

高等数学习题集

上海交通大学应用数学系 710 教研室

一九七九年

目 录

第一章 函数	(1)
一、绝对值、不等式	1
二、函数概念	2
三、函数简单性质的讨论	11
四、双曲函数	14
五、函数的图形	15
第二章 极限	(18)
一、数列的极限	18
二、函数的极限	21
三、极限存在准则 两个重要极限	28
四、无穷小的比较	31
五、杂题	33
第三章 函数的连续性	(36)
第四章 导数与微分	(40)
一、导数概念	40
二、导数的几何意义	43
三、简单函数的导数	43
四、复合函数的导数	46
五、对数求导法	50
六、杂题	50

七、反函数的导数	52
八、隐函数的导数	53
九、参数方程所确定的函数的导数	55
十、高阶导数	56
十一、微分及其应用	59
第五章 中值定理	(60)
一、罗尔定理 拉格朗日定理 柯西定理	65
二、罗必塔法则	67
三、求极限杂题	69
四、泰勒公式	72
第六章 导数的应用	(74)
一、函数的单调性	74
二、函数的极值及其应用	75
三、曲线的凹性和拐点	78
四、渐近线及函数图形的描绘	80
五、平面曲线的曲率、曲率圆	81
六、方程的近似根	83
第七章 不定积分	(84)
一、简单的不定积分	84
二、换元积分法	85
三、分部积分法	88
四、有理函数的积分	90
五、三角函数的积分	91
六、简单无理函数的积分	92
七、杂题	94

第八章 定积分	(96)
一、定积分的概念及性质.....	96
二、上限为变量的定积分.....	98
三、牛顿—莱布尼兹公式.....	99
四、定积分的分部积分法.....	100
五、定积分的换元积分法.....	102
六、杂题.....	104
七、定积分的近似计算.....	107
八、广义积分.....	108
第九章 定积分的应用	(110)
一、平面图形的面积.....	110
二、已知平行截面面积的立体体积.....	112
三、平面曲线的弧长.....	113
四、物理问题.....	116
第十章 空间解析几何与矢量代数	(119)
一、直角坐标与基本问题.....	119
二、矢量代数.....	120
三、曲面方程与空间曲线方程.....	124
四、平面.....	126
五、直线.....	127
六、二次曲面.....	131
第十一章 多元函数微分法及其应用	(134)
一、多元函数概念.....	134
二、极限概念 连续函数.....	135

三、偏导数	136
四、全微分及其应用	138
五、复合函数的微分法	139
六、隐函数的微分法	142
七、高阶偏导数	143
八、空间曲线的切线与法平面 曲面的切平面与法线	146
九、多元函数无条件极值	148
十、条件极值	149
第十二章 重积分	(150)
一、二重积分	150
二、二重积分的应用	154
三、三重积分	156
四、三重积分的应用	159
第十三章 曲线积分与曲面积分	(161)
一、对弧长的曲线积分	161
二、对坐标的曲线积分	163
三、格林公式、与路径无关的平面曲线积分	166
四、对面积的曲面积分	169
五、对坐标的曲面积分	170
六、奥斯特罗格拉斯基公式	171
七、斯托克斯公式、与路径无关的空间曲线积分	173
第十四章 数项级数与幂级数	(175)
一、正项级数	175
二、任意项级数	179
三、函数项级数	181

四、幂级数·····	181
五、幂级数应用·····	183
第十五章 富里哀级数 ·····	(185)
第十六章 微分方程 ·····	(189)
一、基本概念·····	189
二、一阶可分离变量微分方程·····	190
三、一阶齐次方程·····	191
四、一阶线性微分方程·····	193
五、全微分方程·····	194
六、一阶微分方程杂题·····	195
七、高阶微分方程的特殊类型·····	196
八、高阶线性微分方程·····	197
九、欧拉方程·····	201
十、级数解法·····	201
附录 初等数学复习 ·····	(202)
一、杂题·····	202
二、坐标变换及二次方程的简化·····	207
三、极坐标·····	207
四、行列式与线性方程组·····	209
附表 积分表 ·····	(214)
答 案 ·····	(227)

第一章 函 数

一、绝对值、不等式

1.1 解下列不等式:

- (1) $|x| < 5$;
- (2) $|x - 1| < 0.01$;
- (3) $|2x - 3| \leq 3$;
- (4) $x^2 < 9$;
- (5) $|x| > A$;
- (6) $0 < (x - 2)^2 \leq 4$;
- (7) $|x| > x$;
- (8) $\left| \frac{x}{1+x} \right| > \frac{x}{1+x}$;
- (9) $|x| > |x + 1|$;
- (10) $|x + 1| + |x - 1| \leq 4$;
- (11) $|x - 2| - |x| > 1$;
- (12) $|3x + 2| \geq 5x + 1$.

1.2 证明恒等式

$$\left(\frac{x + |x|}{2} \right)^2 + \left(\frac{x - |x|}{2} \right)^2 = x^2.$$

1.3 指出并改正下列错误:

- (1) $|xy| = xy$;
- (2) 若 $x^2 - 2 > 4x$, 则

$$\frac{x^2 - 2}{x} > 4;$$

(3) 若 $|a| > |b|$, 则 $a > b$.

1.4 试证 $|ab| \leq a^2 + b^2$.

1.5 说明 x , $\sqrt{x^2}$, $(\sqrt{x})^2$, $|x|$ 是否相同.

1.6 设 $f(x) = x + 1$, $\varphi(x) = x - 2$, 解方程

$$|f(x) + \varphi(x)| = |f(x)| + |\varphi(x)|.$$

1.7 设 $f(x) = x$, $\varphi(x) = x - 2$, 解不等式

$$|f(x) - \varphi(x)| > |f(x)| - |\varphi(x)|.$$

二、函数概念

1.8 若 $f(x) = \frac{|x-2|}{x+1}$,

求 $f(2)$, $f(-2)$, $f(0)$, $f(a)$, $f(a+b)$.

1.9 若 $\varphi(x) = 2^{x-2}$,

求 $\varphi(2)$, $\varphi(-2)$, $\varphi(0)$, $\varphi\left(\frac{5}{2}\right)$.

1.10 若 $f(x) = \arcsin x$,

求 $f(0)$, $f(-1)$, $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $f(1)$.

1.11 若 $G(x) = \frac{1}{2} \arccos \frac{x}{2}$,

求 $G(0)$, $G(1)$, $G(\sqrt{2})$, $G(-\sqrt{3})$, $G(-2)$.

1.12 若 $f(x) = x^3 + 1$,

求 $f(x^2)$ 和 $[f(x)]^2$.

1.13 若 $f(x) = x^2 - 3x + 7$,

求 $f(x + \Delta x)$, $f(x + \Delta x) - f(x)$.

1.14 若 $f(x) = \frac{1}{x}$,

求 $f(x + \Delta x) - f(x)$.

1.15 设 $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x},$

证明 $f\left(\frac{\pi}{3}\right), f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = 1.$

1.16 设 $f(t) = 2t^2 + \frac{2}{t^2} + \frac{5}{t} + 5t,$

证明 $f(t) = f\left(\frac{1}{t}\right).$

1.17 设 $\varphi(Z) = Z^3 - 5Z,$

证明 $\varphi(-Z) = -\varphi(Z).$

1.18 设 $F(x) = x^2 + \cos x,$

证明 $F(x) = F(-x).$

1.19 设 $\psi(x) = 2\sin x - 3\cos x,$ 证明

$$\psi(x + 2n\pi) = \psi(x)$$

其中 n 是整数.

1.20 设 $F(x) = e^x,$ 证明:

(1) $F(x) \cdot F(y) = F(x+y);$

(2) $\frac{F(x)}{F(y)} = F(x-y).$

1.21 设 $G(x) = \ln x,$ 证明:

(1) $G(x) + G(y) = G(xy);$

(2) 设 $G(x) - G(y) = G\left(\frac{x}{y}\right).$

1.22 设 $F(x) = \lg(x+1),$

证明 $F(y^2-2) - F(y-2) = F(y).$

1.23 设 $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x}), (a > 0, a \neq 1),$ 证明

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

1.24 设 $f(x) = \frac{ae^x + be^{-x}}{a+b}$,

求 $f(y) + f(-y)$, 并证明

$$f(2x) - f(-2x) = [f(x)]^2 - [f(-x)]^2.$$

1.25 设 $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{2}, & x = 1, \\ 1, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

求 $f(0)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(1)$, $f\left(\frac{5}{4}\right)$, $f(2)$.

1.26 设 $\varphi(x) = \begin{cases} 2^x, & -1 < x < 0, \\ 2, & 0 \leq x < 1, \\ x-1, & 1 \leq x \leq 3, \end{cases}$

求 $\varphi(3)$, $\varphi(2)$, $\varphi(0)$, $\varphi(0.5)$, $\varphi(-0.5)$.

1.27 设 $\varphi(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases}$

求 $\varphi(1)$, $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $\varphi(-2)$.

1.28 设 $f(0) = -2$, $f(3) = 5$, 求线性函数 $f(x) = ax + b$.

1.29 设 $f(-2) = 2$, $f(0) = 1$, $f(1) = 5$, 求二次有理函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$.

1.30 若已知函数 $f(x)$ 定义在区间 $[-5, 5]$ 上, 试求方程 $f(x) = f\left(\frac{x+8}{x-1}\right)$ 的所有根, 其中 $f(x) = x^2 - x + 3$.

1.31 设 $f(x)$ 具有性质: $f(x+y) = f(x) + f(y)$, 则必有 $f(0) = 0$, $Pf(x) = f(Px)$ (P 为任意正整数).

1.32 试确定下列函数的定义域:

(1) $y = \sqrt{3x+4}$;

$$(2) \quad y = \frac{1}{x-2},$$

$$(3) \quad y = \frac{2x}{x^2-3x+2},$$

$$(4) \quad y = \frac{1}{x^2+1},$$

$$(5) \quad y = \frac{1}{x} - \sqrt{1+x^2},$$

$$(6) \quad y = \sqrt{1-|x|},$$

$$(7) \quad y = \frac{1}{|x|-1},$$

$$(8) \quad y = \lg(1+x),$$

$$(9) \quad y = \lg(x + \sqrt{x^2+1}),$$

$$(10) \quad y = \frac{1}{2} \lg \frac{1+x}{1-x},$$

$$(11) \quad y = \lg(\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}),$$

$$(12) \quad y = \sqrt{2+x} + \frac{1}{\lg(1-x)},$$

$$(13) \quad y = \sqrt{1-x} + \sqrt{x+1},$$

$$(14) \quad y = \sqrt{(2+x)(3-x)},$$

$$(15) \quad y = \frac{1}{\sqrt{2+x-x^2}},$$

$$(16) \quad y = \sqrt{x^2-1} + \frac{1}{\sqrt{4-x^2}},$$

$$(17) \quad y = \log_2(\log_2 x),$$

$$(18) \quad y = \frac{x}{\operatorname{tg} x},$$

$$(19) \quad y = \operatorname{ctg} \sqrt{x},$$

$$(20) y = \lg \sin x;$$

$$(21) y = \lg(1 - 2\cos x);$$

$$(22) y = \arccos \sqrt{2x};$$

$$(23) y = \arcsin(2 + 3^x);$$

$$(24) y = \sqrt{3-x} + \arcsin \frac{3-2x}{5};$$

1.33 已知从高为 h 处落下的重物所经过的路程是由公式 $s = \frac{1}{2}gt^2$ 来确定, 问 (1) 此函数的定义域为何? (2) 解析式 $s = \frac{1}{2}gt^2$ 的定义域又如何?

1.34 下列各题中, 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否相同?

$$(1) f(x) = \ln x^2, \quad g(x) = 2 \ln x;$$

$$(2) f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}, \quad g(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x-2}};$$

$$(3) f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}, \quad g(x) = x \sqrt[3]{x-1}.$$

1.35 已知 $y = \arcsin u$, $u = e^v$, $v = -\sqrt{x}$, 试将 y 表为 x 的函数.

1.36 已知 $y = \sqrt{1+u^2}$, $u = \sin v$, $v = \log_a x$, 试将 y 表为 x 的函数.

1.37 下列初等函数由哪些基本初等函数复合而成?

$$(1) y = \sqrt{2-x^2};$$

$$(2) y = \cos \frac{3x}{2};$$

$$(3) y = 2^{x^2} \quad (x > 0);$$

$$(4) y = \lg \sin x;$$

$$(5) y = \sin^3 5x;$$

$$(6) \quad y = \operatorname{arctg}(\operatorname{cose}^{\frac{1}{x^2}});$$

$$(7) \quad y = \ln^2 \ln x^3;$$

$$(8) \quad y = \arccos \sqrt{\log_a(x^2 - 1)}.$$

1.38 设 $y = f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$, 问

$$(1) \quad f(x^2), \quad (2) \quad f(\sin x);$$

$$(3) \quad f(x+a) \quad (a > 0);$$

$$(4) \quad f(x+a) - f(x-a) \quad (a > 0);$$

的定义域是什么?

1.39 设 $f(x) = \frac{1}{1-x}$, 求 $f[f(x)]$ 及其定义域.

1.40 设 $f(x) = x+1$, $\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}$, 求 $f[\varphi(x)+1]$.

1.41 设 $\varphi(x) = x^2$, $\psi(x) = 2^x$,

求 $\varphi[\varphi(x)]$, $\psi[\psi(x)]$, $\varphi[\psi(x)]$, $\psi[\varphi(x)]$.

1.42 设 $f(x) = \frac{ax+b}{cx+a}$, $\varphi(x) = \frac{lx+m}{nx+l}$,

且 $b:c=m:n$, 证明 $f[\varphi(x)] = \varphi[f(x)]$.

1.43 设 $f_r(x) = \underbrace{f\{f[\cdots f(x)]\}}_{r \text{ 次}}$, 若 $f(x) = a+bx$,

$$\text{证 } f_r(x) = a \cdot \frac{b^r - 1}{b - 1} + b^r x.$$

1.44 设有一边长为 a 的正方形的铁皮, 现将各角截去相等的小方块, 然后折起各边而组成一无盖的箱, 试建立此箱的体积与截去小方块边长间的函数关系.

1.45 在斜高 $l (=2)$ 给定时, 试写出圆锥体的体积 V 作为它的高 h 的函数表达式.

1.46 设有容量为 10 立方尺的无盖圆柱形桶, 底用铜制, 侧壁用铁制, 已知铜价为铁价的 5 倍, 试建立做此桶所需费用与

桶的底半径 r 之间的函数关系。

1.47 设 M 为密度不均匀细杆 OB 上的一点, 若 OM 的质量与 OM 的长度平方成正比, 又已知 $OM=4$ 寸其质量为 8 单位, 试求 OM 的质量与长度间的关系。

1.48 一物体作直线运动, 已知阻力的大小与物体运动的速度成正比, 但方向相反, 当物体以 1 米/秒速度运动时阻力为 2 克, 建立阻力与速度间的函数关系。

1.49 已知三角形中有两边长分别为 a 与 b , 设 γ 为该两边之间的夹角, 试将三角形的面积表成 γ 的函数, 并求其定义域。

1.50 某工厂建一蓄水池, 池长 50 米, 断面尺寸如图 1-1 所示, 为了随时能知道池中水的吨数 (每立方米水重 1 吨), 我们只需在水池的端壁上标出尺寸, 看出水的高度 x , 就可以换算成所储水的吨数 T , 试列出换算用的函数关系式, 并指出函数 $T(x)$ 的定义域。

1.51 在半径为 r 的球内嵌入一内接圆柱 (如图 1-2), 试将圆柱的体积表为高的函数, 并求出此函数的定义域。

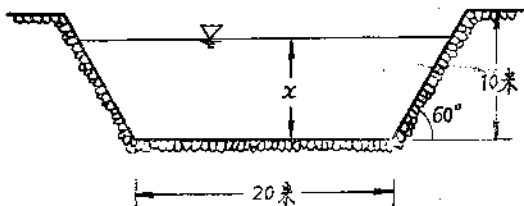


图 1-1

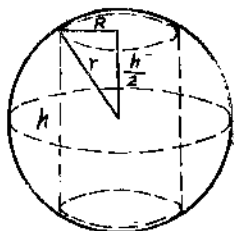


图 1-2

1.52 底 $AC=b$, 高 $BD=h$ 的三角形 ABC 中, (如图 1-3) 内接矩形 $KLMN$, 其高记为 x , 将矩形之周长 p 和其面积 s 表为 x 的函数。

1.53 把一圆形铁片, 自中心处剪去中心角 α 的一扇形后围成一无底圆锥 (见图 1-4), 试将这圆锥的体积表为 α 的函数。

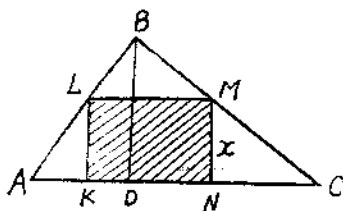


图 1-3

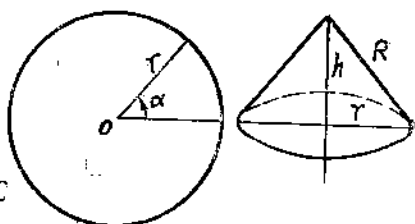


图 1-4

1.54 一球的半径为 r ，作外切于球的圆锥（见图 1-5），试将其体积表为高的函数，并求此函数的定义域。

1.55 等腰梯形 $ABCD$ （如图 1-6），其两底分别为 $AD=a$ 和 $BC=b$ ($a > b$)，高为 $HB=h$ ，引直线 $MN \parallel BH$ ， MN 与顶点 A 的距离 $AM=x$ ($0 \leq x \leq a$)，将梯形内位于直线 MN 之左的面积 s 表为 x 的函数。

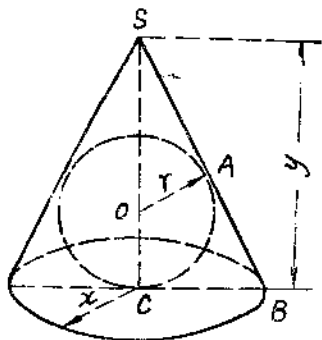


图 1-5

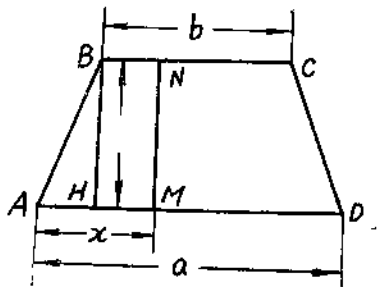


图 1-6

1.56 有三个矩形，其高分别等于 3 米、2 米、1 米，而底皆为 1 米，彼此相距一米放着（如图 1-7），假定 x

($-\infty < x < +\infty$) 连续变动（即直线 AB 连续地平行移动），试将阴影部分的面积 s 表为距离 x 的函数。

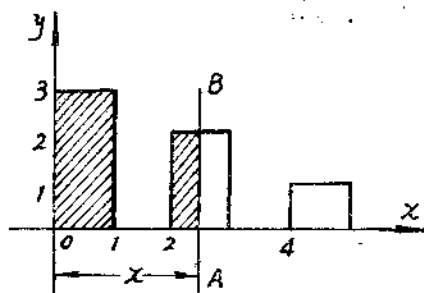


图 1-7

1.57 已知函数的图形 (见图 1-8~图 1-11), 写出它们的分析表达式。

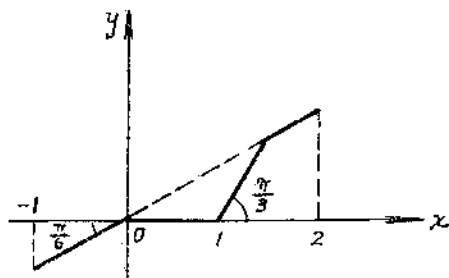


图 1-8

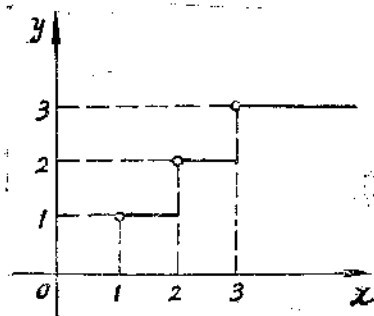


图 1-9

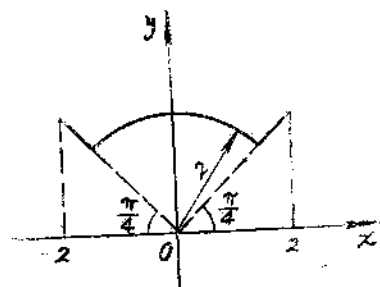


图 1-10

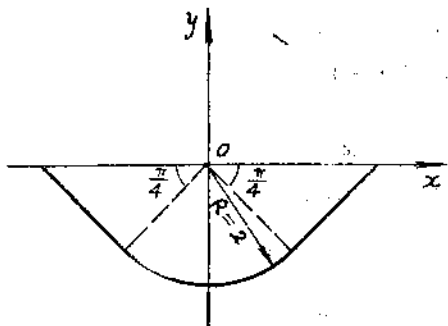


图 1-11

三、函数简单性质的讨论

1.58 试证下列函数在指定区间内的单调性:

- (1) $y = x^2, (-1, 0);$
- (2) $y = \frac{1}{x}, (0, 1);$
- (3) $y = 2^{x-1}, (0, +\infty);$
- (4) $y = \lg x, (0, +\infty);$
- (5) $y = \sin x, \left(0, \frac{\pi}{2}\right);$
- (6) $y = \operatorname{ctg} x, \left(0, \frac{\pi}{2}\right);$

*1.59 试证函数 $y = 2x + \sin x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的函数。

1.60 设 $\varphi(x), \psi(x)$ 及 $f(x)$ 为单调增函数, 证明若

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x),$$

则 $\varphi[\varphi(x)] \leq f[f(x)] \leq \psi[\psi(x)]$ 。

1.61 指出下列函数中哪些是奇函数? 哪些是偶函数? 哪些是非奇非偶函数?