改訂版

高等代數學

美國哥倫比亞大學數學教授郝克思博士

(H. E. Hawkes)

原　　著

扶溝馬純德譯述

張貽惠　文元模

合閱

北平文化學社印行

1933

高等代數學

中華民國三十年三月初版
中華民國三十二年四月再版

洋裝每册定價一元五角

平裝每册定價一元二角

原著者 H. E. Hawkes

譯述者 馬純德

印刷者 文化學社

發行者 文化學社

社址：北平和平門前

電話南局4580　電報掛號 2429

例　言

一•本書原著者爲美國哥崙比亞大學數學教授郝克思博士 (H. E. Hawkes)，原名爲 Advanced Algelra，已出版二十餘年，郝氏又本其近年經驗删改之，此書即就改訂版譯成者。

二•本書可分爲三部：第一部乃二次方程式部，注重由復習初等代數學項目作出發點，推演出普遍有系統之理論；參加方程式幾何意義，俾得對應說明，既足以饒興趣，又可以奠學習高等數學之基礎，第二部乃二次方程式推廣部，詳論二次方程式根之性質，作n次方程式論之射影；引入初等級數理論，舉出物理學習題，絕無乾燥沉悶之味，第三部乃高等代數本身部，代數錦繡，依次抽出，各家定理，油然逼現，繁簡適宜，堪稱觀止。

三•本書根據數理順序推演：易先於難，而推難可及易；由繁趨簡，而執簡足以馭繁；由約入博，而從博可返約，讀原書者當已知之，以故我國內著名高中及大學預科多樂爲採用作教本。

四•本書譯者，本教此書經驗譯爲中文，其章數頁數處處不與原書改變，期便對照檢閱，以故可爲中文書之教本，原文書之參考。

五•譯者自愧文辭淺陋，自知難免謬誤，尙望海內博學諸君有以教之。

六•譯者對於本書之成，得摯友魯君任菴之襄助不少；繕寫稿件，藉力於周君壽恭郝君士英等尤多，附識於此，以誌感謝。

馬純德識於滬上

2,24,1930.

目　　錄

高等代數

二次方程式部

第一章

基本演算

1. 整數　代數學常用之記號及其淺易演算，學者多熟悉之，本書不另贅述。

吾人嘗見之數，乃由數法得來，稱曰正整數，下列數節，仍以正整數爲出發點，以引導出代數學中常用之他種數，以便去解簡單方程式。

本章所包之代數上法則，多數不重加以証明。

2. 加法　二正整數 a 及 b 相加，意即求出一數 x. 令

$$a+b=x.$$

因任意二正整數相加，其所生唯一之和(sum)仍爲一正整數也。

例如，欲求3與4之和，意即求出x，令$3+4=x$.

3. 減法　由正整數a，減去正整數b，意即求出一數x，令

$$b+x=a. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

此x數稱爲a與b之差(Difference)，可表之如

$$a-b=x.$$

a稱爲被減數(Minuend)，b稱爲減數(Subtrahend).

例如，由 8 內減去 3，意即求x令$3+x=8$，其差x等於$8-3$或5.

若a大於b，且均爲正整數，則其差亦必爲一正整數，而能滿足方程式(1)所表之條件。

若a小於b，則x即不爲一正整數矣。

例如，若$a=6$，$b=9$，則$9+x=6$ 絕不能得出$-x$之值，爲一正整數。

如遇此種情形發生，而欲減法得以走通，必須引出負整數，如$(-a)$，$(-b)$等所表，此處a，b均爲正整數，於是求$a-b$之差時，若a小於b，可表之爲$a-b=[-(a-b)]$. 以故加法減法，包含負數時，可說明之如次：

$$(-(-a))=a$$
$$(-a)+(-b)=(-(a+b)).$$
$$(-a)+b=(-(a-b)).$$
$$a+(-b)=a-b.$$
$$(-a)-(-b)=(-(a-b)).$$
$$(-a)-b=(-(a+b)).$$
$$a-(-b)=a+b.$$

由此觀之，以正整數相加，結果仍爲正整數，故此法不致擴大數系，但減法則不然，用正整數作減法，常常得擴大數系，而生出負整

數，由是假定負整數有存在理，則方程式（1）可常常有一解答，以及前所述之定義，正負整數如合併論之，亦可証其彼此不致互相水火。

口　述　題

下列習題，求出其和，再以第二數爲被減數，求出其差：

1. $-1,3$.	5. $1,2$.	9. $8,5$.
2. $2,-4$.	6. $-2,3$.	10. $10,-15$.
3. $3,1$.	7. $4,-1$.	11. $12,25$.
4. $5,-7$.	8. $-6,7$.	12. $-17,21$.

4. 零　在第3節方程式(1)內，若$a=b$，則正負整數，亦不能滿足此方程式，欲說明此種情形，以便仍可有一數足以滿足，即要得引出零，以0表之．茲用方程式說明如次：

$$a+o=a,$$

或

$$a-a=o.$$

加減法引入零後，可界說如下，此處之k或爲正數或爲負數：

$$0+k=k\pm 0=k.$$

$$0-k=-k.$$

$$0\pm 0=0.$$

5. 乘法　以 b 乘 a．意即求一數 x 滿足方程式

$$a \cdot [illegible].$$

例如，求6與3之積，即求 x 之值，令 $6 \cdot 3 = x$.

若 a 與 b 爲正整數，x 亦爲正整數，可用 a 自身相加 b 次以求之。若爲負整數，則有下列法則：

$$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b.$$

$$(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b).$$

$$0 \cdot k = k \cdot 0 = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

此處 k 之值可爲正爲負以及爲零。

上列方程式，可用文字說明如次：

原則　諸數相乘其積爲零；必其中有一因數或幾個因數爲零，

此爲一重要法則，其應用極廣，若有若干因數相乘，如

$$a \cdot b \cdot c \cdot d = e,$$

第一，若 e 爲零，則 a, b, c, d 中必有一數或幾個數爲零，第二，若 a, b, c, d 中有一數或幾個數爲零，則 e 亦必爲零．

減法運算時，可生出負整數與零，然如以此種正負整數作乘法，確不至另生新數。

6. 除法　以 l 除 k，意即求一數 x 滿足方程式

$$x \cdot l = k \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

k 與 l 可爲正負整數，k 亦可爲零，若 l 爲零，俟於第 7 節中論之．

例如，求 21 與 7 之商，即求 x 之值令 $7 \cdot x = 21$.

若 k 在

$$\cdots, -3l, -2l, -l, o, l, 2l, 3l, \cdots$$

數組中，則 x 之值限於整數或零，換言之，其值爲前所論之數，k 稱爲 l 之倍數．若 k 不見於此數組中，而介乎其兩數之間，欲此法可以走通，須另引入分數，以 $k\div l$ 或 $\frac{k}{l}$ 表之，以方程式說明爲

$$\frac{k}{l}\cdot l=k.$$

分數加減乘除法如次：

$$\frac{k}{l}\pm\frac{m}{n}=\frac{kn\pm lm}{ln}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\frac{k}{l}\cdot\frac{m}{n}=\frac{km}{ln}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$\frac{k}{l}\div\frac{m}{n}=\frac{kn}{lm}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

分數之性質如次：

$$1=\frac{k}{k}=\frac{1}{1}.$$

$$\frac{k}{l}=\frac{km}{lm}$$，此處 m 可爲任何數………（5）

$$\frac{-k}{l}=\frac{k}{-l}=-\frac{k}{l}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

以上最後所述兩方程式，可以文字說明如次：

一分數之子母，同以一任何數乘之，其值不變。

只變分子之符號或只變分母之符號，即變分數之符號．

前述第 5 節中乘法符號定則，可假定適用於分數。

例如，$\left(-\left(\frac{a}{b}\right)\right)\cdot\left(-\left(\frac{c}{d}\right)\right)=\frac{ac}{bd}.$

正負數k，均可表為分數形狀如

$$\frac{k}{1}.$$

口　述　題

下列習題，以第二數除第一數而求其商：

1. 5，20.
2. −3，15.
3. 2，−7.
4. 5，−4.
5. −3，−6.
6. 2，5.
7. −1，−3.
8. −4，−9.
9. 15，−10.
10. −21，6.
11. 17，−2.
12. −12，5.

7. 除數為零　若第6節方程式(1)中，$l=0$，無正整數或負整數或分數之x足以滿足此方程式，因由第5節(1)式，x無論為何值，若一因數為零，其積必為零。

除數為零，越乎代數規律之外，由是欲除法可以走通，必其除數不至為零，不然在方程式

$$4\cdot 0=2\cdot 0.$$

若兩邊以零除之，則得不合理結果 $4=2$.

8. 基本演算　加減乘除，稱為基本四則演算 (Four Fundamental Operation)，應用四則方法，以 1 為出發點，可引導出任何數，此種數稱曰有理數 (Rational Number). 此種數包括正整數負整數，以及子母為整數或可化為整數之分數。正整數負整數而又統稱曰整數 (Integral Number)

9. 負數與分數之實用　以上所論負數分數之成因，乃應

數學上之需要，使四則演算可走通也．此等數學上需要，亦可應用於日常事務．例如，某日之溫度爲 $+20^\circ$，次日寒暖計之水銀下降 25°，欲表明第二日之溫度，必須由 20 中減25．又如，欲表明 3 等分 7 枚蘋果之結果，亦須用分數．假若不立負數及分數之名，則此種實例均不可通，而於日常生活應用，間有窮焉。

代數上他種演算，即方根與乘方．方根足以添增數系，當能於異日見之，唯數之乘方，確與數類無所增補。

10. 演算法則　代數上所用之數，均服從以下所述法則，且可假定其成立而不重加討論。

I　加法交換法則　兩數相加，其和不因相加之次序而變。

以符號表之，

$$a+b=b+a.$$

此處 a 及 b 爲前述之任何種數，或爲以後重新添入之數。

II　加法組合法則　三數相加，可分爲群而加之，其和不變，

以符號表之，

$$a+(b+c)=(a+b)+c=a+b+c.$$

Ⅲ 乘法交換法則　　兩數相乘，其積不因相乘次序而變．

以符號表之，

$$a\cdot b=b\cdot a.$$

Ⅳ 乘法組合法則　　三數相乘，可分爲羣而乘之，其積不變．

以符號表之，

$$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)=a\cdot b\cdot c.$$

Ⅴ 乘法分配法則　　一數與兩數和之積，等於此數與兩數各積之和．

以符號表之，

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c.$$

上列諸法則，可推廣至三數以上。

11. 整式與有理式　　一多項式之各項，無一項之分母或除數中含有文字者，稱曰整式(Integral Expression)。

例如，$4x^5-x^3-2x^2-\frac{3}{4}x+1$爲整式。

二整式之商，稱曰有理式 (Rational Expression)。

例如，$\dfrac{x^2-2x+3}{x-7}$爲有理式。

12. 多項式演算　　由第2節至第6節所述四則演算及第10節所述諸法則，其文字可用以代替數字或多項式，均能適合。

文字算式其重要本不減於數字算式，因文字實乃代表數字，如將文字算式文字，以數字換之，即爲數字算式矣，以故前所述諸法則，均彰焉若揭。

13.多項式加法　多項式加法演算，可按照下列

法則　將同類項排列成同行，求其各行代數和，並取其適當符號。

若多項式可化為獨項式，此法則亦適用。

14.多項式減法　多項式減法演算，可按照下列

法則　將減式書於被減式下，使同類項成為同行。變減式各項之符號，而與被減式相加。

學者練習純熟，可實際不變減式之號而暗中假想變其號以演之。

習　題

1. 加 $2a^2b^2+a^2b-15ab+3b, a^2b^2+2ab^2-5b, 3b+10a^2b^2+4ab, a^2b-3ab^2+4b$.

解：

$$\begin{array}{rrrrr}
2a^2b^2 & +a^2b & -15ab & & +3b \\
a^2b^2 & & & +2ab^2 & -5b \\
10a^2b^2 & & +4ab & & +3b \\
 & +a^2b & & -3ab^2 & +4b \\
\hline
13a^2b^2 & +2a^2b & -11ab & -ab^2 & +5a
\end{array}$$

2. 從 $2a^2b^3+3a^2b+15ab-4a$ 減去 $a^2b^3-4a^2b+25ab-3b+5a$.

解：

$$\begin{array}{rrrrr}
2a^2b^3 & +3a^2b & +15ab & -4a & \\
a^2b^3 & -4a^2b & +25ab & +5a & -3b \\
\hline
a^2b^3 & +7a^2b & -10ab & -9a & +3b
\end{array}$$

3. 加 $2x^3+3x^2y+15y^3, 3x^2y+4xy^2-8y^3, 3y^3-14x^3-10x^2y$ 及 $25xy^2+15x^2y-4y^3$.

4. 加$m^2+3mn+xn$，$2n^2+15mn-25m^2$，$15xn-2m^2+5n^2$，及$4mn-2xn+[illegible]m^2$.

5. 從$[illegible]r+5s-15rs$減去$2rs-8r+3s$.

6. 從$3x^2+5xy+2y^2-21x^2y$減去$2x^2+15y^2-3xy$.

7. 加$3a^3+5a^2b+15ab^2-10b^3$，$2a^2b-3ab^2+8b^3$，$19ab^2+3a^3-2b$，及$[illegible]a^2b+ab^2-a^3$.

8. 減去$3x^2+15x+[illegible]y^2$從$21y^3+15y-30x^2$.

9. 加$[illegible]a^2+5a-3b+21ab+2b^2-3$，$a^2-b^2+2-a^2b+5ab$，$19a-ab+a^2-5b^2+3a^2b$，$a+b-a^2+3b^2$，及$[illegible]-10a^2+15a^2b-12b^2$.

10. 試由$m^2+mn-3ml$，$mn-15m[illegible]$，$21ml+2m^2+3$，及$2ml-m^2+15$之和減去$25m^2-14ml+21-5mn$.

11. 試由$a^2+25ab+b^2$及$15ab-a^2$之和減去$15a^2+10b^2+8ab-10$.

12. 試由$25x^2+19xy-9y^2+13$減去$2x^2-15xy$，$2xy-y^2-2x^2+10$，及x^2+y^2+xy-5之和。

13. 從$a+b+c$減去$2a+3c-10b$，$5a-13b+2c$，$8a-c$及$2a-3c+25b$之和。

14. 試由$2r-[illegible]s+2q$，$25s+15q-2r$，$25s-15r+2q$及$r+s+10q$之和減去$2[illegible]q-5s+9r$.

15. 將$5a+2b-10c^2+3$，$a+c^2-15b$，$21c+5a^2-2ac$及$2ac+5c^2-3ab+a-10$之和由$108c+1[illegible]a^2-2ac+13a+21b-36$之內減去。

16. 從$\frac{2}{3}a+\frac{9}{5}b+\frac{10}{4}c$，$2a+\frac{1}{2}c-5b$及$\frac{4}{5}a-\frac{9}{2}b$之和減去$\frac{5}{8}a-\frac{2}{3}b+8c$.

17. 從$\frac{15}{7}x^2+\frac{25}{3}xy+\frac{15}{2}y^2+\frac{21}{4}$及$\frac{2}{5}y^2-\frac{10}{3}x^2+\frac{4}{5}xy$之和減去$\frac{25}{24}x^2+\frac{15}{6}xy-\frac{11}{7}y^2$.

15. 括號　包含幾數之式或代替數之文字式，可置於括號內視為單一之數，在演算時此種括號，除非內邊演算尚未完結或不為最簡時，即可以單一數而論。

法則　如括號之前爲＋號，解去括號時，可不變其內邊各項之號。

如括號之前爲一號，解去括號時，須盡變其內邊各項之號。

若一代數式有多種括號，則有下列

法則　普通先解去其最內層括號。如其前爲一號，則盡變其在內邊各項之號。

如新最內層可化簡，則簡之。

循次將括號去完爲止。

學者有時爲速成計，可將數步合併作之。唯如是易生錯誤，每至得不償失。

習　題

解去下列習題中括號：

1. $x-(2y+x)-[3x+5y-(7y+5x)-3y]$.

解：

$$
\begin{aligned}
& x-(2y+x)-[3x+5y-(7y+5x)-3y] \\
&= x-2y-x-[3x+5y-7y-5x-3y] \\
&= -2y-3x-5y+7y+5x+3y \\
&= 3y+3x.
\end{aligned}
$$

2. $a-\{-b-[-(-a)]\}$.

3. $-2m+n-[n+5m+(2m+3n)]$.

4. $x^2-2xy+[-5y^2+10xy+(2x^2-3xy+3y^2)-x^2]$.

5. $\frac{1}{2}-[\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{5}-(\frac{5}{10}\cdot\frac{1}{5}-\frac{2}{3})]$.

6. $5x\{3y-2x[5xy+10x-2(3x+y)]\}+10x^2$.

7. 若$a=2$，$b=3$，$c=1$；求$a-10b+2a+[5a-3c(21b-2c)+10a]$之值。

8. 若$m=1, n=5$；求$m^2+2mn\{3n-7m[4m-10n(2m-n)]\}$之值。

9 若$p=\frac{1}{2}, r=2, t=\frac{7}{2}$；求$-p\{r+5t-[2p+5t(2+r-15t)+\frac{1}{2}t]\}$之值。

10. 若$x=2, m=5, b=1$；求$x^2\{-5m+2x[5x-2(3m+b)]\}$之值。

16. 乘法　習慣書 $a\cdot a=a^2$, $a\cdot a\cdot a=a^3$; $\underbrace{a\ a\ldots a}_{n\text{項}}=a^n$

由第10節乘法組合法則

$$a^2\cdot a^3=(a\cdot a)(a\cdot a\cdot a)=a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a=a^5,$$

一般論之，　$a^m\cdot a^n=\cancel{a^{n+m}}$ ……………………(I)

此處m,n為正整數。

進而言之，　$(a^n)^m=a^n\cdot a^n\cdots a^n=a^{nm}$ ……………………(II)

終之，　$a^n\ b^n=(a\cdot b)^n$ ……………………(III)

$(a^n)^m$與a^{n^m}之區別，應注意之。例如，$(2^3)^2=8^2=64$, $2^{3^2}=2^9=512$. 質言之，在a^{n^m}內，m為n之指數，非a^n之指數。

方程式(I)確定兩方程式之積之指數，即因指數之和。以故獨項式乘法如下：

法則　先寫出數字係數之積，附乘式被乘式所有之文字於後。積之每文字之指數，為乘式被乘式中此文字指數之和。

例　題

$$-3m^5n^7p^2r^3\cdot(2mn^7p^4)=-3m^6n^{14}p^6r^3.$$

考問：　第10節何種法則應用於前例？

多項式乘獨項式，其演算如下

法則　用獨項式徧乘多項式各項而逐一寫出結果各項。

例 題

$$\begin{array}{r} 4xy^2+3x^2+15xy-10y^2+3 \\ 2x^2y \\ \hline 8x^3y^3+6x^4y+30x^3y^2-20x^2y^3+6x^2y \end{array}$$

考問：第10節何種法則應用於前例？

17. 多項式乘法

在分配法則中，

$$a(c+d)=ac+ad,$$

以 a 代替 $x+y$，則

$$(x+y)(c+d)=xc+yc+xd+yd.$$

於是得，

法則 以乘式各項，逐次徧乘被乘式各項，用適當符號，寫出其各部分之積。

欲驗其有無錯誤，可取適宜之數代入各文字，求出乘式被乘式及相乘積之數值，則相乘積之值必須等於他兩值之相乘。

習 題

試乘下列兩式並核算其結果：

1. $3x^2y+2xy-2xy^2+y^3$ 與 $x+y-xy$.

核算：設 $x=y=1$.

$$\begin{array}{l} 3x^2y+2xy-2xy^2+y^3 \qquad =4. \\ x+y-xy \qquad =1. \\ \hline 3x^3y+2x^2y-2x^2y^2+xy^3 \\ \quad +3x^2y^2-2xy^3+2xy^2+y^4 \\ \quad -2x^2y^2 \qquad -3x^3y^2+2x^2y^3-xy^4 \\ \hline 3x^3y+2x^2y-x^2y^2-xy^3+2xy^2+y^4-3x^3y^2+2x^2y^3-xy^4=4. \end{array}$$

2. $3a^2by$ 與 $2ab^3y^2$.
3. $7x^2y^3z$ 與 $-5x^2yz^5$.
4. $-3m^2np$ 與 $\frac{2mn}{3}$.
5. $-8a^2b^3c$ 與 $-7ab^4c^6$.
6. $\frac{15ax^2z}{2}$ 與 $20a^3xz$.
7. $\frac{12ar^2t^5}{5}$ 與 $-\frac{1}{2}a^2rt^3$.