Selections from Mathematical Works of Professor LIANG XUEZHANG

梁学章教授数学文选

吉林大学出版社
JILIN UNIVERSITY PRESS

Selections
from
Mathematical
Works
of
Professor
LIANG XUEZHANG

梁学章教授数学文选

吉林大学出版社
JILIN UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

梁学章教授数学文选/梁学章著.—长春：吉林大学出版社，2009.11

ISBN 978-7-5601-5052-9

Ⅰ.①梁… Ⅱ.①梁… Ⅲ.①数学—文集 Ⅳ.①01-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 201631 号

书名：梁学章教授数学文选

作者：梁学章 著

责任编辑、责任校对：曲天真

吉林大学出版社出版、发行

开本：787×1092 毫米 1/16

印张：40.125 字数：1000 千字

ISBN 978-7-5601-5052-9

封面设计：孙 群

长春市泽成印刷厂 印刷

2009 年 11 月 第 1 版

2009 年 11 月 第 1 次印刷

定价：80.00 元

社址：长春市明德路 421 号 邮编：130021

发行部电话：0431-88499826

网址：http://www.jlup.com.cn

E-mail：jlup@mail.jlu.edu.cn

前 言

2009 年 12 月 1 日，是梁学章先生的 70 华诞. 在这个特殊的日子来临之际，我们通过吉林大学出版社出版了《梁学章教授数学文选》，以作庆祝.

梁学章先生，生于山东省平度县. 1957 年从黑龙江黑河中学毕业后，考入吉林大学数学系计算数学专业. 1965 年研究生毕业后，就一直在吉林大学数学系工作. 40 多年来，梁先生兢兢业业地在计算数学、计算机图形图像处理等领域里辛勤耕耘，贡献了无限的才华和智慧. 同时，也从中获得了作为耕耘者所独有的那份喜悦.

梁先生早年从事数值逼近方面的研究，特别是在多元插值与多元切比雪夫逼近方面，获得了一系列重要的研究成果，受到国内外专家的好评. 其硕士毕业论文《关于多元函数的插值与逼近》给出了构造 R^2 中插值适定结点组的叠加插值法 (包括添加圆锥曲线法)，首次将多元插值的适定性问题转化为一个几何问题，从而使得人们可以借助于代数几何的方法来研究多元多项式插值适定结点组的理论问题及构造方法. 这一方法后来受到国内外很多学者的认可和高度评价，奠定了梁先生在计算数学领域的坚实地位.《文选》在附录中收录了先生当年硕士毕业论文的部分章节，这部分内容无疑是先生青年时代的得意之作.

自留校任教以来，梁先生始终忠诚教育事业，致力于学科建设. 梁先生为人谦和坦诚，淡泊名利，潜心治学，为吉林大学数学系的教学和科研的发展，为我国计算数学人才培养和学科发展都作出了重要贡献. 梁先生坦荡的胸襟、高尚的品格、渊博的学识、严谨的治学态度和锲而不舍的工作精神无不深刻的影响着、鞭策着一代又一代年轻的数学学者. 梁先生于 1990 年开始任教授， 1992 年获国务院政府津贴并获吉林英才奖章， 1993 年开始担任博士生导师. 迄今指导毕业博士研究生 15 名，硕士研究生 27 名，桃李芬芳，功绩斐然. 从梁先生师门毕业的博士、硕士，现在都活跃在国内外教育、科研等领域的第一线，多名弟子已晋升为教授 (博士导师) . 恩泽弟子、师辈传承. 笔者作为先生的学生，也从先生身上学到了很多做人和做学问的道理，这必将是我们一生都受用不尽的财富.

几十年来，梁先生在科研、教学等方面取得了丰硕的成果，发表科研论文130余篇。其中被SCI收录13篇，被EI收录24篇，被ISTP收录23篇。出版著作五部，主持并完成了5项国家自然科学基金资助项目。这里，我们主要介绍代表性科研成果，以此作为对先生数十年研究工作的总结。

主要研究成果：

• 将代数几何中Bezout定理和Cayley-Bacharach定理等有关理论应用于解决多元插值的适定性问题，提出了叠加插值法，并给出了若干不规则结点组上的多元Lagrange插值格式和多元Hermite插值格式；

• 发现了圆域、三角形域和高维方体域上的最小零偏差多项式；

• 对于多元切比雪夫逼近的强唯一性给出了一个新的特征定理；

• 对于多元扩张插值(Kergin-Goodman插值)导出了一般的Lagrange型表达式；

• 对圆域上光滑的被插函数首次证明了Hakopian插值和Kergin插值的一致收敛性和平方收敛性，给出了收敛速度估计，并建立了基于Hakopian插值的CT图像重建算法；

• 提出了有重要应用价值的一类二元Box-样条周期小波和一类Loop细分小波，并将小波方法应用于求解第二类积分方程，应用于图形图像压缩和数字水印技术；

• 运用图论方法较好地解决了二元四次样条插值问题，并提出了一些有效的实现空间B样条曲面和NURBS曲面间光滑拼接的充分性条件和算法。

出版著作：

《多元函数逼近》(1988)；《数值逼近》(1992)；《小波分析》(2005)；《多元逼近》(2005)；《数值分析》(2008)。

主持并完成了五项国家自然科学基金资助科研项目：

小波逼近及其应用(1993)；非线性数值分析(1994—1995)；多元插值的理论与应用(1996— 1998)；实用多元小波(2006)；多元样条小波、多小波框架的构造及其在图形图像处理中的若干应用(2007—2009)。

科研获奖情况：

• 1982年与徐利治、王仁宏、周蕴时合作科研项目《数值逼近与数值积分》，获国家自然科学三等奖。

• 1988年与王仁宏、周蕴时合作科研项目《多元逼近》，获国家教委科技进步二等奖。

出席国际会议情况：

- 1990 年参加在日本京都举行的世界数学家大会，及在日本松山举行的国际计算数学学术会议，并应邀在名古屋大学进行访问讲学；
- 1997 年应邀参加香港中文大学举办的小波及其应用国际讨论会；
- 1998 年参加在美国纳什维尔城举行的第九届国际逼近论会议，并应邀在美国南卡罗来纳大学访问讲学；
- 1999 年应邀参加香港城市大学举办的最小能量问题国际学术讨论会，并做学术报告；
- 2002 年参加在北京举行的世界数学家大会。

《文选》录入了梁先生在五个研究方面的共计 60 篇文章，即多元 Lagrange 插值与多元切触插值；多元扩张插值；多元 Tchebycheff 逼近与算子逼近；样条函数与 CAGD；小波分析及其应用，这些都是先生这些年的心血之作。纵观《文选》，使人不禁感叹，在几十年的研究生涯中，先生一直坚持立足于自己的研究领域，并不断探索学科交叉与延伸，为计算数学领域的发展奠定了坚实而厚重的基础。

人们喜欢用德艺双馨来评价和赞誉成功人士。其中，德指的是道德，即做人；艺指的是才艺，即成就。在这个意义上，先生堪称是在德和艺两方面都达到崇高境界的数学名家。

研究数学和发展数学的坚定理念已经鼓舞着先生从容豪迈的走过 70 个春秋，我们有理由相信这一信念也必将鼓舞他度过更加幸福美好的晚年。

吕春梅　车翔玖
李　强　张　明

2009 年 11 月于长春

文 选 目 录

前 言 .... (i)

1. 二元插值多项式的收敛性，吉林大学自然科学学报，(1)(1963), 579–582. .... (1)

2. 二元插值的适定结点组与迭加插值法，吉林大学自然科学学报，(1)(1979), 27–32. .... (5)

3. 关于多元函数的插值与逼近，高等学校计算数学学报，创刊号 (1979), 123–124. .... (12)

4. 构造二元切触插值公式的方法，数学研究与评论，(1)(1981), 91–99. (与朱功勤合作) .... (15)

5. On Bivariate Osculatory Interpolation, J. Comput. Appl. Math., 38(1991), 271–282. (与李落清合作) .... (24)

6. Lagrange Interpolation on a Sphere, Northeast. Math. J., 16(2)(2000), 243–252. (与冯仁忠，崔利宏合作) .... (37)

7. Properly Posed Sets of Nodes for Multivariate Lagrange Interpolation in C^s, SIAM J. Numer. Anal., 30(2)(2001), 587–595. (与吕春梅，冯仁忠合作) .... (49)

8. The Application of Cayley-Bacharach Theorem to Bivariate Lagrange Interpolation, J. Comput. Appl. Math., 163(2004), 177–187. (与崔利宏，张洁琳合作) .... (60)

9. 多元 Lagrange 插值与 Cayley-Bacharach 定理，高等学校计算数学学报，27 专辑 (2005), 276–281. (与张洁琳，崔利宏合作) .... (72)

10. Some Researches on Rrivariate Lagrange Interpolation, J. Comput. Appl. Math., 195(2006), 192–205. (与王仁宏，崔利宏，张洁琳，张明合作) .... (78)

11. Multivariate Lagrange Interpolation and an Application of Cayley-Bacharach Theorem for It, http://arxiv.org/abs/math/0608115. 2006. (与张洁琳，张明，崔利宏合作)

.... (93)

12. 高维空间中代数流形上多项式空间的维数与 Lagrange 插值适定结点组的构造，吉林大学学报 (理学版), 44(3)(2006), 309–317. (与张明，张洁琳，崔利宏合作)

.... (113)

13. Some Researches on Multivariate Lagrange Interpolation along the Sufficiently Intersected Algebraic Manifold, Applicable Analysis, 86(6)(2007), 669–685. (与张洁琳，崔利宏合作)

.... (125)

14. A Kind of Lagrange Interpolation on the Sphere, 2009 WRI World Congress on Computer Science and Information Engineering, CSIE 2009, Los Angeles, California USA, 4(2009), 96–100. (与张明合作)

.... (143)

15. On Lagrange and Hermite Interpolation Along Algebraic Manifold, International J. Math. Comput., 2(M09)(2009), 43–59. (与张明合作)

.... (151)

16. Superposition Interpolation Process in $\mathbb{C}^n$, Appl. Math. Comput. (2009), doi:10.1016/j.amc.2009.04.079. (与张洁琳，张明，崔利宏合作)

.... (171)

17. On Hakopian Interpolation in the Disk, Approx. Theory Appl., 2(1)(1986), 37–45.

.... (185)

18. Kergin Interpolation at the Points Which Are Zeros of the Bivariate Polynomial of Least Deviation from Zero on the Disk, Northeast. Math. J., 2(4)(1986), 408–414. (与叶亚明合作)

.... (192)

19. Lagrange Representation of Multivariate Interpolation, Science in China, A32(4)(1989), 385–396.

.... (199)

20. 关于圆域上 Kergin 插值的收敛性，数学年刊， A11(3)(1990), 285–296.

.... (212)

21. On the Convergence of Hakopian Interpolation and Cubature, J. Appr. Theory, 88(1)(1997), 28–46. (与吕春梅合作)

.... (225)

22. On the Integral Convergence of Kergin Interpolation on the Disk, J. Comput. Appl. Math., 95(1998), 45–63. (与吕春梅合作) .... (240)

23. On the Uniform Convergence of Kergin Interpolation on the Disk, J. Comput. Anal. Appl., 3(4)(2001), 281–300. (与刘明才合作) .... (259)

24. A New Algorithm for CT Based on Hakopian Interpolation, J. Inform. Comput. Sci., 1(3)(2004), 141–145. (与孙雪楠合作) .... (273)

25. 基于 Hakopian 插值的快速图像重建算法，计算机辅助设计与图形学学报，18(3)(2006), 451–455. (与孙雪楠，刘播合作) .... (278)

26. Weighted Mean Convergence of Hakopian Interpolation on the Disk, Analysis in Theory and Applications, 23(3)(2007), 213–227. (与冯仁忠，孙雪楠合作) .... (286)

27. 关于多元 Чебышев 逼近 (I), 吉林大学自然科学学报， (1)(1965), 1–15. .... (300)

28. 关于多元 Чебышев 逼近 (II), 吉林大学自然科学学报， (2)(1979), 9–16. .... (315)

29. 某些高维区域上的最小零偏差多项式，计算数学， (2)(1979), 189–193. .... (323)

30. On Chebyshev Approximation in Several Variables (III), Approximation, Optimization and Computing: Theory and Applications, A. G. Law and C. L. Wang (eds.), Elsevier Science Publishers B. V., North-Holland, 1990. (与韩新民合作) .... (328)

31. 基于圆域上多项式逼近的图像重建算法，吉林大学学报 (理学版), 42(3)(2004), 351–355. (与孙雪楠合作) .... (335)

32. Analysis and Improvement of Marr's Algorithm for Image Reconstruction, 2004 8th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision, Kunming, China, 6-9th December 2004. (与孙雪楠，董再励，田小军合作) .... (341)

33. 平行六边形域上的二重 Fourier 级数的线性求和，吉林大学学报 (理学版), 46(5)(2008), 816–824. (与王淑云，孙毅合作) .... (348)

34. Convergence Properties of Generalized Fourier Series on a Parallel Hexagon Domain, Comm. Math. Res., 25(2)(2009), 104–114. (与王淑云，付瑶，孙雪楠合作)
.... (361)

35. 二元四次样条插值与有限元，吉林大学自然科学学报， (1)(1978), 85–95.
.... (374)

36. 关于高精度样条插值公式的一点注记，高等学校计算数学学报，(1)(1981), 83–87.
.... (385)

37. 等距结点上一类新的样条插值公式，吉林大学自然科学学报，(1)(1982), 17–25.
.... (389)

38. 关于二元四次样条插值，吉林大学自然科学学报， (4)(1987), 19–28.
.... (397)

39. 两邻接 NURBS 曲面间的 G^2 连续条件，吉林大学学报 (理学版)，(1)(2002), 19–23. (与车翔久合作)
.... (407)

40. G^2 Continuity Conditions for Two Adjacent B-spline Surfaces, Geometric Moodeling and Processing 2004, Proceedings, 2004, 341–344. (与车翔久，李强合作)
.... (414)

41. G^1 Continuity Conditions of Adjacent NURBS Surfaces, Computer Aided Geometric Design, 22(2005), 285–298. (与车翔久，李强合作)
.... (421)

42. G^1 Smooth Connection of Adjacent NURBS Surfaces, J. Inform. Comp. Sci., 2(3)(2005), 585–589. (与杨火根，李京镐合作)
.... (436)

43. G^1 Smooth NURBS Surfaces with n-patch Corner, J. Inform. Comput. Science, 3(3)(2006), 589–593. (与杨火根，车翔久，蒋庆华合作)
.... (442)

44. The Construction of G^1 Smooth NURBS Surfaces over Arbitrary Topology Type, J. Inform. Comput. Science, 4(1)(2007), 347–351. (与杨火根合作)
.... (448)

45. B 样条曲面间 G^1 连续条件及局部格式构造问题，计算机辅助设计与图形学学报， 19(7)(2007), 866–870. (与高占恒，高福顺，马婷合作)
.... (454)

46. 由点云数据生成三角网格曲面的区域增长算法，吉林大学学报 (理学版), 46(3)(2008), 413–417. (与高福顺，张鼎林合作)
.... (461)

47. 用 Loop 细分曲面拟合点云数据的方法，中国计算机辅助设计与图形学 2008— 纪念全国首届 CAD/CG 学术会议 30 周年，全国计算机学会论文集，电子工业出版社，北京， 2008, 311–315. (与薛耀红，梁英合作)
.... (469)

48. The Smooth Connection Algorithm between B-spline Surfaces Patches, J. Inform. Comput. Sci., 2(1)(2005), 69–74. (与高占恒合作)
.... (478)

49. Loop 细分小波紧框架对三维图形压缩的应用，吉林大学学报 (理学版), 47(5)(2009), 987–993. (与薛耀红，李强合作)
.... (483)

50. Bivariate Box-spline Wavelets, M. Cheng *et al.* (eds.), Harmonic Analysis in China, Kluwer Academic Publishers, Printed in the Netherlands, 183–196. (与金光日，陈翰麟合作)
.... (492)

51. Real-valued Periodic Wavelets: Construction and Relation with Fourier Series, J. Comput. Math., 17(5)(1999), 509–522. (与陈翰麟，彭思龙，肖绍良合作)
.... (504)

52. How to Get the Original Discrete Approximation for the Pyramid Algorithm of Multiresolution Decomposition, Northeast. Math. J., 15(2)(1999), 159–172. (与刘明才，陈少田合作)
.... (517)

53. 区间上的双正交小波的一种构造方法，高等学校计算数学学报, (4)(2000), 341–352. (与刘明才合作)
.... (534)

54. Solving Second Kind Integral Equations by Galerkin Methods with Continuous Orthogonal Wavelets, J. Comput. Appl. Math., 136(2001), 149–161. (与刘明才，车翔久合作)
.... (547)

55. A Wavelet-based Digital Watermarking Algorithm, Proceedings of the International Conference on Wavelet Analysis and Its Applications, 2(2003), World Scienc Publishing Co., Pte. Ltd., pp.727–732. (与孙洪全，张洁琳合作)
.... (560)

56. Bivariate Real-valued Orthogonal Periodic Box-spline Wavelets, Northeast. Math. J., 22(1)(2006), 21–29. (与李强合作) .... (566)

57. Mammographic Image Enhancement and Denoising Based on Redundent Wavelet Transform, Proceedings of the International Conference 2006 on Wavelet Active Media Technology and Information Processing, 2(2006), 880–885. (与温学兵，韩秩男，纪经娜合作) .... (577)

58. An Implementation of Fast Algorithms for Biorthogonal Periodic Interpolatory Wavelets, J. Inform. Comput. Science, 4(2)(2007), 545–551. (与李强，苏丽涛合作) .... (582)

59. A New Algorithm For Enhancing the Contrast of Finger-vein Image, J. Inform. Comput., 3(4)(2006), 929–934. (与温学兵，张洁琳合作) .... (589)

60. 2D Chaotic Watermark Generation Based on Wavelet Transform and Bivariate Logistic Model, International Conference on Complex Systems and Applications, Jun 08-10, 2007. (与孙佳宁，李强，Edward Arroyo 合作) .... (595)

附录 多元插值的适定结点组与叠加插值法，硕士毕业论文《关于多元函数的插值与逼近》的第二章，吉林大学数学系，长春，1965. .... (604)

论文和著作总目录 .... (621)

梁学章教授数学文选
SELECTIONS FROM
MATHEMATICAL WORKS
OF PROFESSOR LIANG XUEZHANG
No.1, 1–4

二元插值多项式的收敛性 *

梁 学 章
(吉林大学数学系)

设 D 是含于矩形 $\triangle:(a\le x\le b,\ c\le y\le d)$ 中的区域. 在 D 中任选一串节点 $(x_k^{(n)},\ y_k^{(n)}), k=1,2,\cdots,n;\ n=1,2,\cdots$. 我们便得到了一个插值节点阵 B. 假定在数组 $\{x_k^{(n)}\}_{k=1}^n$ 中去掉重复者之后得到的数组是 $x_1, x_2, \cdots, x_s$; 而在数组 $\{y_k^{(n)}\}_{k=1}^n$ 中去掉重复者之后得到的数组是 $y_1, y_2, \cdots, y_t$(显然 s, t 一般说来是依赖于 n 的). 令

$$w_n(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_s);$$

$$W_n(y)=(y-y_1)(y-y_2)\cdots(y-y_t).$$

让我们来考虑 D 上的连续函数 $f(x,y)$ 的插值多项式序列

$$L_n(f)=\sum_{k=1}^n l_k^{(n)}(x,y)f(x_k^{(n)},y_k^{(n)}),$$

$$l_k^{(n)}(x,y)=\frac{w_n(x)W_n(y)}{(x-x_k^{(n)})(y-y_k^{(n)})w_n'(x_k^{(n)})W_n'(y_k^{(n)})}.$$

显然如此的插值多项式序列由插值节点阵 B 所唯一确定. 当插值节点都取在与某坐标轴平行的直线上时它实际上就转化为一元拉格朗日插值. 当 D 是矩形区域而节点阵 B 取成是矩形方格点时, 这一插值过程就是通常所说的二元拉格朗日插值. 在本文中我们对二元绝对连续函数类讨论了这一插值过程的一致收敛性, 并构造出一类具体的一致收敛的二元插值多项式.

让我们用 $(x,y)\ge(a,b)$ 表示 $x\ge a, y\ge b$. 则我们有

定理 1 对所有 $\triangle$ 上的绝对连续函数 $f(x,y)$ 而言, $L_n(f)$ 于 D 上一致收敛于 $f(x,y)$ 的充要条件是:

1) 对所有二元多项式 $P(x,y)$, $L_n(P)\xrightarrow{1}P$, 当 $n\to\infty$ 时;
2) $\sum\limits_{(x_k,y_k)\ge(\xi,\eta)} l_k^{(n)}(x,y)$ 对所有的 n, $(\xi,\ \eta)\in\triangle$ 及 $(x,\ y)\in D$ 一致有界.

这个定理的证明基本上可以仿照 Л. А. Янович 在 [1] 中对求积过程的收敛性的证明, 但在估计余项算子的模时要变得复杂些, 亦要略较困难些. 下面我们简略地给出定理的证明.

令

$$E(z)=\begin{cases}1, & \text{当}z\ge 0\text{时};\\ 0, & \text{当}z<0\text{时}.\end{cases}$$

---

* 吉林大学自然科学学报, (1)(1963), 579–582.
本文于 1963 年 3 月 15 日收到.
1962 年 12 月 20 日在吉林大学数学系庆祝建系十周年科学报告会上宣读.
在此作者对徐利治老师的耐心教导表示衷心的感谢和敬意.

这时余项 $R_n(f)=f-L_n(f)$ 具有如下的表达式:

$$\begin{aligned}R_n(f)\ &=R_n(f_0)+\int_a^b g(\xi)G(x,y,\xi)\mathrm{d}\xi+\int_a^b h(\eta)H(x,y,\eta)\mathrm{d}\eta\\&\quad+\int_a^b\int_c^d \phi(\xi,\eta)\varphi(x,y,\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta,\end{aligned}$$

其中 f_0 是常数, g, h, ϕ 分别是 $[a,b]$, $[c,d]$, $\triangle$ 上的 L- 可积函数, 而且满足下列关系式

$$f(x,y)=f_0+\int_a^x g(\xi)\mathrm{d}\xi+\int_c^y h(\eta)\mathrm{d}\eta+\int_a^x\int_c^y \phi(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta, \tag{*}$$

而其中

$$\varphi(x,y,\xi,\eta)=E(x-\xi)E(y-\eta)-\sum_{k=0}^n l_k^{(n)}(x,y)E(x_k^{(n)}-\xi)E(y_k^{(n)}-\eta),$$

$$G(x,y,\xi)=\varphi(x,y,\xi,c),\qquad H(x,y,\eta)=\varphi(x,y,a,\eta).$$

大家知道, 对于定义在矩形 $\triangle$ 上的任何一个绝对连续函数 $f(x,y)$, 都有唯一的表达式 (*); 反之, 表达式 (*) 唯一确定一个 $\triangle$ 上的绝对连续函数 $f(x,y)$(参看 [3]). 用 $M(l)$ 来表示所有的四维向量 $l=\{f_0,g,h,\phi\}$ 在模

$$\|l\|=\max\left\{|f_0|,\ \int_a^b|g(\xi)|\mathrm{d}\xi,\ \int_c^d|h(\eta)|\mathrm{d}\eta,\ \int_a^b\int_c^d|\phi(\xi,\eta)|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\right\}$$

之下做成的 Banach 空间, 则 R_n 可以看成是由 $M(l)$ 空间到 c 空间的线性算子, 我们下面的任务就是来计算它的模. 显然

$$\begin{aligned}\|R_n\|=&\ \sup_{\|l\|=1}\max_{(x,y)\in D}|R_n(f)|\\ \le&\ \max_{(x,y)\in D}|R_n(l)|+\max_{(x,y)\in D}\sup_{(\xi,\eta)\in\triangle}|G(x,y,\xi)|\\ &+\max_{(x,y)\in D}\sup_{(\xi,\eta)\in\triangle}|H(x,y,\eta)|+\max_{(x,y)\in D}\sup_{(\xi,\eta)\in\triangle}|\varphi(x,y,\xi,\eta)|\\ \le&\ 4\max_{(x,y)\in D}\sup_{(\xi,\eta)\in\triangle}|\varPhi(x,y,\xi,\eta)|.\end{aligned}\tag{1}$$

另一方面让我们注意到, 当 (x,y) 固定时 $|\varPhi(x,y,\xi,\eta)|$ 是 ξ, η 的阶梯函数, 所以不妨假设它在 $\triangle$ 中的某个小矩形 σ 上全面达到它的上确界 (当上确界仅出现在 $\xi=a$ 或 $\eta=c$ 上时可做类似的处理). 设 σ 的面积是 $\|\sigma\|$, 我们取 $\phi_0(\xi,\eta)$ 为下列函数:

$$\varphi_0(\xi,\eta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\|\sigma\|}\mathrm{sign}\,\varPhi(x,y,\xi,\eta), & \text{当}(\xi,\eta)\in\sigma\text{时};\\ 0, & \text{在别处}.\end{cases}$$

让 (x,y) 在 D 中变, 就得到集合 $\{\|l\|=1\}$ 的子集 H. 于是我们有

$$\begin{aligned}\|R_n\|=&\ \sup_{\|l\|=1}\max_{(x,y)\in D}|R_n(f)|\\ \ge&\ \sup_{(\varphi_0\in H)}\left|\int_a^b\int_c^d\varphi_0(\xi,\eta)\times\varPhi(x,y,\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\right|\\ =&\ \max_{(x,y)\in D}\sup_{(\xi,\eta)\in\triangle}|\varPhi(x,y,\xi,\eta)|.\end{aligned}\tag{2}$$

比较 (1) 和 (2) 即可看出, $\|R_n\|$ 和 $\max\limits_{(x,y)\in D}\sup\limits_{(\xi,\eta)\in\triangle}|\varPhi(x,y,\xi,\eta)|$ 进而和 $\sum\limits_{(x_k,y_k)\ge(\xi,\eta)} l_k^{(n)}$ 或者是同时一致有界, 或者是同时不一致有界. 由于多项式在 $M(l)$ 空间组成的向量的稠密性, 根据 Banach-Steinhaus 定理我们的命题得证.

下面对 D 是矩形的情形给出具体的一致收敛的插值多项式. 我们不妨假定 D 是正方形: $[-1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1]$. 设 λ 是任意小的一个正数, 让我们在 x 轴上取 n 次 Jacobi 多项式 $J_n^{\alpha_n\beta_n}(x)$, $(-1 \le \alpha_n, \beta_n \le -\lambda)$ 的 n 个根 $x_k^{(n)}$, $k = 1, 2, \cdots, n$; 在 y 轴上取 m 次 Jacobi 多项式 $J_m^{\alpha_m\beta_m}(y)$, $(-1 \le \alpha_m, \beta_m \le -\lambda)$ 的 m 个根 $y_l^{(m)}$, $l = 1, 2, \cdots, m$. 我们把在它们的拓扑乘积网点 (x_k, y_l), $k = 1, 2, \cdots, n$, $l = 1, 2, \cdots, m$ 上的 $f(x, y)$ 的二元插值多项式记为 $L_{n,m}(f)$, 则我们有

定理 2 若 $f(x, y)$ 是 D 上的绝对连续函数, 则 $L_{n,m}(f)$ 当 $n, m \to \infty$ 时于 D 上一致收敛于 $f(x, y)$.

证明 只要验证定理 1 的两个条件. 因为对于所有的关于 x 的次数小于 n, 关于 y 的次数小于 m 的二元多项式 $p(x, y)$ 都有

$$L_{n,m}(p) = p(x, y).$$

故条件 1 显然是满足的. 至于条件 2 我们假设 $\bar{n} = nm$, 并用 $l_k(x)$ 及 $t_l(y)$ 表示基本多项式, 则有

$$\begin{aligned}
\sum_{(x_k, y_k) \ge (\xi, \eta)} l_k^n(x, y) &= \sum_{k=1}^{n} l_k^n(x, y) E(x_k^{(n)} - \xi) E(y_k^{(m)} - \eta) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} l_k^n(x) t_l^m(y) E(x_k^{(n)} - \xi) E(y_k^{(m)} - \eta) \\
&= \Big(\sum_{k=1}^{n} l_k^n(x) E(x_k^{(n)} - \xi) \Big) \Big(\sum_{l=1}^{m} t_l^m(y) E(y_k^{(m)} - \eta) \Big).
\end{aligned}$$

根据 Д. Л. Берман 的工作 [2] 知有常数 M, 使

$$\Big| \sum_{k=1}^{n} l_k^n(x) E(x_k^{(n)} - \xi) \Big| \le M, \qquad n = 1, 2, \cdots, \ \xi \in [-1, 1], \ x \in [-1, 1].$$

又对上式的第二个因子也有同样的估计, 由此我们就得到

$$\Big| \sum_{(x_k, y_k) \ge (\xi, \eta)} l_k^{(n)}(x, y) \Big| \le M^2$$

对所有的 $n, m = 1, 2, \cdots$ 和 $(\xi, \eta) \in D$ 及 $(x, y) \in D$ 一致成立. 定理得证.

参 考 文 献

[1] Л. А. Янович, ДАН. Б. Т. VI, No2.77(1962).

[2] Д. Л. Берман, ДАН, 112, No1, 9(1957).

[3] В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т, V, Гл. III.

О СХОДИМОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПОЛИНОМОВ С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Лян Сюе-чжан

Пусть D есть подобласть области $\Delta = \{a \le a \le b, \ c \le y \le b\}$. Если мы произвольно взяли ряд точек $(X_k^{(n)}, \ y_k^{(n)})$ из области D $(k = 1, 2, \cdots, n, \ n = 1, 2, 3, \cdots)$, то получили

бесконечную треугольную матрицу B интерполяционных узлов. Пусть $f(x, y)$ определена в области D. B этой работе мы построили последовательность интерполяционных полиномов $L_n(f)$, соответствующую матрицей B, и получили следующие основные результаты:

Теорема 1. Для всякой абсолютно — непрерывной в области $\triangle f(x, y)$, чтобы последовательность $L_n(f)$ сходилась к $f(x, y)$ при $n \to \infty$ равномерно в области D, необходимо и достаточно, чтобы ъыли выпол ненследующие условия:

1) Для всякого полинома $P(x, y)$ с двумя независимыми переменными последовательность $L_n(P)$ сходиця к P при $n \to \infty$ равномерно в обпасти D.

2) Для всяких $n = 1, 2, 3, \cdots$, $(\xi, \eta) \in \triangle u(x, y) \in D$, $\sum\limits_{(x_k, y_k) \geq (\xi, \eta)} l_k^{(n)}(x, y)$ ограничено в совокупности.

B частности, когда D — прямоугольник, мы получили класс конкретных интерполяционных процессов, соотвецтвующие которым последовательности инт ерполячионных полиномов сходятся равномерно в области D.

梁学章教授数学文选
SELECTIONS FROM
MATHEMATICAL WORKS
OF PROFESSOR LIANG XUEZHANG
No.2, 5–11

二元插值的适定结点组与迭加插值法 *

梁 学 章
(吉林大学数学系)

提 要 本文从研究二元插值的适定性问题着手，运用代数曲线论中的 Bezout 定理，给出了选择和判定二元插值适定结点组的一些简明直观的方法，并在此基础上提出了一种新的二元插值方法 - 迭加插值法.

§1 插值结点组的选取问题

设 D 是平面上的任意区域， $P_1(x,y), P_2(x,y), \cdots, P_n(x,y)$ 是一组实系数的线性无关的二元多项式，以它们为基底所做成的实线性空间记为 H_n. 假设在 D 中给定了由 n 个不同的点所组成的点集 $E_n=\{(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)\}$, 又设 $f(x,y)$ 是 D 上的任意连续函数，则二元插值问题便是求一个多项式 $P(x,y)\in H_n$, 使得

$$P(x_i,y_i)=f(x_i,y_i),\qquad i=1,2,\cdots,n.$$

这时， E_n 称为插值结点组， $P(x,y)$ 称为 $f(x,y)$ 在 E_n 上的插值多项式. 如果对任何的 $f(x,y)\in C(D)$, 如此的 $P(x,y)$ 都存在而且唯一，则说 E_n 是 H_n 的适定结点组. 如果非零多项式 $Q(x,y)\in H_n$, 则称 $Q(x,y)=0$ 在平面上所确定的曲线为 H_n 中的代数曲线. 于是我们有

基本引理 E_n 是 H_n 的适定结点组的充要条件是 E_n 不在 H_n 中的任何一条代数曲线上.

证明 必要性显然. 因为如果 E_n 上的插值存在而且唯一，则行列式

$$A=\begin{vmatrix} P_1(x_1,y_1) & P_2(x_1,y_1) & \cdots & P_n(x_1,y_1)\\ P_1(x_2,y_2) & P_2(x_2,y_2) & \cdots & P_n(x_2,y_2)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ P_1(x_n,y_n) & P_2(x_n,y_n) & \cdots & P_n(x_n,y_n)\end{vmatrix}$$

不为 0. 这时若有非零多项式 $F(x,y)\in H_n$ 使 E_n 在曲线 $F(x,y)=0$ 上，则必有

$$F(x_t,y_t)=0,\qquad i=1,2,\cdots,n.$$

由 E_n 的适定性便知 $F(x,y)\equiv 0$. 这与 $F(x,y)$ 是非零多项式的假设矛盾.

为证充分性，我们假设 E_n 不是 H_n 的适定结点组，这时行列式 A 必为 0. 而这说明 n 个向量 $(P_1(x_i,\ y_i), P_2(x_i,\ y_i),\cdots, P_n(x_i,\ y_i))$, $i=1,2,\cdots,n$, 是线性相关的. 因此，在

* 吉林大学自然科学学报, (1)(1979), 27–32.
本文于 1978 年 5 月 14 日收到.
本文形成之初，吉林师范大学数学系丁有豫同志参加过讨论，并提出不少宝贵意见，特此致谢.