周激流 蒲亦非 廖科 编著

分数阶微积分原理及其在现代信号分析与处理中的应用

科学出版社
www.sciencep.com

分数阶微积分原理及其在现代信号分析与处理中的应用

周激流　蒲亦非　廖　科　编著

科 学 出 版 社
北　京

内 容 简 介

本书应用现代信号处理理论，系统地对分数阶微积分在现代信号分析与处理中的应用进行了研究. 主要内容包括：分数阶微积分理论基础、研究现状及其主要应用，现代信号分析与处理中分数阶微积分的数值实现，分数阶演算的模拟分抗电路及其分数阶仿生神经型脉冲振荡器的构造，分数阶微积分在多层动态联想神经网络、数字图像处理、数字滤波器、数字水印技术中的应用等.

本书可供信号与信息处理、通信与信息系统等学科的专业人员以及高等院校相关专业的师生阅读和参考，也可供其他领域研究人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

分数阶微积分原理及其在现代信号分析与处理中的应用/周激流，蒲亦非，廖科编著. —北京：科学出版社，2010.2

ISBN 978-7-03-026745-0

Ⅰ. 分… Ⅱ. ①周… ②蒲… ③廖… Ⅲ. ①微积分-应用-信号分析 ②微积分-应用-信号处理 Ⅳ. TN911

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010) 第 020785 号

责任编辑：鄢德平 王丽平 房 阳 / 责任校对：陈玉凤
责任印制：钱玉芬 / 封面设计：鑫联必升

科 学 出 版 社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

骏 杰 印 刷 厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2010 年 2 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2010 年 2 月第一次印刷 印张：19 1/2
印数：1—2 500 字数：375 000

定价：59.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

当前，信息科学正面临着深刻变革和迅猛发展，信号分析与信息处理的变革与发展就是其中的典型代表. 许多新思路、新方法和新技术不断涌现，同时人们也在不断地拓展着传统的方法和技术.

近三百年以来，分数阶微积分运算，即分数阶微积分 (fractional calculus) 这一重要的数学分支已渐成体系，但对于工程技术界学者而言，它还鲜为人知. 直到 Mandelbrot 提出分形学说，将 Riemann-Liouville 分数阶微积分用以分析和研究分形媒介中的布朗运动以后，分数阶微积分才被应用于许多学科的工程计算中，特别在化学、电磁学、控制学、材料科学和力学中得以广泛关注和应用.

信号处理理论中，传统的微积分运算是一种基本的数学运算，在信息的分析和处理中得到广泛的应用. 微积分是描述 Euclid 空间的有力工具，尤其在信号的奇异性检测与提取方面有着重要作用，其在图像边缘提取、电力故障检测、电分析化学处理、医学图像诊断等方面更是不可缺少的数学工具.

常用的微积分运算、微分方程都是整数阶的，如一阶微分、二阶微分等，然而随着计算能力和信息技术的发展，越来越多的非线性问题成为研究的工作重点，如混沌、分形现象等. 这些都是工程中常见的现象，许多传统的方法对这些问题已经作了一定的研究和解释，然而却十分不足，并不能很好地解释这些现象的原因，这就需要拓展目前已有的方法和研究工具，探讨这些问题新的性质.

进一步的研究表明，分数阶微积分是描述分数维空间的有力工具. 对许多复杂的现象，传统方法往往无能为力，而引入分数阶微积分却可以有新的发现和结论.

对力学和建筑科学而言，已经证明了用分数阶微积分构建的模型是目前描述蠕变柔量和松弛模量全过程的最好方法.

对混沌理论而言，混沌在本质上是一种分形，它具有局部与局部、局部与整体的自相似性. 混沌产生于非线性方程的数值计算结果，但描述混沌吸引子的分形维数却不依赖于方程. 寻找混沌吸引子的普适常数的物理内容与研究分形维数的物理意义在本质上是同一问题.

对信号与信息系统理论而言，一方面，在传统信号分析与处理领域，特别是在信号的奇异性检测和提取方面，整数阶微积分已得到了广泛的应用；另一方面，现代信号分析与处理本质上是研究非线性、非因果、非最小相位系统、非高斯、非平稳、非整数维 (分形) 信号和非白色的噪声，以及非整数阶傅里叶变换等，分数阶微积分是对以上这些“非”问题分析和研究的一个有力工具.

正因为许多传统的方法和手段对于这些高度“非”问题的处理无能为力，而分数阶微积分运算由于其所具有对非线性信号处理的良好能力，近年来逐渐为国外工程应用和科学研究领域所重视，并取得很好的应用效果，成为广泛研究的重点和热点. 相对而言，国内关于分数阶微积分运算在信息理论中的研究工作开展得比较晚，相关研究尚处于初始起步阶段. 因此，如何将分数阶微积分运算应用到信息信号处理中去，不仅具有重要的学术研究价值，而且具有广阔的工程应用前景.

本书是四川大学天思智能信息研究所多年来集体工作的结晶，是我们在近期有关分数阶微积分的研究和教学实践，并综合大量有关文献资料的基础上，进行归纳、总结编著而成. 全书共 11 章，主要内容包括：分数阶微积分的发展历史及其基本概念，分数阶微积分的数值计算方法和工程电路实现，分数阶 Hopfield 神经网络电路的研究，分数阶混沌电路的实现与研究，分数阶微积分运算在语音识别中的应用，分数阶微积分运算在数字图像处理中的应用，分数阶微积分运算在数字通信系统中的应用等.

我们要特别感谢国家自然科学基金 (60572033)、教育部博士点基金 (20060610021)、四川省杰出青年基金 (07ZQ026-121)、中国博士后科学基金 (20060401016)、法–中科学与应用基金 (FFCSA) 对本书研究的支持，感谢法国国家科学院 Jacques Caen 院士、法国南锡第一大学 Jacques Felblinger 教授、澳大利亚 Queensland Technology University 的 Liu Fawang 教授、西班牙 University of La Laguna 的 Juan Trujillo 教授、南京大学的江惠坤教授、瑞典皇家工学院的 Wang Weixing 教授和四川大学电子信息学院的王永德教授、袁晓教授对本书研究内容的有益建议，感谢四川大学天思智能信息研究所的杨柱中博士、赵敏博士、张力支硕士、黄梅硕士和晏祥玉硕士在本书撰写过程中所做的大量整理工作.

由于作者知识水平有限，书中难免会存在不足之处，希望读者不吝指教.

作　者

2008 年 4 月 6 日于四川大学

目　录

第 1 章　绪　　论

1.1　分数阶微积分的起源与发展

分数阶微积分 (fractional calculus) 是相对于传统意义上的整数阶微积分提出来的. 普通的微积分运算，如一阶微分、二阶微分、一阶积分、高阶积分等都是在运算次数为整数情况下定义的微积分运算，而分数阶微积分运算，顾名思义，就是将通常意义下的整数阶微积分运算推广到运算阶次为分数的情况. 这里,“分数”的概念不仅仅指的是有理分数，也包括阶数为无理小数和复数的情形，因此,“分数阶”是一个统称. 同时，在运算阶次为整数的情况时，分数阶微积分就转化为整数阶微积分运算. 从这一性质来说，分数阶微积分运算可以看成是整数阶微积分运算的推广.

分数阶微积分将通常的微分和积分从整数阶推广到任意阶. 这个题目和微分学一起诞生，它可以追溯到 Leibniz 和 Newton 创造微分学的时代. 1695 年，Leibniz 在写给 L'Hospital 的信中，提出了一个关于将微分阶次从整数推广到非整数的含义问题，他的原话是:“Can the meaning of derivatives with integer order be generalized to derivatives with non-integer orders?”要想回答这个问题不是一件易事，即使对于大数学家 L'Hospital 而言. L'Hospital 感到有些好奇，于是转而以问代答反问了 Leibniz 另一个关于 1/2 阶微积分的问题，他的原话是:“What if the order will be 1/2?”Leibniz 在署名日期为 1695 年 9 月 30 日 (分数阶微积分的准确诞生日) 的回信中写到：这将导出一个自相矛盾的论点，总有一天人们可以由它推导出一些有用的结论，他的原话是:“It will lead to a paradox, from which one day useful consequences will be drawn.”由 Leibniz 所提出的问题开创了一门持续蓬勃发展了三百多年的关于分数阶微积分的学说. 历史上许多数学家，包括如 Liouville，Riemann，Weyl，Fourier，Abel，Lacroix，Leibniz，Grünwald 和 Letnikov 这样的数学巨匠，都花费了多年去完善和发展它的理论. 他们的理论与观点在 K.B. Oldham 和 J. Spanier 或 K.S. Miller 和 B. Ross 所著的相关书籍有比较详细的总结.

从数学观点看，分数阶微积分或称分数阶演算是数学分析的一个分支，它研究微分算子 $\mathrm{D}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 和积分算子 J(或用 I 表示) 实数次幂 (即可以扩展为非整数，包括分数) 的理论及应用. 定义在区间 $[a,t]$ 上的函数或信号 $s(t)$ 的 v 阶分数阶微分

最常用的表示符号是 ${}_a\mathrm{D}_t^v s(t)$ 或 $s^{(v)}(t)$. 当阶数 v 取负数时，即进行 v 阶分数阶积分. 分数阶微积分的幂数与 $G^2(x) = G(G(x))$ 中的平方指数意义相同，其中，G 表示某种算子. 所以可将微分算子 D 的非整数次幂表示为

$$\sqrt[p]{\mathrm{D}} = \mathrm{D}^{\frac{1}{p}} = \mathrm{D}^v. \tag{1.1}$$

特别地，作为微分算子的平方根 (半次操作) $\sqrt[2]{\mathrm{D}}$，即对 $\mathrm{D}^{1/2}$ 操作两次以后有一阶微分的效果 ($\mathrm{D} = \mathrm{D}^{1/2}\mathrm{D}^{1/2}$). 令 $\mathbf{Z}$ 表示整数集，当 v 为实整数时，对于算子 $\mathrm{D}^v = \mathrm{D}^n, n \in \mathbf{Z}$ 而言，若 $n > 0$，它等同于通常的幂 n 次操作，若 $n < 0$，它等同于幂 n 次积分 J. 于是，更一般地，可以将幂 D^n 组成的半群视为在一个连续半群中取离散值的部分. 连续半群的理论在数学上已经有系统的研究.

值得注意的是，其实将上述这种非整数阶的微积分称为“分数阶微积分”或“分数阶演算”是一种错误的命名，其中的“分数”是一个错误的归类. 因为指数 v 可以推广到有理分数、无理数甚至复数，所以从严格数学意义上讲，它应该称为“非整数阶微积分”或“非整数阶演算”. 但是由于历史的原因，“分数阶微积分”或“分数阶演算”的命名已经成为习惯用法. 故如不遇混淆，我们仍然沿用这种错误的习惯命名. 另外值得注意的是，分数阶微分算子是一个线性算子.

从分数阶微积分提出之后，许多著名科学家就这一问题进行了探讨. Euler 在 1730 年对微分阶次为分数的情形给出了自己的解释. Lagrange 在 1772 年提出了整数阶微分运算阶次的可叠加性质，但是尚不知道对于分数阶微分运算是否同样具有该性质. Laplace 在 1812 年给出了一些特定的分数阶微分运算表达式. 1819 年，Lacroix 给出了函数 $f(x) = x$ 的 1/2 阶微分运算结果 $(\mathrm{d}^{1/2}/\mathrm{d}x^{1/2})x = 2\sqrt{x/\pi}$. 1822 年，Fourier 给出了分数阶微分的 Fourier 定义.

对分数阶微积分运算理论较为系统性的研究，最早开始于 19 世纪初期和中叶. 这段时期部分的研究成果有：Liouville 在 1832 年研究分数阶微积分定义时，考虑加入余函数到定义中去，同时对 $(\mathrm{d}^{1/2}/\mathrm{d}x^{1/2})\mathrm{e}^{2x}$ 函数进行了分析，指出对函数进行 q 阶微分，可以将函数展开成为幂级数序列，然后类似整数阶微分运算那样，对该级数进行逐项微分运算，并给出了一些分数阶微积分运算解决动力学和几何学的实例. 1834 年，Liouville 开始研究等时曲线问题. 1841 年，Gregory 给出了热力学方程的分数阶微积分运算算子符号表达式，这被认为是分数阶微积分运算算子概念的首次提出. Riemann 在 1847 年将 Taylor 级数展开进行了推广，并加入了余函数到分数阶微积分的定义中，后续的研究表明，加入的余函数可以取为零值，而且分数阶微积分定义的下限可以从零开始. 1953 年，Riemann 给出了采用定积分形式的另一种分数阶微分定义.

Grünwald 和 Krug 最早地将 Liouville 和 Riemann 的结论进行了统一. Grünwald 在 1867 年去掉了 Liouville 方法的限制，采用差商的极限作为微分的定义，对于 q

阶微分，给出了定积分形式的公式. Krug 在 1890 年通过将 Cauchy 积分公式推广到任意阶次，发现 Riemann 的定积分其积分下限为确定值，而 Liouville 的定义其积分下限没有明确值，可以为负无穷大值.

分数阶微积分运算的性质以及对某些常用函数的运算结果，也是在历史的岁月中，经过多年的发展和众多科研工作者的辛勤研究而得到的. 1848 年，Hargreave 将整数意义下的两个函数乘积的微分运算 Leibniz 性质推广到分数阶. 同年，Center 发现了常数的分数阶微分值，Liouville 定义与 Lacroix 定义得到的结果完全相反，Morgan 在 1840 年对此问题作出了统一的解释. 1859 年，Greer 在 Liouville 对指数函数研究的基础上，给出了对于正弦信号和余弦信号的半微分公式. 1868 年，Letnikov 证明了分数阶微积分运算的运算阶次可加性是成立的. 1888 年，Nekrassov 在 Liouville 对指数函数分数阶微积分运算结果基础上，推导出函数 $(x-a)^p$ 的任意 q 阶分数阶导数值. 1927 年，Marchaud 给出了有限差分的分数阶微分的定义. 1941 年，Widder 研究了分数阶积分的 Laplace 变换形式. 1950 年，Stuloff 给出了分数阶差分的定义. 1967 年，Caputo 给出了适合工程使用的分数阶微积分运算的定义. 1970，1971 年，Osler 推导出广义的分数阶微积分运算链式运算法则. 1971 年，Love 将分数阶微积分运算推广到运算阶次为复数的情况.

在分数阶微积分学科发展的历程中，许多科学家、研究学者对其作出了巨大的贡献，相关的著作有：B. Oldham 和 J. Spanier 在 1974 年出版了一本分数阶微积分理论与应用的著作[1]，B. Ross 在 1975 年出版了一本阐述分数阶微积分历史的专著[2]，1987 年，S. G. Samko，A. A. Kilbas 和 O. I. Marichev 出版了一本分数阶微积分运算理论的著作[3]，1993 年出版了相应的英译本[4]，1981~1996 年，K. Nishimoto 出版了分数阶微积分与微分方程的著作[5,6]，1993 年，K. S. Miller 和 B. Ross 出版了一本关于分数阶微分方程的著作[7]，I. Podlubny 在 1999 年出版了分数阶微分方程的著作[8]，A. A. Kilbas，H. M. Strivastava 和 J. J. Trujillo 在 2006 年出版了分数阶微分方程及应用著作[9] 等. 一些关于分数阶微积分运算的应用方面的著作有:《分形与分数阶微积分在连续介质力学中的应用》[10]、《Hamiltonian 混沌与分数动力学》[11]、《分数阶微积分在物理学中的应用》[12]，《分数阶控制器的实现》[13] 等.

对分数阶微积分的研究进行报道的专题期刊有*Journal of Fractional Calculus*和*Journal of Fractional Calculus and Applied Analysis*两种，其他的一些专业学科期刊，如*Journal of Vibration and Control*, *Fractals*, *Chaos*、*Solitons and Fractals*, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *Journal of Nonlinear Dynamics*, *Signal Processing*, *Nonlinear Analysis*，IEEE 部分会刊、物理评论、SIAM 等数十种期刊都对分数阶微积分的理论和应用进行过相关报道，其中，*Signal Processing*杂志在 2003 年出版专辑系统地介绍了分数阶微积分运算在信息科学中的应用. 在 2002 年和 2004 年，*Nonlinear Dynamics*杂志分别出版了两期专辑介绍分数阶微积分理论

及其相关应用. 2002 年，*Chemical Physics* 杂志出版专辑介绍分数阶微积分在奇异动力学中的应用.

目前，分数阶微积分运算在工程中的理论研究与应用分析研究多以各大学、研究院的研究组为主，相关的国际组织有：国际自动化控制联盟组织 (International Federation of Automatic Control, IFAC)，以及葡萄牙工程研究院 (ISEP) 和阿维罗电子通信工程师协会 (IEETA) 等.

第一届分数阶微分运算及其应用 (Fractional Differentiation and its Applications) 大会于 2004 年 7 月 19~21 日在法国波尔多 (Bordeaux) 市召开. 第二届分数阶微积分运算及其应用大会 (2nd IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications) 于 2006 年 7 月 19~21 日在葡萄牙的波尔图 (Porto) 市召开.

分数阶微积分理论与应用的另一个国际会议“分数阶微积分运算理论与应用国际会议”至今已经召开了三届. 第一届是 1974 年 6 月在美国纽黑文 (New Haven) 大学召开的，并出版了相应的会议论文集[14]；1989 年 5 月，在日本东京 Nihon 大学召开了第二届会议. 2002 年，IEEE 控制与决策会议在美国拉斯维加斯 (Las Vegas) 召开，其中，对分数阶微积分运算在自动控制和机器人科学中的应用举行了专题讨论会.

数学界也举办过一些分数阶微积分运算相关的国际会议. 如：1996 年 2 月，在白俄罗斯明斯克 (Minsk) 召开了“边界值问题、特殊函数与分数阶微积分运算”国际会议；2005 年 8 月，在加拿大维多利亚 (Victoria) 大学召开了“解析函数理论、分数阶微积分及其应用”的国际会议.

分数阶微积分运算历史悠久，文献众多，许许多多的科学家、科研人员均对其发展作出了不可磨灭的贡献，限于篇幅，这里不能详尽列举. 近年来，各种分数阶微积分运算在自然科学中应用的研究，以及分数阶微积分运算相关的研讨会议，犹如星火燎原之势在世界各国广泛地开展起来.

1.2　分数阶微积分理论研究及其主要应用

分数阶微积分是一种关于整数阶标准微积分很自然的数学推广. 在数学中，与传统的标准算子相区别，分数阶微积分算子属于非标准算子. 近年来，如分数阶积分-微分算子这样的非标准算子受到了越来越普遍的应用，并且它们正逐步成为应用科学领域内的一个新的学科分支. 适合描述它们的数学理论框架是若干年前被确切定义的伪微分算子 (pseudo-differential operators, PDO)[1,2]. 伪微分算子可以被视为是对具有 $H(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)$ 形式的微分算子的推广. $H(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)$ 不再是一个多项式，而是一个具有条件限制的规则函数. 关于这些非标准算子的理论和应用的逐步研究

表明，非标准算子是一种目前关于如流变学 (rheology)、控制系统、信号处理、声波和电磁的传播 (propagation) 以及计量经济学 (econometry) 等许多复杂自然现象的已有描述中唯一最佳的描述. 目前，分数阶微积分已经在如电化学、扩散、概率、黏弹性、遗传结构、控制论和信号处理等方面进行了一些初步的应用，并取得了一些好的效果. 本章将对其中比较重要的部分研究成果进行介绍. 由于作者知识面有限，对许多学科的研究结果可能挂一漏万.

1.2.1　分数阶微积分理论研究

分数阶微分和分形之间存在某种联系，分数阶微积分是分形的数学基础之一[9,10]. 近几年来，分形在许多学科中突现了它的重要性. 许多学者对分形的数学基础作了许多出色的研究. 有一类 Weierstrass 函数，它是一种具有特殊分形性质的分形函数. 文献 [11] 以这类 Weierstrass 函数为例，力图将分数阶微积分和分形函数进行合并. 文献 [12] 对已知的复分数指数幂在时域中的分数阶积分的几何以及物理意义进行了探讨，他们研究发现分数阶积分虚数部分 (imaginary part of the fractional integral) 和离散尺度恒定性 (discrete scale invariance) 现象是相关的，并且只能以实规则离散分形的形式呈现. 分数阶微积分的 Grünwald 定义通常被用于数值估计分数阶微分值. 它是对整数阶微分的有穷差分公式的推广. 有学者将对于向量分数阶微分的 Grünwald 定义式进行了推广. 对于空间变量而言，该推广更有利于求解分数阶的偏微分方程[8]. 尽管分数阶微积分在理论和应用上有很多优势，但是其中还有一些不太清楚的地方使得不能系统地运用它. 文献 [16] 系统地研究了分数阶微积分的定义问题，不仅研究了局域 (Grünwald-Letnikov) 定义还考虑了其全局定义. 其研究表明，应该采用 Cauchy 公式，因为它在信号处理和控制方面的应用保持了一致性. 文献 [13] 论述了用功能微积分 (functional calculus) 定义的线性分数阶 (伪) 微分算子 (推广 Fourier 变换所得) 的功率. 文献 [15] 研究了分数阶微积分数字化实现的关键步长，其中提出了两种方法，一种是递归离散化 Tustin 算子 (Tustin operator)，另一种是用 Al-Alaoui 算子 (Al-Alaoui operator) 通过连续分数扩充来直接进行离散化，他们对其最小相位和状态进行近似离散化. 此外，还有学者将算子理论与归一化的分数阶算子相结合，以一种系统和完备的方式推演出了关于分数阶卷积和相关性算子的显式表达，通过算子运算，进一步提出了关于这些分数阶算子可以有效离散实现的可选公式，在此基础上将快速分数阶自相关应用于对线性 FM 信号的侦测与参数估计[22].

1.2.2　分数阶微积分应用于描述各种物理系统和材料的动力学行为

在过去的几十年里，分数阶微积分常被用来描述各种物理系统和材料的动力学行为. 散布性传送 (diffusive transport) 是自然界中一种最重要的传送机械原理.