

科學圖書大庫

微分學自修書

附平面解析幾何學
(下 冊)

著者 萬仟先

徐氏基金會出版

科學圖書大庫

微分學自修書

附平面解析幾何學
(下 冊)

著者 萬仟先

徐氏基金會出版

全書要目

(上冊)

第一章	直角坐標	1
第二章	方程式與軌跡	21
第三章	直線及圓	45
第四章	拋物線，橢圓，及雙曲線	67
第五章	坐標軸之變換及二次方程式曲線之實用判定法	96
第六章	極限及連續函數	122
第七章	微分法	147
第八章	微分公式(一)	170
第九章	微分公式(二)	219
第十章	導數之應用(一)—變率	290
第十一章	導數之應用(二)—極大與極小(1)	371
第十二章	導數之應用(二)極大與極小(2)	489
第十三章	高階導數及導數之變換	701

(下冊)

第十四章	導數之應用(三)	841
第十五章	微分數及其應用；無窮小之階	1201
第十六章	曲率；及平面曲線運動中之切線加速度與法線加速度	1343
第十七章	均值定理與其應用——求下定形之極限值法	1378
第十八章	極坐標	1414
附 錄	雙曲線函數	1510

微 分 學

下冊目錄

第十四章 導數之應用(三)——幾何學上之應用及方程式之近似解.....	841
§ 1 曲線之切線方程式與法線方程式.....	841
切線方程式與法線方程式之各種形式及討論.....	842
例題(5則).....	846
〔其中：例題1末之“註”(b)項中討論“求切線方程式與法線方程式之普概實用法則”(846至848) 例題5係一證明幾何性質問題之例〕	
§ 2 代數普通二次方程式曲線之切線方程式公式.....	853
§ 3 二曲線之交角.....	857
§ 4 切距，次切距；法距，次法距.....	862
切距，次切距，法距，次法距之定義，公式，及討論.....	862
作圖上之應用：切線與法線交 x 軸之點之坐標公式.....	866
註及例題.....	867
習題14.1.....	870
〔其中：第4題之“註”中討論“求直線之斜角法則”(871) 第10題之“提示”中包含“證明二曲線相切之法則”(875) 第21題之“提示”中包含“求水平切線與垂直切線之切點坐標法則”(878至879)〕	

第 22 題之“提示”中包含“關於曲線之參數方程式求水平切線與垂直切線之切點坐標法則”(883)

第 25 題末附有“關於證明一系幾何圖形之共有性質程序中之觀點及原則討論”(886至889)

第 28 題末附註“利用有理化與分解因式畫圖法原

理對於 $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$ 之圖形作詳細討論(891至893)

§ 5 曲線畫法	897
概 述	897

曲線畫法之手續綜述：

(A) 原設方程式為“ $y=f(x)$ ”形式，或易於解出此形式者——各步手續（及其原理）依次分項述明	899
例題（6則）	912

{包括：代數有理函數式之正值與負值區間之判定法則詳論（例題1末）（919至933）

關於曲線趨近於其漸近線之狀況討論〔插入例題2之“解”(d)(ii)項中〕（939至946）

關於“對稱”問題之伸論（例題3末）（956至965）

關於決定“週期三角函數”之“週期”值之討論（例題5末）（984至1017）

曲線之兩端各種狀況總述（例題6末）（1028至1032）}

(B) 原設方程式為（或可解成）“ $x=\phi(y)$ ”形式，利用“對稱”原則以畫出其曲線——	1032
原理及手續之論述	1032
例題（2則）	1036

(C) 原設方程式為“參數方程式”形式——	1043
概 論	1043
解算手續及其原理逐步分項述明	1044
例題（4則）	1102

習題 14.2	1139
---------------	------

{包括：關於曲線上“二重點”之討論及其坐標值之求法〔第 11 (m) 題之“提示”中〕（1157至1161）}

§ 6 方程式之圖解法	1163
-------------------	------

(i) 一元方程式 " $f(x)=0$ "	1164
(ii) 二元聯立方程式 " $F_1(x, y)=0$ 與 $F_2(x, y)=0$ " "(原理)"	1166
特殊應用	1166
§ 7 一元方程式實根近似值之計算法	1169
(i) 插值法	1169
(ii) 牛頓方法	1175
原理及公式	1175
應用時注意點及討論	1179
例題 (2 則)	1187
習題 14.3	1195
第十五章 微分數及其應用；無窮小之階	1201
§ 1 微分數之定義	1201
§ 2 一函數之微分數與其增量之比較	1202
§ 3 微分數之幾何意義	1204
§ 4 以微分數作近似計算之應用問題 (附例題 5 則)	1207
〔包括：關於求 "相對誤差" 與 "百分誤差" 之 "對數微分法" (1211)〕	
習題 15.1	1213
§ 5 求微分數之公式	1216
公式列表及註	1216
例題 (5 則)	1218
§ 6 對於隱函數求微分數法 (例題 2 則)	1220
習題 15.2	1221
§ 7 關於公式 [4] "分數 $\frac{dy}{dx}$ = 導數 $\frac{dy}{dx}$ " 在應用上之普概性討論	1223
§ 8 無窮小之階	1224
討 論	1224
例題 (3 則)	1227
§ 9 證明 dy 與 Δy 之差值係比 Δx (或 dx) 為較高階之無窮小	1231

§ 10 高階微分數	1232
第二階微分數之普概公式及討論	1232
(i) x 爲自變數	1233
(ii) x 非爲自變數 (附演算)	1233
第三階及更較高階微分數概論 (僅論及 x 爲自變數之一種情形)	1235
例題 (5 則)	1235
〔例題 5 中導出第三階微分數之普概公式 (1238)〕	
習題 15.3	1239
§ 11 弧之微分數	1240
討論及公式	1240
例題 (3 則)	1244
§ 12 曲線之正負方向	1245
曲線長度 s 之正負值相應於 (所取定之) 曲線正負方向之討論	1245
曲線長度增量 Δs 與弧之微分數 ds 之正負值討論	1246
切線正方向相應於 (所取定之) 曲線正方向之討論	1247
ϕ 角 (即由 x 軸正方向旋轉至切線正方向所成之角) 之三角函數計算公式及詳細證明	1248
例題 (4 則)	1253
習題 15.4	1260
§ 13 第十章 § 5 (B) 項中公式 [13] ${}^n v_s = \frac{dx}{dt}$ 與公式 [14]	
${}^n v_v = \frac{dy}{dt}$ 之另一證明程序	1262

第十六章 曲率；及平面曲線運動中之切線加速度與法線加速度

	1268
§ 1 曲率	1268
公式及討論	1268
例題 (3 則)	1273
〔例題 1 未附 n 關於曲率絕對值大小所代表之意義討論 n 〕	1276
§ 2 參數方程式曲率公式 (附例題 2 則)	1281

§ 3	曲率半徑	1285
	公式及討論	1285
	例題 (2 則)	1288
	習題 16.1	1289
§ 4	曲率圓	1291
	定義及討論	1292
§ 5	曲率中心	1293
	公式及證明	1293
	例題 (5 則)	1298
§ 6	漸屈線	1306
	概 論	1306
	分爲四種情形：	
	(i) 所設曲線方程式爲 " $y=f(x)$ " 形式	1307
	(ii) 所設曲線方程式爲 " $x=\phi(y)$ " 形式	1308
	(iii) 所設曲線方程式爲 " $F(x, y)=0$ " 形式	1308
	(iv) 所設曲線方程式爲參數方程式形式	1309
	例題 (3 則)	1310
	[包括：關於 "旋輪線" (或 "擺線") 之詳細討論 (例題 3 之前) (1320 至 1325)]	
§ 7	原曲線與其漸屈線間之二項特性	1331
	定理 1	1331
	定理 2	1333
	例題 (2 則)	1336
§ 8	漸伸線及其機械作圖法	1341
	習題 16.2	1345
§ 9	向量之基本性質綜論	1347
	向量之代表法	1347
	性質討論分爲八項：	
	(i) 相等向量	1347
	(ii) 相負向量	1348
	(iii) 以數字 (或 "無向量") 乘向量	1348
	(iv) 向量之合成	1348
	(v) 向量之分解	1350

(vi) 沿二個互相垂直方向中之向量分解	1350
(vii) 以一向量之二個“分向量”代替原向量進行分解手續	1353
(viii) 將一運動向量由其一組 x 軸方向分向量與 y 軸方向分向量變換至另一組切線方向分向量與法線方向分向量之手續	1354
§ 10 平面曲線運動中之“切線加速度”與“法線加速度”	1357
公式之導出	1357
例題(4則)	1361
習題 16.3	1375

第十七章 均值定理與其應用——求不定形之極限值法.....1378

§ 1 洛爾定理	1378
說明及演例	1378
§ 2 均值定理	1381
證明及意義說明	1381
例題(2則)	1385
(其中例題2演述應用均值定理作近似計算並判定準確度之範圍,且與應用微分數作近似計算加以對較)(1385至1389)	
§ 3 廣式均值定理	1389
習題 17.1	1392
§ 4 豪氏定則之說明及證明	1393
應用方式說明	1393
公式之詳細證明	1395
§ 5 豪氏定則之應用——求“不定形” $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty$ 之極限值:	1400
概 述	1400
(i) $\frac{0}{0}$ 形式之“不定形”——例題3則	1401
(ii) $\frac{\infty}{\infty}$ 形式之“不定形”——例題3則	1403

(iii) $0 \cdot \infty$ 形式之 "不定形" —— 例題 2 則	1406
(iv) $\infty - \infty$ 形式之 "不定形" —— 例題 2 則	1407
§ 6 求 "不定形" $0^\circ, \infty^\circ, 1^\infty$ 之極限值	1408
手續概述	1408
例題 (3 則)	1409
習題 17.2	1410
第十八章 極坐標	1414
§ 1 總 論	1414
§ 2 極坐標	1414
極坐標之規定	1414
(a) 矢角大小及正負之意義	1415
(b) 向徑大小及正負之意義	1416
應 用:	
(i) 讀出圖上定點之極坐標	1417
(ii) 已知極坐標定出其圖中之位置	1417
§ 3 極標方程式之曲線 (或圖形)	1418
畫曲線手續概述	1418
對於極標方程式之討論:	
(討論 i) 截距	1419
(討論 ii) 對稱	1420
附論: 同一曲線之各形式極標方程式	
試驗對稱之終極手續 (1421 至 1422)	
(討論 iii) 曲線之範圍	1422
例題 (3 則)	1423
§ 4 快速地畫出一極標方程式之曲線之方法演述	1429
概 述	1430
例題 (2 則)	1430
§ 5 二曲線之交點	1434
(A) 普通手續 (附例題 1 則)	1434
(B) 進一步討論 (完備手續, 附例題 1 則)	1436
習題 18.1	1441

§ 6	直角坐標與極坐標之變換公式.....	1442
	變換公式 ($x = \rho \cos \theta$ 與 $y = \rho \sin \theta$) 及其普概適用性之 討論	1442
	逆反變換公式及其應用.....	1444
	例題 (4 則)	1445
	[其中例題 4 (1448 至 1450) 包含判定錐線種類之討論。]	
	習題 18.2	1450
§ 7	應用極坐標求軌跡法	1452
	概 述	1452
	例題 (2 則)	1452
	習題 18.3	1456
§ 8	曲線上一點之切線與向徑 (或矢徑) 間之夾角.....	1457
	$\tan \Psi$ 公式之導出.....	1458
	應用及普概性討論	1459
	例題 (3 則)	1461
§ 9	在極坐標中曲線之切線之斜角與斜率.....	1463
	斜角公式之證明及普概性討論.....	1463
	斜率 ($\tan \phi$) 公式之導出及討論	1466
	例題 (2 則)	1467
§ 10	在極坐標中二曲線之交角公式.....	1469
	公式導出及應用手續說明.....	1469
	例題 (2 則)	1471
	以上三節中之公式總列及對較.....	1477
§ 11	極切距, 極次切距, 極法距, 極次法距.....	1477
	意義說明	1478
	公式導出及普概性討論	1479
	極次切距與極次法距之用途:	
	(i) 作切線方法.....	1482
	(ii) 作法線方法.....	1482
	例題 (1 則)	1483
	習題 18.4	1486
§ 12	在極坐標中弧之微分數.....	1487
	公式導出.....	1487

ds 正負值之討論	1488
關於微分數公式與 $\tan \Psi$ 公式利用圖形幫助記憶方法	1490
例題 (1 則)	1491
§ 13 在極坐標中之曲率公式	1491
公式說明及應用時注意點	1492
例題 (1 則)	1493
§ 14 平面曲線運動之另二種形式 "分速度" —— "沿徑速度" 與 "橫速度"	1495
意義說明及正負號代表方向性之規定	1495
公式導出附普概性討論	1497
應用手續說明	1502
例題 (2 則)	1502
習題 18.5	1508
附錄 雙曲線函數	1511
(A) 原函數 (6 式)	1511
(B) 恒等公式 (17 式)	1512
(C) 微分公式 (6 式)	1512
(D) 反雙曲線函數表為對數函數 (4 式)	1513
(E) 反雙曲線函數之微分公式 (4 式)	1513
(F) $y = \sinh x$, $y = \cosh x$, $y = \tanh x$ 三函數之曲線, 及其 三項性質說明	1514
(G) 對於各公式之逐一說明或證明	1516

第十四章 導數之應用(三)—— 幾何學上之應用及方程式之近似解

§1 曲線之切線(tangent line)方程式與法線(normal line)方程式

(A)切線方程式：——在第七章 § 7 中，吾人已證明，曲線 $F(x, y) = 0$ [或 $y = f(x)$] 上任何點 (x_1, y_1) 之切線斜率係等於導數 $\frac{dy}{dx}$ [由微分 $F(x, y) = 0$ 或 $y = f(x)$ 而得] 在該點處之值，即 $m_{\text{切線}} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_1, y=y_1}$ ，[註：因切點 (x_1, y_1) 係在所論曲線上，故必需適合其方程式，即 $F(x_1, y_1) = 0$ 或 $y_1 = f(x_1)$ ；換言之，即 x_1 與 y_1 二值中僅有一個可以任意指定]。於是應用第三章“習題 3.1”中第 1 題中之公式 [4] “ $y - y_1 = m(x - x_1)$ ” [註：此公式係稱為直線之“點斜式”(point-slope form)方程式]，將 $m = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_1, y=y_1}$ 代入，即得所論切線之方程式為：

$$y - y_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_1, y=y_1} (x - x_1), [1]. *$$

*註：此方程式中之 x_1 與 y_1 係常數， $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_1, y=y_1}$ 亦為常數，因切點 (x_1, y_1) 雖可為原曲線 “ $F(x, y) = 0$ ” 上之任何點，但對於某一切線而論，則此係一定點之故。 x 與 y 係變數，因 (x, y) 係代表此切線上 (注意：非原曲線上) 之動點，故當此動點沿此切線上變更位置時，則 x 與 y 之值亦將隨同改變；但此二者之相應值必需恒適合此切線方程式，故僅有一個為自變數，而另一個則為因變數。又吾人甚易看出，此方程式係 x 與 y 之一次方程式，故係代表一直線。再者，學者應注意，此式中之 “ $\frac{dy}{dx}$ ” 係代表由微分原曲線方程式 “ $F(x, y) = 0$ ” 所得之導數，而非由此切線方程式所得之導數。

[討論] 公式〔1〕中之 " $(\frac{dy}{dx})_{x=x_1, y=y_1}$ "，其 " $\frac{dy}{dx}$ " 係微分所論曲線之方程式所得之導數，但此曲線方程式可表為各種形式，茲分別論之如下：

(a) 原設方程式係 " $y=f(x)$ " 形式 (即 y 表為 x 之 "顯函數" 形式，或易於解出此形式)，則 $\frac{dy}{dx}=f'(x)$ ，

而 $(\frac{dy}{dx})_{x=x_1, y=y_1}=f'(x_1)$ ；又 $y_1=f(x_1)$ 。於是切線方程式 (公式〔1〕) 可寫為： $y-f(x_1)=f'(x_1) \cdot (x-x_1)$ ，〔1'〕。(註：第七章 § 7 中之例題 2 即係依此形式所解算。)

(b) 原設方程式為 " $F(x, y)=0$ " 形式而不能 (或不便於) 解出 y ，則可應用 "隱函數微分法" 微分之，由是計算 $(\frac{dy}{dx})_{x=x_1, y=y_1}$ 之值，(註：見下例題 1)。

(c) 原設方程式為 " $x=\phi(y)$ " 形式 (即 x 表為 y 之 "顯函數" 形式，或易於解出此形式)，則可關於 y 微分此方程式，得 $\frac{dx}{dy}=\phi'(y)$ ；再應用第八章中之公式〔9〕，即得 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\phi'(y)}$ 。故 $(\frac{dy}{dx})_{x=x_1, y=y_1}=\frac{1}{\phi'(y_1)}$

，又 $x_1=\phi(y_1)$ ；是以在本項情形下，公式〔1〕〔即切點為 (x_1, y_1) 之切線方程式〕可化為： $y-y_1=\frac{1}{\phi'(y_1)}[x-\phi(y_1)]$ ，〔1''〕。

但對於本項中之所設方程式形式亦可採用上項〔(b)項〕之手續 (即對於所設方程式應用 "隱函數微分法" 關於 x 微分之) 以求出切線方程式，(註：見下例題 1)。

(d) 原設方程式為參數方程式 " $x=\phi(t)$ 與 $y=F(t)$ " 形式，則根據

第八章中之公式〔5A〕， $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{F'(t)}{\phi'(t)}$ ；設 x_1 與 y_1 係相當於 $t=$

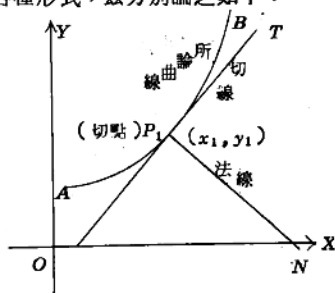


圖 14.1

t_1 [即 $x_1 = \phi(t_1)$, $y_1 = F(t_1)$] , 則 $(\frac{dy}{dx})_{x=x_1, y=y_1} = \frac{F'(t_1)}{\phi'(t_1)}$ 。於是公式 [1] 即可化爲： $y - F(t_1) = \frac{F'(t_1)}{\phi'(t_1)} [x - \phi(t_1)]$, [1''], (註：見下例題 2), [又註：學者可注意，此切線方程式係普通 x, y 方程式 (非參數方程式)；其中之 $\phi(t_1)$, $F(t_1)$ ，與 $\frac{F'(t_1)}{\phi'(t_1)}$ 皆爲常數]。

(e)。原設方程式爲“極標方程式” $G(s, \theta) = 0$ ，所論切點之“極坐標”爲 (s_1, θ_1) [註：相當於上述“直角坐標”中之 (x_1, y_1)]，則由上章 § 14 中之 (1) 式與 (2) 式，此二組坐標值間之關係當爲： $x_1 = s_1 \cos \theta_1$ 與 $y_1 = s_1 \sin \theta_1$ ；又因此 (s_1, θ_1) 點係在所論之曲線上，

故 $G(s_1, \theta_1) = 0$ 。根據上章 § 14 中之公式 [13]， $\frac{dy}{dx} = \frac{s_1 \cos \theta + \sin \theta \frac{ds}{d\theta}}{-s_1 \sin \theta + \cos \theta \frac{ds}{d\theta}}$

；故 $(\frac{dy}{dx})_{x=x_1, y=y_1} = \frac{s_1 \cos \theta_1 + \sin \theta_1 \cdot (\frac{ds}{d\theta})_{s=s_1, \theta=\theta_1}}{-s_1 \sin \theta_1 + \cos \theta_1 \cdot (\frac{ds}{d\theta})_{s=s_1, \theta=\theta_1}}$ 。於是公式 [1] 即可

化爲， $y - s_1 \sin \theta_1 = \frac{s_1 \cos \theta_1 + \sin \theta_1 \cdot (\frac{ds}{d\theta})_{s=s_1, \theta=\theta_1}}{-s_1 \sin \theta_1 + \cos \theta_1 \cdot (\frac{ds}{d\theta})_{s=s_1, \theta=\theta_1}} (x - s_1 \cos \theta_1)$

，——但此乃係過切點 (s_1, θ_1) 之切線之“卡標方程式”，其中之 s_1 與 θ_1 皆爲常數，[註：學者應注意， (s_1, θ_1) 雖可爲所論曲線 $G(s, \theta) = 0$ 上之任何點，但對於某一切線而論，則此切點係固定不變者，即 s_1 與 θ_1 皆爲常數；而 x 與 y 則爲變數，因 (x, y) 係代表此切線上 (註：非原曲線上) 之動點之“直角坐標”。再將上章 § 14 中之變換變數關係式 (1) 與 (2) 代入上式中，即將此切線方程式化爲“極標方程式”形式：

$$s \sin \theta - s_1 \sin \theta_1 = \frac{s_1 \cos \theta_1 + \sin \theta_1 \cdot (\frac{ds}{d\theta})_{s=s_1, \theta=\theta_1}}{-s_1 \sin \theta_1 + \cos \theta_1 \cdot (\frac{ds}{d\theta})_{s=s_1, \theta=\theta_1}} (s \cos \theta - s_1 \cos \theta_1)$$

), [1'']。

[註：同上所述，此式中之 s_1 與 θ_1 係常數，因 (s_1, θ_1) 係代表切點(定點)；又 s 與 θ 係變數(註：一為自變數而一為因變數，因此二者之值必需恒適合此切線方程式)，因 (s, θ) 係所論切線上(註：非原曲線上)之動點，[又註：以上所述 " $x_1 = s_1 \cos \theta_1$ 與 $y_1 = s_1 \sin \theta_1$ " 係變換切點(定點)之坐標；而此處所述 " $x = s \cos \theta$ 與 $y = s \sin \theta$ " 則係變換切線上之動點坐標，——皆係應用上章 § 14 中之(1)式與(2)式]。(註：見下例題 3。)

[註]關於圖形上之關係，見圖 14.1，其中 AP_1B 代表所論曲線， $P_1(x_1, y_1)$ 代表所論之切點， P_1T 為所論曲線在此 P_1 點之切線。

(B)法線方程式：——過所論曲線上之一點，而與在此點之切線相垂直之直線係稱為所論曲線在此點之“法線”，(註：在圖 14.1 中， $P_1N \perp$ 切線 P_1T ，則 P_1N 即為曲線 AP_1B 在 P_1 點處之“法線”)。根據第一章 § 7 中定理 2 之“正定理”，互相垂直二直線之斜率係互為負倒數，——現切線 P_1T 之斜率係等於 " $(\frac{dy}{dx})_{x=x_1, y=y_1}$ "，故法線 P_1N 之斜率應等於 "

$$-\frac{1}{(\frac{dy}{dx})_{x=x_1, y=y_1}}"$$

；又根據第八章之公式 [9]， $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ ，故 $\frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{dx}{dy}$ ，

是以上述法線 P_1N 之斜率值亦可寫為 " $-(\frac{dx}{dy})_{x=x_1, y=y_1}$ "。於是再應用上段中

所述之“點斜式”直線方程式公式 " $y - y_1 = m(x - x_1)$ "，將 $m =$

$$-\frac{1}{(\frac{dy}{dx})_{x=x_1, y=y_1}} = -(\frac{dx}{dy})_{x=x_1, y=y_1} \text{ 代入，即得，過曲線 } F(x, y) = 0 \text{ 上}$$

$$x_1, y_1 \text{ 點之法線方程式為： } y - y_1 = -\frac{1}{(\frac{dy}{dx})_{x=x_1, y=y_1}}(x - x_1) =$$

$$-(\frac{dx}{dy})_{x=x_1, y=y_1}(x - x_1), [2], \text{——註：同上(A)項中，其中之 } \frac{dy}{dx} \text{ 係微分原曲線方程式 } F(x, y) = 0 \text{ 所得之導數，又 } F(x_1, y_1) = 0 \text{。再}$$

者，同上(A)項中之“討論”，由於所設原曲線方程式之各種不同形式，上述之法線普概方程式公式 [2] 可化為下列之各種形式，以便於應用：{註：對於以上(A)項中之公式 [1'] 至 [1'']，將其右邊括號前之因數代以其負倒數，即成為適合於原論情形下之本項法線方程式，如下}

$y - f(x_1) = -\frac{1}{f'(x_1)}(x - x_1)$, [2'], ——註：適用於原設曲線方程式為 " $y = f(x)$ " 形式；

$y - y_1 = -\phi'(y_1) \cdot [x - \phi(y_1)]$, [2'']，——註：適用於原設曲線方程式為 " $x = \phi(y)$ " 形式；

當原設曲線方程式不能或不便於解成 " $y = f(x)$ " 或 " $x = \phi(y)$ " 形式時，可應用 "隱函數微分法" 關於 y (或關於 x) 微分之，——在此情形下，則必需採用原先之公式 [2] 形式；

$y - F(t_1) = -\frac{\phi'(t_1)}{F'(t_1)}[x - \phi(t_1)]$, [2''']，——註：適用於原設曲線方程式為參數方程式 " $x = \phi(t)$ 與 $y = F(t)$ " 形式，又切點之坐標為 $x_1 = \phi(t_1)$ 與 $y_1 = F(t_1)$ ，(註：此 [2'''] 式為法線之普通 x, y 方程式，而非參數方程式)；

$$s \sin \theta - s_1 \sin \theta_1 = -\frac{-s_1 \sin \theta_1 + \cos \theta_1 \cdot \left(\frac{ds}{d\theta}\right)_{\substack{s=s_1 \\ \theta=\theta_1}}}{s_1 \cos \theta_1 + \sin \theta_1 \cdot \left(\frac{ds}{d\theta}\right)_{\substack{s=s_1 \\ \theta=\theta_1}}}(s \cos \theta - s_1 \cos \theta_1)$$

), [2'']，——註：適用於原設曲線方程式為 "極標方程式" $G(s, \theta) = 0$ 形式，切點之 "極坐標" 為 (s_1, θ_1) ；此式中之 " $\frac{ds}{d\theta}$ " 係微分 $G(s, \theta) = 0$ 所得之導數，又 $G(s_1, \theta_1) = 0$ ，(註：此法線方程式 [2''] 亦為 "極標方程式")。

(註) 本節中所論者為同時有三條軌跡：(i) 原設曲線，方程式為 $F(x, y) = 0$ ，或參數方程式 $x = \phi(t)$ 與 $y = F(t)$ ，或 "極標方程式" $G(s, \theta) = 0$ ；(ii) 原曲線之切線，方程式為公式 [1] 至 [1''] 中之一；(iii) 原曲線之法線，方程式為公式 [2] 至 [2''] 中之一，——(註：上述三軌跡即為圖 14.1 中之曲線 AP_1B 與二直線 P_1T 與 P_1N)。 (x_1, y_1) [或 (s_1, θ_1)] 為上述三軌跡上之公共點。惟學者需注意，此三條軌跡之方程式中係同以 x 與 y (或同以 s 與 θ) 為變數；但當計算此二變數之相應值時，必需注意於所論點係在何一條軌跡上，即：原曲線上之點之坐標 x 與 y (或 s 與 θ) 之相應值必需根據原曲線方程式 $F(x, y) = 0$ [或 $G(s, \theta) = 0$] 計算之；切線上之點之坐標 x 與 y (或 s 與 θ) 之相應值必需根據切線方程式 (即公式 [1] 至 [1''] 中之一) 計算之；法線上之點之坐標 x 與 y (或 s 與 θ) 之相應值必需根據法線方程式 (即公式 [2] 至 [2''] 中之一) 計算之，——因吾人對於任一條軌跡上之點皆係以 (x, y) [或 (s, θ)] 代表之。同時能適合此三條軌跡方程式之 x, y (或 s, θ) 相應值僅有 $x = x_1$ 與 $y = y_1$ (或 $s = s_1$ 與 $\theta = \theta_1$) 一組 [即 $F(x_1, y_1) = 0$ 或 $G(s_1, \theta_1) = 0$ (見前)]；又將 $x = x_1$ 與 $y = y_1$ 代入公式 [1] 至 [1'''] 與 [2] 至 [2'''] 中，及將 $s = s_1$ 與 $\theta = \theta_1$ 代入公式 [1''] 與 [2''] 中，顯然者皆能適合，因皆獲得 " $0 = 0$ " 之結果，因此三條軌跡僅有此 (x_1, y_1) [或 (s_1, θ_1)] 一個公共點也。