高等数学习题集

上海交通大学应用数学系 710 教研室

一九七九年

目　　录

第一章　函　数

一、绝对值、不等式

1.1　解下列不等式：

(1)　$|x|<5$；

(2)　$|x-1|<0.01$；

(3)　$|2x-3|\leqslant 3$；

(4)　$x^2<9$；

(5)　$|x|>A$；

(6)　$0<(x-2)^2\leqslant 4$；

(7)　$|x|>x$；

(8)　$\left|\frac{x}{1+x}\right|>\frac{x}{1+x}$；

(9)　$|x|>|x+1|$；

(10)　$|x+1|+|x-1|\leqslant 4$；

(11)　$|x-2|-|x|>1$；

(12)　$|3x+2|\geqslant 5x+1$.

1.2　证明恒等式

$$\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2=x^2.$$

1.3　指出并改正下列错误：

(1)　$|xy|=xy$；

(2)　若 $x^2-2>4x$，则

$$\frac{x^2-2}{x}>4;$$

(3) 若 $|a|>|b|$，　则　$a>b$。

1.4　试证　$|ab|\leqslant a^2+b^2$。

1.5　说明　x，$\sqrt{x^2}$，$(\sqrt{x})^2$，$|x|$是否相同。

1.6　设　$f(x)=x+1$，$\varphi(x)=x-2$，解方程

$$|f(x)+\varphi(x)|=|f(x)|+|\varphi(x)|.$$

1.7　设　$f(x)=x$，$\varphi(x)=x-2$，解不等式

$$|f(x)-\varphi(x)>|f(x)|-|\varphi(x)|.$$

二、函数概念

1.8　若　$f(x)=\dfrac{|x-2|}{x+1}$，

求　$f(2)$，$f(-2)$，$f(0)$，$f(a)$，$f(a+b)$。

1.9　若　$\varphi(x)=2^{x-2}$，

求　$\varphi(2)$，$\varphi(-2)$，$\varphi(0)$，$\varphi\left(\dfrac{5}{2}\right)$。

1.10　若　$f(x)=\arcsin x$，

求　$f(0)$，$f(-1)$，$f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$f(1)$。

1.11　若　$G(x)=\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{x}{2}$，

求　$G(0)$，$G(1)$，$G(\sqrt{2})$，$G(-\sqrt{3})$，$G(-2)$。

1.12　若　$f(x)=x^3+1$，

求　$f(x^2)$和$[f(x)]^2$。

1.13　若　$f(x)=x^2-3x+7$，

求　$f(x+\Delta x)$，$f(x+\Delta x)-f(x)$。

1.14　若　$f(x)=\dfrac{1}{x}$，

求　$f(x+\Delta x)-f(x)$。

1.15设 $f(x)=\frac{\sin x}{1+\cos x}$,

证明 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=1$.

1.16 设 $f(t)=2t^2+\frac{2}{t^2}+\frac{5}{t}+5t$,

证明 $f(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)$.

1.17 设 $\varphi(Z)=Z^3-5Z$,

证明 $\varphi(-Z)=-\varphi(Z)$.

1.18 设 $F(x)=x^2+\cos x$,

证明 $F(x)=F(-x)$.

1.19 设 $\psi(x)=2\sin x-3\cos x$, 证明

$$\psi(x+2n\pi)=\psi(x)$$

其中 n 是整数.

1.20 设 $F(x)=e^x$, 证明:

(1) $F(x)\cdot F(y)=F(x+y)$;

(2) $\frac{F(x)}{F(y)}=F(x-y)$.

1.21 设 $G(x)=\ln x$, 证明:

(1) $G(x)+G(y)=G(xy)$;

(2) 设 $G(x)-G(y)=G\left(\frac{x}{y}\right)$.

1.22 设 $F(x)=\lg(x+1)$,

证明 $F(y^2-2)-F(y-2)=F(y)$.

1.23 设 $f(x)=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})$, $(a>0, a\neq1)$, 证明

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y).$$

1.24 设 $f(x)=\dfrac{ae^{x}+be^{-x}}{a+b}$,

求 $f(y)+f(-y)$，并证明

$f(2x)-f(-2x)=[f(x)]^2-[f(-x)]^2$。

1.25 设 $f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<1,\\ \dfrac{1}{2}, & x=1,\\ 1, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$

求 $f(0)$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $f(1)$, $f\left(\dfrac{5}{4}\right)$, $f(2)$.

1.26 设 $\varphi(x)=\begin{cases}2^{x}, & -1<x<0,\\ 2, & 0\leqslant x<1,\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 3,\end{cases}$

求 $\varphi(3)$, $\varphi(2)$, $\varphi(0)$, $\varphi(0.5)$, $\varphi(-0.5)$。

1.27 设 $\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<1,\\ 0, & |x|\geqslant 1,\end{cases}$

求 $\varphi(1)$, $\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, $\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$, $\varphi(-2)$.

1.28 设 $f(0)=-2$, $f(3)=5$，求线性函数 $f(x)=ax+b$。

1.29 设 $f(-2)=2$, $f(0)=1$, $f(1)=5$，求二次有理函数 $f(x)=ax^2+bx+c$。

1.30 若已知函数 $f(x)$定义在区间$[-5, 5]$上，试求方程 $f(x)=f\left(\dfrac{x+8}{x-1}\right)$ 的所有根，其中 $f(x)=x^2-x+3$。

1.31 设 $f(x)$ 具有性质：$f(x+y)=f(x)+f(y)$，则必有 $f(0)=0$, $Pf(x)=f(Px)$ （P 为任意正整数）。

1.32 试确定下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{3x+4}$;

(2) $y=\frac{1}{x-2}$;

(3) $y=\frac{2x}{x^2-3x+2}$;

(4) $y=\frac{1}{x^2+1}$;

(5) $y=\frac{1}{x}-\sqrt{1+x^2}$;

(6) $y=\sqrt{1-|x|}$;

(7) $y=\frac{1}{|x|-1}$;

(8) $y=\lg(1+x)$;

(9) $y=\lg(x+\sqrt{x^2+1})$;

(10) $y=\frac{1}{2}\lg\frac{1+x}{1-x}$;

(11) $y=\lg(\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x})$;

(12) $y=\sqrt{2+x}+\frac{1}{\lg(1-x)}$;

(13) $y=\sqrt{1-x}+\sqrt{x+1}$;

(14) $y=\sqrt{(2+x)(3-x)}$;

(15) $y=\frac{1}{\sqrt{2+x-x^2}}$;

(16) $y=\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$;

(17) $y=\log_2(\log_2 x)$;

(18) $y=\frac{x}{\operatorname{tg} x}$;

(19) $y=\operatorname{ctg}\sqrt{x}$;

(20) $y=\lg\sin x$;

(21) $y=\lg(1-2\cos x)$;

(22) $y=\arccos\sqrt{2x}$;

(23) $y=\arcsin(2+3^x)$;

(24) $y=\sqrt{3-x}+\arcsin\frac{3-2x}{5}$;

1.33 已知从高为 h 处落下的重物所经过的路程是由公式 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 来确定，问 (1) 此函数的定义域为何？(2) 解析式 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 的定义域又如何？

1.34 下列各题中，函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否相同？

(1) $f(x)=\ln x^2$, $\quad g(x)=2\ln x$;

(2) $f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}$, $\quad g(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$;

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$, $\quad g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$.

1.35 已知 $y=\arcsin u$, $u=e^v$, $v=-\sqrt{x}$, 试将 y 表为 x 的函数。

1.36 已知 $y=\sqrt{1+u^2}$, $u=\sin v$, $v=\log_a x$, 试将 y 表为 x 的函数。

1.37 下列初等函数由哪些基本初等函数复合而成？

(1) $y=\sqrt{2-x^2}$;

(2) $y=\cos\frac{3x}{2}$;

(3) $y=2^{x^2}$ $(x>0)$;

(4) $y=\lg\sin x$;

(5) $y=\sin^3 5x$;

(6) $y=\operatorname{arctg}(\cos e^{-\frac{1}{x^2}})$;

(7) $y=\ln^2\ln x^3$;

(8) $y=\arccos\sqrt{\log_a(x^2-1)}$.

1.38 设 $y=f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$，问

(1) $f(x^2)$;　　(2) $f(\sin x)$;

(3) $f(x+a)$ $(a>0)$;

(4) $f(x+a)-f(x-a)$ $(a>0)$;

的定义域是什么?

1.39 设 $f(x)=\frac{1}{1-x}$，求 $f[f(x)]$ 及其定义域.

1.40 设 $f(x)=x+1$，$\varphi(x)=\frac{1}{1+x^2}$，求 $f[\varphi(x)+1]$.

1.41 设 $\varphi(x)=x^2$，$\psi(x)=2^x$，

求 $\varphi[\varphi(x)]$，$\psi[\psi(x)]$，$\varphi[\psi(x)]$，$\psi[\varphi(x)]$.

1.42 设 $f(x)=\frac{ax+b}{cx+a}$，$\varphi(x)=\frac{lx+m}{nx+l}$，

且 $b:c=m:n$，证明 $f[\varphi(x)]=\varphi[f(x)]$.

1.43 设 $f_r(x)=\underbrace{f\{f[\cdots f(x)]\}}_{r\text{次}}$，若 $f(x)=a+bx$，

证 $f_r(x)=a\cdot\frac{b^r-1}{b-1}+b^r x$.

1.44 设有一边长为 a 的正方形的铁皮，现将各角截去相等的小方块，然后折起各边而组成一无盖的箱，试建立此箱的体积与截去小方块边长间的函数关系。

1.45 在斜高 $l(=2)$ 给定时，试写出圆锥体的体积 V 作为它的高 h 的函数表达式。

1.46 设有容量为 10 立方尺的无盖圆柱形桶，底用铜制，侧壁用铁制，已知铜价为铁价的 5 倍，试建立做此桶所需费用与

桶的底半径 r 之间的函数关系。

1.47 设 M 为密度不均匀细杆 OB 上的一点，若 OM 的质量与 OM 的长度平方成正比，又已知 $OM=4$ 寸其质量为 8 单位，试求 OM 的质量与长度间的关系。

1.48 一物体作直线运动，已知阻力的大小与物体运动的速度成正比，但方向相反，当物体以 1 米/秒速度运动时阻力为 2 克，建立阻力与速度间的函数关系。

1.49 已知三角形中有两边长分别为 a 与 b，设 γ 为该两边之间的夹角，试将三角形的面积表成 γ 的函数，并求其定义域。

1.50 某工厂建一蓄水池，池长 50 米，断面尺寸如图 1-1 所示，为了随时能知道池中水的吨数（每立方米水重 1 吨），我们只需在水池的端壁上标出尺寸，看出水的高度 x，就可以换算成所储水的吨数 T，试列出换算用的函数关系式，并指出函数 $T(x)$ 的定义域。

1.51 在半径为 r 的球内嵌入一内接圆柱（如图 1-2），试将圆柱的体积表为高的函数，并求出此函数的定义域。

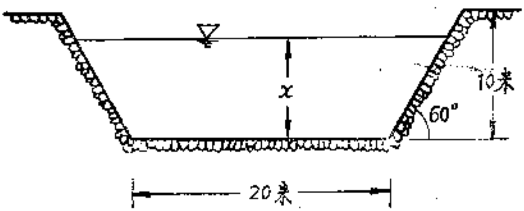

图 1-1

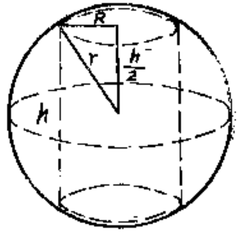

图 1-2

1.52 底 $AC=b$，高 $BD=h$ 的三角形 ABC 中，（如图1-3）内接矩形 $KLMN$，其高记为 x，将矩形之周长 p 和其面积 s 表为 x 的函数。

1.53 把一圆形铁片，自中心处剪去中心角 α 的一扇形后围成一无底圆锥（见图 1-4），试将这圆锥的体积表为 α 的函数。

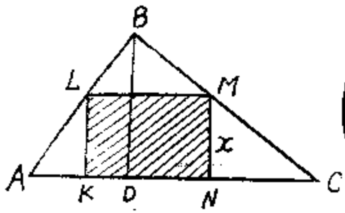

图 1-3

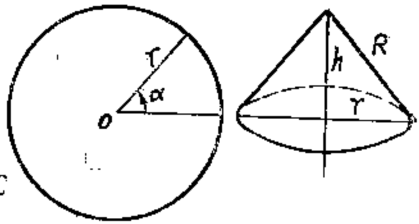

图 1-4

1.54 一球的半径为 r，作外切于球的圆锥（见图 1-5），试将其体积表为高的函数，并求此函数的定义域。

1.55 等腰梯形 $ABCD$（如图 1-6），其两底分别为 $AD=a$ 和 $BC=b\,(a>b)$，高为 $HB=h$，引直线 $MN\parallel BH$，MN 与顶点 A 的距离 $AM=x\ (0\leqslant x\leqslant a)$，将梯形内位于直线 MN 之左的面积 s 表为 x 的函数。

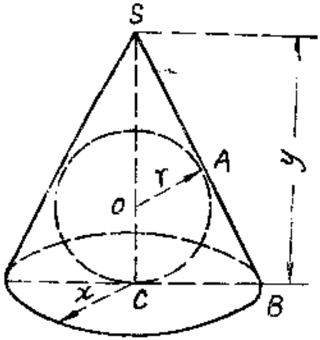

图 1-5

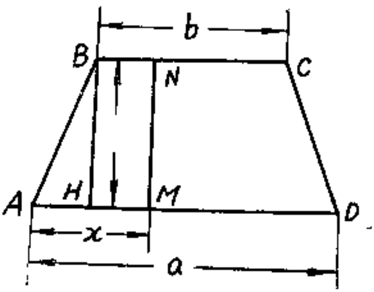

图 1-6

1.56 有三个矩形，其高分别等于 3 米、2 米、1 米，而底皆为 1 米，彼此相距一米放着（如图 1-7），假定 x（$-\infty<x<+\infty$）连续变动(即直线 AB 连续地平行移动)，试将阴影部分的面积 s 表为距离 x 的函数。

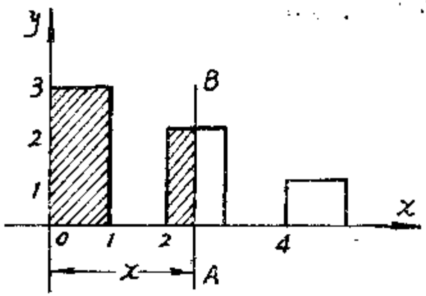

图 1-7

1.57 已知函数的图形（见图1-8～图1-11），写出它们的分析表达式。

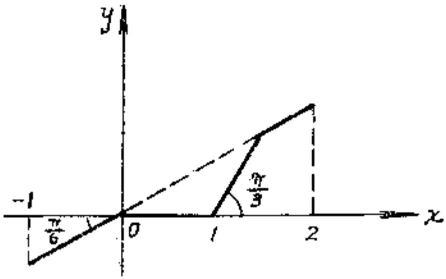

图 1-8

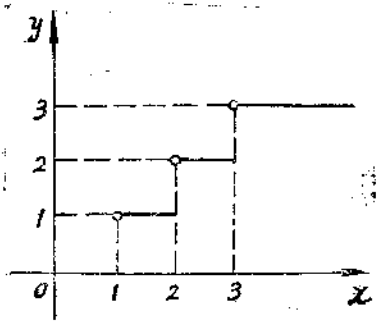

图 1-9

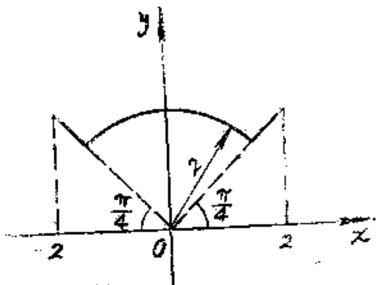

图 1-10

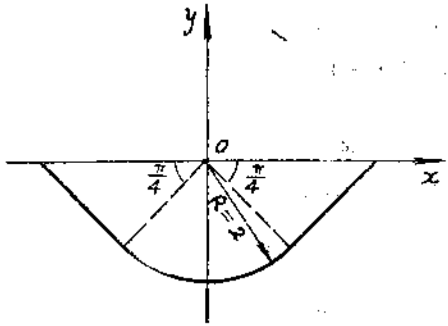

图 1-11

三、函数简单性质的讨论

1.58 试证下列函数在指定区间内的单调性：

(1) $y=x^2$，$(-1,0)$；

(2) $y=\frac{1}{x}$，$(0,1)$；

(3) $y=2^{x-1}$，$(0,+\infty)$；

(4) $y=\lg x$，$(0,+\infty)$；

(5) $y=\sin x$，$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$；

(6) $y=\operatorname{ctg} x$，$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$；

*1.59 试证函数 $y=2x+\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的函数。

1.60 设 $\varphi(x)$，$\psi(x)$ 及 $f(x)$ 为单调增函数，证明若

$$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi(x),$$

则 $\varphi[\varphi(x)]\leqslant f[f(x)]\leqslant\psi[\psi(x)]$。

1.61 指出下列函数中哪些是奇函数？哪些是偶函数？哪些是非奇非偶函数？