

数学竞赛成功捷径

——数学奥林匹克家庭辅导

李戈扬 刘怡冬 编

上海交通大学出版社

·全国奥数竞赛题选编·
·全国奥数竞赛题选编·
·全国奥数竞赛题选编·

出版者的话

近年来,我国中学生在国际数学奥林匹克(IMO)竞赛中的优异成绩令世界各国刮目相看,也大大推动了我国中、小学数学竞赛活动的开展。小学阶段的“华罗庚金杯”少年数学邀请赛、小学数学奥林匹克等全国比赛,以及各省、市的地方性数学竞赛吸引着千千万万小学生和他们的家长。数学竞赛的优胜者成为重点中学争相寻觅的尖子,而数学能力的训练更为小学生将来攀登新高峰打下坚实的基础。

“望子成龙”之心,人皆有之。然而,大多数家长虽有使孩子提高数学能力,从而在数学竞赛中获奖的强烈愿望,但却为缺乏辅导孩子的方法和资料而发愁。

为此,我们约请上海交通大学李戈扬副教授和他就读于华东师大二附中的孩子刘怡冬共同编写了这本书,目的在于向广大有志参加数学竞赛的小学生和他们的家长介绍学习竞赛数学并且获得成功的经验、方法和资料。

作者辅导孩子学习数学的方法独特、成绩斐然。刘怡冬自五年级起参加上海市、全国和美国举办的小学、初中数学竞赛,每次均能获得一、二等奖的优异成绩,是上海同龄选手中的佼佼者。

一些小学生接受作者按本书介绍的指导思想、方法和资料进行训练后,数学竞赛能力也得到迅速提高,并在上海市和全国数学竞赛中获奖。

我们相信,如果小学生很好地掌握了本书的内容,他就具

备了在省、市甚至全国数学竞赛中获奖的能力。

希望本书能成为小学生和他们家长的朋友，帮助孩子登上数学奥林匹克的领奖台。

1993年7月

目 录

一、数学竞赛家庭辅导问答	1
1. 数学竞赛的意义如何?	1
2. 小学生有哪些重要的数学竞赛?	2
3. 为什么有许多孩子在学校里是数学尖子,却不能 在数学竞赛中获奖?	3
4. 小学数学竞赛的命题范围怎样?	3
5. 小学生数学竞赛的家庭辅导有什么优点?	4
6. 家长能不能辅导孩子学习竞赛数学?	5
7. 为什么说小学生数学竞赛的家庭辅导机不可失? ...	6
8. 家庭辅导与学校教学怎样配合进行?	7
9. 家庭辅导与数学竞赛辅导班的关系怎样?	9
10. 如何选择家庭辅导的参考书?	10
11. 怎样进行家庭辅导?	10
12. 怎样帮助孩子克服“粗心”的毛病?	12
13. 怎样做好参赛前的准备?	13
14. 怎样克服赛场上的紧张心理?	14
15. 怎样正确看待比赛成绩?	15
二、专题辅导	17
1. 数的整除	17
2. 尾数和余数	26
3. 奇数与偶数	35
4. 分解质因数	45

5. 分数与小数	53
6. 数列及其求和	67
7. 数谜	80
8. 包含与排除	96
9. 计数	106
10. 抽屉原理	121
11. 逻辑推理	128
12. 应用题(一)	141
13. 应用题(二)	151
14. 平面图形	164
15. 立体图形	176
三、综合练习	186
四、答案	211

一、数学竞赛家庭辅导问答

1. 数学竞赛的意义如何？

数学是一切科学的基础。

祖国需要科学，社会主义现代化建设需要科学，卫星上天、舰船远航、工厂建造、农业革新、各行各业的发展都离不开数学，都需要大批高水平的数学人才。而数学竞赛就是发现和培养数学人才的一条重要途径。

数学是中、小学课程中的一门主要课程，并且也是中学物理和化学等课程的基础。因而从孩子上学的第一天起，他们的数学成绩就深受家长和老师的重视。特别是在小学阶段，孩子的数学能力常被作为评价他们智力发展的主要依据和标准。但是，在学校里，由于一个班级有几十位学生，老师在课堂教学中只能根据小学数学教学大纲的基本要求，紧扣小学数学课本上的内容，着眼于全体学生的数学水平提高。这样一来，对于一些数学成绩好，并且学有余力的“数学尖子”来说，就感到“吃不饱”，从而阻碍了他们数学才能的发展。而数学竞赛正是为了满足这一部分“数学尖子”的需要，为他们提供一个学数学，赛数学的大舞台。让这些爱好数学、钻研数学、长于数学的学生在这个舞台上表现自己，激励自己，更加生动活泼地学习数学，发展自己的数学才能。同时也吸引更多的学生学数学，爱数学，发展他们的智力。

对于家长来说，鼓励自己的孩子学习竞赛数学，参加数学竞赛，可以使他们学得更深，学得更活，学得更扎实，即使没能

在数学竞赛中获奖，也可以得到比获奖更为重要的东西——知识与能力。

2、小学生有哪些重要的数学竞赛？

我国小学生数学竞赛活动正在全国各地蓬勃开展。目前全国性的小学数学竞赛主要有两个：一个是“华罗庚金杯”少年数学邀请赛；一个是小学数学奥林匹克邀请赛。

“华罗庚金杯”少年数学邀请赛是由共青团中央、中国少年报、中央电视台、中国科协青少年部主办的比赛。从1986年开始举办，每两年一届，至今已举办了四届，参加对象是小学六年级和初中一年级学生。命题基础是小学数学的范围。比赛分预赛、复赛、决赛一、二试和面试几个阶段进行。预赛题目由中央电视台播出。复赛在全国范围内统一命题，由各参赛城市具体组织进行。复赛中各城市按给定数额评出一、二、三等奖，一般是大城市一等奖四名，中、小城市一等奖三至二名。获得一等奖的选手再集中到一起进行决赛和面试，决出金牌、银牌和铜牌，参加决赛的选手至少已稳获铜牌。“华罗庚金杯”少年数学邀请赛是我国最重要的小学数学竞赛，不仅因为这个比赛是以我国杰出的数学家华罗庚教授的名字而命名的比赛，更因为参加比赛的选手有数百万之多，并且有预赛题目由中央电视台播出和一等奖获得者将集中于某一城市决赛等特点，使这项比赛具有重大的影响，受到广大中、小学生、教师和家长的欢迎。华罗庚金杯招唤着每一个有志少年。

小学数学奥林匹克邀请赛是由中国数学学会主办的全国性比赛。该比赛从1989年开始举办，每年进行。参赛对象是小学高年级学生。比赛于每年三、四月份举行，分初赛和决赛两个阶段进行。全国统一命题，统一确定获奖的得分标准。与

“华罗庚金杯”少年数学邀请赛相比，小学数学奥林匹克邀请赛除了每年举行以外，还有一个重要特点，就是全国统一确定获奖标准，获奖的难度较大，获奖面也较小。小学数学奥林匹克是迈向国际数学奥林匹克的第一步。

除了以上两个全国性比赛以外，许多省、市、自治区和一些城市还举办地区性的小学数学竞赛，如北京市小学生“迎春杯”数学竞赛、上海市小学数学竞赛、天津市小学生“红花奖”数学竞赛、江西省小学生“八一杯”数学竞赛、福州市小学生“迎春杯”数学竞赛、广州市小学数学竞赛等等。可以这样说，小学生只要努力学习，打好基础，做好准备，不愁英雄无用武之地。

3. 为什么有许多孩子在学校里是数学尖子，却不能在数学竞赛中获奖？

数学竞赛为千千万万有志少年提供了施展才智的舞台。“望子成龙”也是每个家长的良好愿望。然而，有许多孩子虽然在学校里是次次考试名列前茅的数学尖子，但在数学竞赛中却一筹莫展，难以获得好成绩。究其原因，既不是孩子不如别人聪明，也不怨学校教学质量不高，而是因为学校教学是采用面向全体学生的“齐步走”方式，不能满足数学竞赛的要求和发掘出这些学生的数学潜能。所以未经专门训练的数学尖子在强手如林、竞争激烈的数学竞赛中自然就尖不起来了，不能获得好成绩当然也是预料之中的。

其实，这些约占班级总人数百分之十，且学有余力的数学尖子已具有良好的先天条件，如果用正确的方法对他们进行必要的训练，充分发掘其数学潜能，他们必将如虎添翼，完全有可能在数学竞赛中获得好成绩。

4. 小学数学竞赛的命题范围怎样？

小学生要想在数学竞赛中获得好成绩，应该而且必须了解小学数学竞赛的命题范围，才能进行有的放矢的针对性训练。这一点是每位家长、老师和同学都一致的看法。那么，小学数学竞赛的命题范围到底包括哪些内容呢？

首先从原则上讲，小学数学竞赛主要是鼓励同学们把小学数学的内容学深、学透、学扎实，把基础打好。而不提倡进行超前学习，这一原则当然是由竞赛的命题范围来体现的。但是要把小学数学的内容学深、学透、学扎实也不可理解为仅把课本上的内容掌握好。事实上，小学数学竞赛的命题范围也超越了课本的内容。

具体地说，小学数学竞赛的命题范围主要包括三部分：第一部分是小学数学教学大纲所包括的数学知识，如分数与小数、分解质因数、应用题、简单几何形体的面积、体积和表面积等，但是，在数学竞赛中属于这些内容的题目都具有较强的灵活性，强调基本概念清楚和解题的技巧；第二部份属于小学数学教学大纲内容的提高和深化，主要包括数的整除性、数的奇偶性、整数的尾数和余数、数谜、简单数列求和等内容，这部分内容虽然已在学校数学教学中出现过，但其深度远不能满足竞赛的需要；第三部分内容是小学数学教学大纲以外的，但具有小学数学基础的小学生可以接受和掌握的一些数学概念和数学思想方法，如抽屉原理、包含与排除、计数的原理和方法、逻辑推理等等。这些内容虽然小学生一般没有接触过，但基于小学数学基础是完全可以掌握的，因为小学数学竞赛中涉及的这部分内容都是最基本和最简单的。不过，如果小学生赛前不进行针对性训练。在赛场上遇到这类题目就会觉得无从下手，有的甚至连题目都读不懂。

5. 小学生数学竞赛的家庭辅导有什么优点？

小学数学竞赛包含了学校的课堂教学内容以及这些内容的深化与提高，更包括了许多课外的数学知识。仅靠学校的课堂学习而不增加课外知识的学生要想在省、市以上的数学竞赛中获得好成绩是非常困难的。因此，各地都为一些数学基础好的同学开办了各种不同形式的辅导班，如北京市各区都设立了数学奥林匹克学校，上海市及其各地区少科协也都有数学竞赛辅导班。这些辅导班对小学生数学竞赛能力的提高起到了很好的作用。但是由于师资、教室等各种条件的限制，能参加辅导班学习的同学仅是少数，大多数同学得不到进班学习的机会。为了使更多热爱数学的孩子得到培训的机会，特别是使自己孩子的数学潜能得以发掘，进行家庭辅导是一条行之有效的途径。

首先，家长对自己孩子的情况最了解，知道孩子的长处和不足，能够及时有效地对症下药，针对自己孩子的具体情况进行辅导，把主动权掌握在自己手里，常可收到事半功倍的效果。其次，家长与孩子朝夕相处，可随时与孩子就身边生活中的数学问题进行讨论，寓教于乐，使孩子感受到数学的乐趣和魅力，从小热爱数学。如此长期坚持，必将使孩子受益终身。这样的效果，恐怕是任何辅导班和训练班都不能得到的。此外，家长对子女进行家庭辅导时责任心强；可因材施教；在辅导中孩子能随时提出问题，充分发表自己的观点，从而可获得较快的提高，这些都是家庭辅导的优点。

6. 家长能不能辅导孩子学习竞赛数学？

有些家长说：家庭辅导当然好，可是竞赛数学那么难，我们当家长的能辅导得了吗？对于这个问题，回答是：一般具有高中文化水平的家长，是完全能胜任辅导孩子学习竞赛数学的。笔者通过几年来辅导孩子学习竞赛数学的实践而深切

体会到，竞赛数学确实有些难度，其中有一些没接触过的难题，就是大学生也未必能做好。但是，小学数学竞赛所涉及的内容必竟只是一些基础的数学知识，并且辅导教材上对基本概念和解题的方法都有深入浅出的讲解。对于具有高中文化水平以上的家长，只要下决心，下点功夫钻研一下，是完全可以掌握好的。即使有一些问题自己一下子搞不清，也可以把问题提出来，和孩子一起进行讨论。这样的讨论不仅对自己有帮助，而且能提高孩子的学习兴趣，还可使孩子得到从书本直接学习知识的锻炼，这样的锻炼说不定比孩子上十堂课的收获更大，意义更深远。

7. 为什么说小学生数学竞赛的家庭辅导机不可失？

数学是训练思维的体操。正如培养体育运动员必须从小抓起一样，数学思维的训练也应该从小抓起，这样才有利于及早开发的孩子思维素质。如果您的孩子对学习数学有浓厚的兴趣，并表现出较好的数学潜能，学校里的课堂教学又不能满足他的需要，而您却没有注意到这种情况，不为他创造更好的学习条件，也没有对他进行必要的辅导，错过了开发他思维素质的时机，将来您会抱憾终身！

如果说，学龄前的智力开发是家长辅导孩子的最佳时期，那么对小学生的家庭辅导则是家长辅导孩子的最后良机。学龄前的孩子有强烈的求知欲，若能在这一阶段对孩子的语言能力，数学能力和其他能力进行及时的开发，将对孩子进入学校学习打下良好、坚实的基础。同样，如果能对上小学的孩子的数学能力进行培养和训练，使他在课堂学习之外还能学习和接受一些数学思维方法，并打好数学基础，那么对他将来到中学里学习难度较大的代数、几何、三角等数学课程和

与数学关系较大的物理等课程会有极大的好处。

说实话,到了中学里,数学、物理等课程都有较大的难度,一般家长要对上中学的孩子进行辅导是比较困难的,到时候会有爱莫能助的感觉。由此看来,趁家长还有能力使得上劲的时候,抓住孩子上小学的最后机会进行辅导,不仅仅满足于课堂教学的内容,而把目标放到参加数学竞赛上,为孩子打下坚实的基础,对家长来说实在是机不可失,时不再来了。

8. 家庭辅导与学校教学怎样配合进行?

我们在强调家庭辅导的时候,必须摆正家庭辅导和学校教学的关系,并使两者有机结合、相辅相成,才能充分发挥课堂和家庭辅导各自的优势,使孩子得到最大的提高。

首先,作为家长,应该充分发挥学校课堂教学的主导作用,教育孩子认真上好每一堂课。在课堂上开动脑筋、积极思考、勇于发言、敢于提问,真正掌握老师所教的内容,并认真完成作业。因为学校教学是我们学好数学的基础。只有打好基础,才能进一步学习课外更多的知识。这好比建一幢大厦,如果不打好基础,大厦就成了空中楼阁,不仅建不高,而且有坍塌的可能。另外,从小学数学竞赛的命题范围来看,其中一部分本身就是学校教学大纲所规定的内容;还有一部分属于学校教学内容的提高与深化,其基础当然也是学校的教学内容;就是一些超出学校教学范围的竞赛数学的内容,也只有在打好基础的前提下才能学得懂、学得深、学得好,所以学校教学的主导作用一定要强调。

家庭辅导,应该在学校教学的基础上,把重点放在学校教学内容的深化和提高,以及学校教学内容范围之外的竞赛数学上,集中精力抓好这些提高部分,使学校教学和家庭辅导各有侧重,各负其责,并有机结合,从而让孩子在学校和家庭中

都能学到新东西。只有这样,才能充分发挥家庭辅导的效果,为孩子建立起有扎实基础的数学才能金字塔。

家庭辅导要防止一些不正确的方法:

有的家长用家庭辅导代替学校教学,自己花了很多时间,把本来应由老师在课堂上教的内容,越俎代庖由自己来教,同样的内容让孩子在家里和课堂上重复学两遍。这种做法对那些数学基础较差的孩子跟上学校里老师的教学进度或许有一些帮助,但对于把目标放在参加数学竞赛的同学,这种做法是完全不可取的。

还有一些家长不了解数学竞赛究竟是赛什么,即不了解数学竞赛的命题范围,让孩子做了大量的学校教学内容范围的习题,以为只要题目做得多,孩子的数学水平就可以提高,因而也就能在数学竞赛中获奖。这些家长不知道,如果不让孩子学习新东西,仅限于学校教学内容的深度,进行大运动量的练习,只能使孩子熟练这一水平的计算而不能得到提高。就象一个仅练习加、减法的孩子,做得再多,也不会解乘、除法的习题。这种训练方法更为有害的是使孩子感到枯燥和疲劳,失去对数学这一有趣思维体操的兴趣。

也有一些家长,不注意学校教学的基础作用,一味追求让孩子学一些难题,甚至偏题,怪题。这样做是未能认识到学习数学应按循序渐进,一步一个脚印的认识规律去做。对于难题,如果超出了孩子的知识水平,会使孩子因总是做不出而对数学失去兴趣,即使偶然做出一两题也不能深刻理解,对孩子的提高作用不大。

可见,在辅导孩子时,既不能仅限于学校教学内容的范围,也不能不重视课堂教学的基础作用。只有正确处理好家庭辅导和学校教学的关系,才能使孩子的数学能力真正得到

提高。

9. 家庭辅导与数学竞赛辅导班的关系怎样?

由于数学竞赛活动的蓬勃开展,许多城市地区和学校都办起了各种形式的数学竞赛辅导班,一些数学才能突出的孩子参加了辅导班的学习。那么,家庭辅导与数学竞赛辅导班怎样配合?孩子参加了数学辅导班,还需要进行家庭辅导吗?

为了回答这个问题,我们首先对数学竞赛辅导班的情况进行分析:数学竞赛辅导班的主要目的之一就是为同学参加数学竞赛提供辅导和训练,辅导班的老师大多具有丰富的教学经验,所教的内容也比学校教学内容更深更广,属于竞赛数学的范围,当然比家长的辅导更有系统性。但是,与家庭辅导相比较,数学竞赛辅导班也有其不足之处。例如,象学校教学一样,数学竞赛辅导班的老师是面向全班的数十个同学,他的教学进度和深度不一定能满足您孩子的需要。另外,数学竞赛辅导班作为一种课外活动的形式,一般每星期只进行一次,时间安排上较松。而数学竞赛的内容广泛,每周辅导讲一个内容,一个学期也仅能把数学竞赛的各个专题讲一遍,而没有足够的时间深化和提高。

所以,如果孩子已经参加了数学竞赛辅导班,家长应该把家庭辅导与数学辅导班的教学有机地结合起来。在每次辅导班上课后,指导孩子把老师讲到的内容认真加以复习总结,并找一些数学竞赛参考书的相关内容进行学习,达到扩展和提高的目的,然后辅以练习和习题进行巩固,从而使孩子真正掌握这一专题的内容。这样家庭辅导围绕辅导班的教学进度进行可使家庭辅导的目标明确,并使孩子在辅导班的学习扎实巩固。

所以,在孩子参加了数学竞赛辅导班以后,家庭辅导不是无事可做,而是大有可为。应该看到,孩子参加了辅导班,就是在获奖的道路上前进了一步。作为家长,如能正确处理好家庭辅导与数学辅导班训练的关系,就可使孩子在这条道路上再稳步前进,从而真正登上数学竞赛的领奖台。

10. 怎样选择家庭辅导的参考书?

选好参考书,是进行家庭辅导的第一步。近年来,由于小学数学竞赛的蓬勃开展,与之相配套的参考书也日渐增多,为家长选择提供了方便。

目前有关小学数学竞赛的参考书主要分成两类:一类是以习题与解答组成的竞赛题集。这种题集的题目大多来自历年的数学竞赛,在编排方式上有的是以竞赛试卷的形式出现,也有的按题目类型分类编排。由于一些数学竞赛题很难说应该属于什么类型,因而以前一种编排形式为多。还有一类竞赛参考书是以专题讲座形式为主的辅导教材。这类教材的各个章节基本上是相对独立的,读者可根据需要选学其中的任一章节或专题,而无需循序而进。

选用数学竞赛的家庭辅导教材,首先要选专题讲座形式的参考书。可以多准备几套,从中选择一套内容较全面,讲解较详细,易于理解的参考书为主教材,其他的参考书为辅助教材,一个专题一个专题地进行学习和辅导。对于较难理解的专题可以多看几本书中的有关章节,相当于多听几位老师的讲解;或许可以有利于理解。

此外,还要选择一些以习题为主的竞赛题集供孩子练习用。由于竞赛题内容广泛,形式多样,变化较多,故习题集要尽可能地多收集一些;让孩子熟悉各类题目的变化,开阔眼界。

11. 怎样进行家庭辅导?

对孩子进行家庭辅导，要采取正确的方式。我们的体会是，家庭辅导要充分发挥家长和孩子一对一教学的优势，充分调动孩子的思维积极性，采用讨论式教学，让孩子充分发表自己的意见和想法，寓教于乐，生动活泼地进行学习。

与课堂教学以老师为中心不同，家庭辅导应该以孩子为中心进行。在辅导中，要充分发挥孩子的学习主动性。对于一个问题，首先让孩子谈出自己的理解和看法，然后家长与孩子共同进行讨论。孩子谈自己看法的过程，不仅是一个学习的过程，也是一个整理和提高的过程。如果孩子能把他学到的东西用自己的语言讲出来，并使别人接受，那么说明这些内容他是学懂了。家长可以在此基础上提出各种各样的问题让孩子解答，从而把学到的知识进行扩展和提高。对于同一个问题，应鼓励孩子从各个角度去考虑；对于一个题目，要鼓励孩子用多种方法去求解，并讲出各种解法的思路，比较各种解法的优劣。一个题目解完后，还可以改变题目中的部分条件，使其变成另一个或另一类题目，让孩子举一反三地学习。这样的讨论式学习，孩子学得深、学得透、学得活、记得住，不仅可以提高孩子的学习兴趣，还可大大提高孩子的表达能力。对孩子来说这样做不仅仅是学好了数学，对各门功课的学习和提高都会起到不可估量的作用。

例如，对于一个等差数列的求和问题：

$$35 + 36 + 37 + \cdots + 43 + 44 = ?$$

可以有多少种解法？

除了一个一个笨加起来以外，采用数列求和公式

$$S = \frac{(35 + 44) \times 10}{2} = 395$$

也是一种解法。那么，还有其他的解法吗？当然有。例如，考

考虑到求和的数列共有 10 项,每项的个位数互不相同,则个位数的和就是 45。又考虑到十位数有 5 个 3 和 5 个 4,共计是 350,所以它们的和是

$$S = 30 \times 5 + 40 \times 5 + 45 = 395.$$

另外还有一些解法,不一一列举。

再进一步,如果上面的数列变成下面这些形式,应该怎么做呢?

$$\textcircled{1} \quad S = 305 + 306 + 307 + 308 + 309 + 400 + 401 + 402 + 403 + 404;$$

$$\textcircled{2} \quad S = 35 + 45 + 55 + \cdots + 95 + 105 + 115 + 125;$$

$$\textcircled{3} \quad S = 35 + 36 - 37 + 38 - 39 + 40 - 41 + 42 - 43 + 44;$$

$$\textcircled{4} \quad S = 35 + 37 + 39 + \cdots + 51 + 53;$$

.....

照这样,还能变出一些什么有趣的题目呢?

我们想,通过这样的讨论和学习,孩子对等差数列一定可以掌握得很牢固。

12. 怎样帮助孩子克服“粗心”的毛病?

许多孩子有“粗心”的毛病,常常在考试和竞赛中把平时能够做对的题目做错了,从而失去获奖的机会,令家长和孩子懊丧不已。

孩子的“粗心”一般可分为两种情况:一种情况是孩子对所学的内容理解不深,掌握不牢所致。

孩子平时做练习时因为是将同类题目放在一起进行,所以思路容易清楚,也能发现问题的关键所在,因而正确率较高。而在竞赛中,各种类型的考题需要在较短时间内用不同的方法去求解,孩子的思想处于高度紧张状态,在这样的情况下,孩子虽然基本上能用正确的方法去思考 and 求解,但却难免