ $(a>0,\ b>0)$。

(2) 二次需求函数$Q=a-bp-cp^2$ $(a>0,\ b>0,\ c>0)$。

(3) 指数需求函数$Q=ae^{-bp}$ $(a>0,\ b>0)$。

需求函数$Q=Q(p)$的反函数就是价格函数，记作$P=P(q)$，它也反映商品的需求与价格的关系。

1.2.3 供给函数

某种商品的市场供给量S也受商品价格p的制约，价格上涨将刺激生产者向市场提供更多的商品，使供给量增加；反之，价格下跌将使供给量减少。供给量S也可看成价格p的一元函数，称为**供给函数**，记作$S=S(p)$。

供给函数为价格p的单调增加函数。

常见的供给函数有线性函数，二次函数，幂函数和指数函数等。其中，线性供给函数为$S=-c+dp$ $(c>0,\ d>0)$。

使某种商品的市场需求量与供给量相等的价格p_0，称为**均衡价格**。当市场价格p高于均衡价格p_0时，供给量将增加而需求量相应地减少，这时产生的“供大于求”的现象必然使价格p下降；当市场价格p低于均衡价格p_0时，供给量将减少而需求量增加，这时

会产生“物资短缺”现象，从而又使得价格 p 上升。市场价格的调节就是这样来实现的。

【例 1】已知需求函数为 $Q=\frac{100}{3}-\frac{2}{3}p$，供给函数为 $S=-20+10p$，求市场均衡价格 p_0。

解：由均衡条件 $Q=S$ 得

$$\frac{100}{3}-\frac{2}{3}p=-20+10p$$

移项整理得 $p_0=5$。

因此，均衡价格为 $p_0=5$。

1.2.4　总收益函数

总收益是指生产者生产的商品售出后的收入，用 R 表示。生产者销售某种商品的总收益取决于该商品的销量和价格。对完全竞争条件下的市场，可以假定某种商品的价格 p 是暂时不变的，那么该种商品的收入函数就可以表示为 $R(q)=pq$。

除总收益外，还有平均收入，用 $\overline{R}$ 表示，它是销售单位商品的收入，则

$$\overline{R}=\frac{R(q)}{q}$$

1.2.5　利润函数

利润是指生产者收入扣除成本后的剩余部分，用 L 表示，即

$$L=R-C$$

如果将成本 C 与收入 R 都看成是产量 q 的函数，那么利润 L 也是产量 q 的函数。

单位商品所获得的利润称为**平均利润**，用 $\overline{L}$ 来表示，即有

$$\overline{L}=\frac{L(q)}{q}$$

【例 2】设某商品的成本函数和收入函数分别为 $C=7+2q+q^2$，$R=10q$。

试求：(1) 该商品的利润函数；(2) 销量为 4 时的总利润及平均利润。

解：(1) 利润函数为 $L(q)=R(q)-C(q)$，即

$$L(q)=10q-\left(7+2q+q^2\right)=8q-7-q^2$$

(2) 当销量为 4 时，利润为 $L(4)=8\times4-7-4^2=9$

平均利润为 $\overline{L}=\frac{L(q)}{q}=\frac{9}{4}$。

本章小结

本章主要讲述了初等函数与常用的几个经济函数两个问题。

(1) 基本初等函数。

基本初等函数是指常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数这 6 个函数。

(2) 初等函数。

初等函数是指由基本初等函数经过有限次的四则运算及有限次复合运算并能用一个式子表示的函数。

(3) 关于经济分析中常见的函数。

经济分析中常见的函数主要有以下几类：成本函数、需求函数、供给函数、总收益函数、利润函数。这些函数反映的都是经济领域中一些重要因素之间的相互制约关系，在本教材中，对这些函数给出了理想化的表达式，但应该了解到在实际问题中确定这些函数关系是非常复杂的。

习 题

1．确定下列函数的定义域。

(1) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-9}}$　　(2) $y=\log_a \arcsin x$

(3) $y=\dfrac{2}{\sin \pi x}$　　(4) $y=\sqrt[3]{\dfrac{1}{x-2}}+\log_a(2x-3)$

(5) $y=\arccos\dfrac{x-1}{2}+\log_a(4-x^2)$

2．求函数

$$y=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

的定义域和值域。

3．下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同？

(1) $f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$　　(2) $f(x)=\cos x$，$g(x)=1-2\sin^2\dfrac{\pi}{2}$

(3) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$，$g(x)=x-1$　　(4) $f(x)=\dfrac{x}{x}$，$g(x)=x^0$

4．设 $f(x)=\sin x$，证明：

$$f(x+\Delta x)-f(x)=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

5．设 $f(x)=ax^2+bx+5$ 且 $f(x+1)-f(x)=8x+3$，试确定 a，b 的值。

6．求下列函数的反函数。

(1) $y=2\sin x$　　(2) $y=1+\log_a(x+2)$　　(3) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$

7．下列函数是由哪些简单函数复合而成的？

(1) $y=\sqrt[3]{(1+x)^2+1}$　　(2) $y=3^{(x+1)^2}$

(3) $y=\sin^2(3x+1)$　　(4) $y=\sqrt[3]{\log_a\cos^2 x}$

8．下列各组函数中哪些不能构成复合函数？把能构成复合函数的写成复合函数，并指出其定义域。

(1) $y=x^3$，$x=\sin t$　　(2) $y=a^u$，$u=x^2$　　(3) $y=\log_a u$，$u=3x^2+2$

(4) $y=\sqrt{u}$，$u=\sin x-2$　　(5) $y=\sqrt{u}$，$u=x^3$　　(6) $y=\log_a u$，$u=x^2-2$

9．下列函数中哪些是偶函数？哪些是奇函数？哪些是既非奇函数又非偶函数？

(1) $y=x^2(1-x^2)$　　(2) $y=3x^2-x^3$　　(3) $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

(4) $y=x(x-1)(x+1)$　　(5) $y=\sin x-\cos x+1$　　(6) $y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$

(7) $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$　　(8) $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$　　(9) $y=\tan x+x$

10．设 $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$，求 $f\left[f(x)\right]$。

11．设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，求 $f(x)$。

12．设 $f(x)$ 为定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的任意函数，证明：

(1) $F_1(x)=f(x)+f(-x)$ 为偶函数。

(2) $F_2(x)=f(x)-f(-x)$ 为奇函数。

13．证明：定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的任意函数可表示为一个奇函数与一个偶函数的和。

14．下列各函数中哪些是周期函数？对于周期函数，指出其周期。

(1) $y=\cos(x-2)$　　(2) $y=\cos 4x$　　(3) $y=1+\sin\pi x$

(4) $y=x\cos x$　　(5) $y=\sin^2 x$　　(6) $y=\sin 3x+\tan x$

15．设 $f(x)$ 为定义在 $(-L,L)$ 上的奇函数，若 $f(x)$ 在 $(0,L)$ 上单增，证明：$f(x)$ 在 $(-L,0)$ 上也单增。

16．当鸡蛋收购价为 4.5 元/kg 时，某收购站每月能收购 5 000kg。若收购价提高 0.1 元/kg，则收购量可增加 400kg，求鸡蛋的线性供给函数。

17．已知某商品的需求函数和供给函数分别为 $Q=14.5-1.5p$，$S=-7.5+4p$，求该商品的均衡价格 p_0。

18．已知某种产品的总成本函数为 $C=2\,000+\dfrac{q^2}{8}$，求当生产 200 个该产品时的总成本和平均成本。

第 2 章　极限与连续

极限理论是高等数学的基础，极限概念是研究变量在某一过程中的变化趋势时引出的，它是微积分学的重要基本概念之一，微积分学中的其他几个重要概念，如连续、导数和定积分等，都是利用极限表达的，并且微积分学中的很多定理也是利用极限方法推导出来的。这一章将介绍数列与函数极限的概念，求极限的方法及函数的连续性。数列极限的概念在中学教材中已经做了介绍。

2.1　数列的极限

2.1.1　数列

数列是按一定规律排列的一串数，如

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots x_n,\ \cdots$$

简记作$\{x_n\}$，数列也可看作是定义在正整数集合上的函数

$$x_n=f(n)\qquad (n=1,\ 2,\ 3\cdots)$$

x_n称为数列的**通项**或**一般项**。

例如，等差数列通项$a_n=a_1+(n-1)d$；等比数列通项$a_n=a_1q^{n-1}$。

现在要研究的问题是：给定一个数列$\{x_n\}$，当项数n无限增大时，通项x_n的变化趋势是什么？

2.1.2　数列的极限

【例 1】 数列$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，…，$\frac{1}{2^n}$，…的通项为$x_n=\frac{1}{2^n}$。当n无限增大时，2^n也无限增大，其倒数$\frac{1}{2^n}$会随之越变越小，无限地趋近于0。

【例 2】 数列$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$，…，$\frac{n}{n+1}$…的通项为$x_n=\frac{n}{n+1}$。当n无限增大时，通项x_n无限地趋近于1。

【例 3】 数列 1，−1，1，−1，…的通项为$x_n=(-1)^{n+1}$。当n无限增大时，通项x_n总在1和−1两个数值上跳跃，永远不会趋于一个固定的数。

【例 4】 数列$1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{4},\ \sqrt{5},\ \cdots\sqrt{n},\ \cdots$的通项为$x_n=\sqrt{n}$。当$n$无限增大时，通项$x_n$将随着$n$的增大而增大至任意的大。

上述4个数列，当n无限增大时，通项x_n的变化趋势不相同。如果数列中的x_n随着n的

无限增大而趋于某个固定的常数，我们就认为该数列以这个常数为极限。

定义 2.1　给定一个数列$\{x_n\}$，如果当n无限增大时，x_n无限地趋于某个固定的常数A，则称数列$\{x_n\}$以A为极限。记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n = A \quad 或 \quad x_n \to A \quad (n\to\infty)$$

这时也称数列$\{x_n\}$**收敛**，即当$n\to\infty$时，数列$\{x_n\}$收敛于A。否则，如果当n无限增大时，x_n不能趋于某个固定的常数A，则称数列$\{x_n\}$**发散**。

由定义 2.1 知，例 1 中的数列$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$是收敛的，且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$；例 2 中的数列$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$也是收敛的，且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$；而例 3 和例 4 中数列$\left\{(-1)^{n+1}\right\}$，$\left\{\sqrt{n}\right\}$都是发散的。

2.2　函数的极限

2.2.1　$x\to\infty$时函数的极限

定义 2.2　如果当x的绝对值无限增大时，函数$f(x)$趋于一个常数A，则称当$x\to\infty$时函数$f(x)$以A为极限。记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to\infty)$$

如果从某一点起，x只能取正值或取负值趋于无穷，则有以下的定义。

定义 2.3　如果当$x>0$且无限增大时，函数$f(x)$趋于一个常数A，则称当$x\to+\infty$时函数$f(x)$以A为极限。记作

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to+\infty)$$

定义 2.4　如果当$x<0$且x的绝对值无限增大时，函数$f(x)$趋于一个常数A，则称当$x\to-\infty$时函数$f(x)$以A为极限。记作

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to-\infty)$$

显然，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$的充要条件是：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$且$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$。

【例 1】 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$。

解：函数的图像如图 2-1 所示，当$x\to+\infty$时，$\frac{1}{x^2}$无限变小，函数值趋于 1；当$x\to-\infty$时，$\frac{1}{x^2}$也无限变小，函数值趋于 1，所以有

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=1$$

【例 2】求 $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x$。

解：当 $x\to-\infty$ 时，$2^x\to0$，如图 2-2 所示，所以有

$$\lim_{x\to-\infty}2^x=0$$

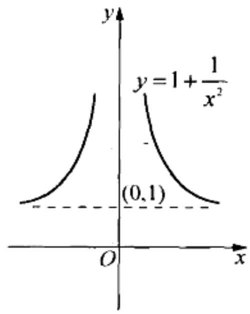

图 2-1

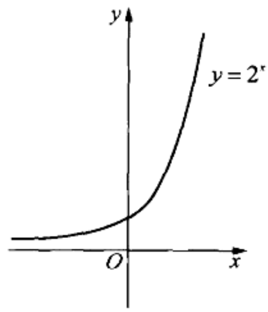

图 2-2

2.2.2 $x\to x_0$ 时函数的极限

考察函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 当 x 分别从左边和右边趋于 1 时的变化，见表 2-1。

表 2-1

x	0.5	0.9	0.99	0.999	0.9999	1	1.0001	1.001	1.01	1.1	1.5
y	1.5	1.9	1.99	1.999	1.9999	×	2.0001	2.001	2.01	2.1	2.5

不难看出，$f(x)$ 无限地趋于常数 2。称当 $x\to1$ 时，$f(x)$ 的极限是 2。

定义 2.5 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域(点 x_0 本身可以除外)内有定义，如果当 x 趋于 x_0 (但 $x\neq x_0$)时，函数 $f(x)$ 趋于一个常数 A，则称**当 x 趋于 x_0 时，$f(x)$ 以 A 为极限**。记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to x_0)\quad .$$

【例 3】根据极限的定义说明：

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$　　　(2) $\lim\limits_{x\to x_0}c=c$

解：(1) 当自变量 x 趋于 x_0 时，作为函数的 x 也趋于 x_0，于是根据定义有 $\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$。

(2) 无论自变量取何值，函数都取相同的值 c，所以 $\lim\limits_{x\to x_0}c=c$。

2.2.3 单侧极限

定义 2.6 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 右侧的某个邻域(点 x_0 本身可以除外)内有定义，如果当 $x>x_0$ 趋于 x_0 时，函数 $f(x)$ 趋于一个常数 A，则称**当 x 趋于 x_0 时，$f(x)$ 的右极限为 A**。记作