《教学与研究》（中学数学）

增刊 II

中学数学解题方法与技巧

浙江师范学院数学系

封面设计

邢广汕

陈小鹤

编辑 浙江师范学院数学系
《教学与研究》(中学数学)编辑室

印刷 浙江省嵊县印刷厂

刊号 32—17

目　　录

代数　三角

谈一元二次方程与二次函数……………………滕永康（ 1 ）

无理不等式的一种解法…………………………刘中兴（16）

解指数方程的两个有效方法……………………龚陈荣（20）

二元二次式的分解法……………………………马元鹿（23）

等差数列的某些性质及其应用…………………胡炯涛（26）

证明根式恒等式的几种方法……………………谭彦科（30）

应用行列式证明恒等式……………张鹭平　方问农（35）

克莱姆法则的应用举例…………………………蒋国华（43）

多项式的展开……………………………………张崇德（47）

一个乘法公式的妙用………………黄锡忠　陈大业（54）

三数成等差数列的一种证法……………………李思文（60）

应用辅助元法解题的一个重要原则……………张燕平（63）

1982年高考数学（理科）附加题评析…………袁晓东（68）

三角恒等变形的常用方法………………………蔡水明（72）

一种类型三角题目的有趣解法…………………田　波（79）

平面几何　立体几何

也谈勾股定理逆定理的证明……………………顾忠德（ 82）
分散角的和为直角的应用……………………唐章发（ 88）
托勒密定理的应用…………………张寿昌　曾广寿（ 90）
几何问题的面积证法…………………………熊增润（ 95）
直二面角的两个面上异面直线间距离的一个
简易计算公式……………………………汪文英（103）
两条异面直线的距离的求法………………黄序雪（105）
关于拟柱体体积公式的证法探讨……………张澄清（110）

解析几何

抛物线的一些性质……………………………林　华（118）
抛物线方程参数变换的探讨…………………刘妙龙（127）
介绍一种解题技巧……………………………薛大庆（131）
准线方程在解题中的作用…………孙春旭　赵国民（135）
圆锥曲线极坐标方程的应用…………………淡黎青（138）
两条特殊直线的几何性质及其应用…………林福安（145）
一类求线段中点轨迹的习题“模型”………曹重庆（156）
极坐标平移变换在求曲线轨迹方程中的应用
…………………………………………………芮德永（160）
利用压缩变换解与椭圆有关的问题…………章润生（167）
求曲线方程中的常见错误举例………………张夏林（171）

综合应用

错误在哪里……………………………………陈定生（177）
一道试题的启示………………………………苏化明（184）
用代数三角法解几何题………………………刘卓雄（190）
一类几何题的解析证法……………杨思源　王春山（199）
一元二次方程根的判别式在解综合题中的应
用…………………………………………张子贤（209）
不等式的几何证法…………………席竹华　丁宗武（215）
一道试题的探讨……………………………陈玉燕（222）
三角问题的复数证法………………………阮可之（227）
复数在几何证明中的应用…………………魏柏良（233）
复数证几何题初析…………………………席振伟（238）
利用复数相乘法则求曲线轨迹方程…………
……………………………………陆俊峰　陆菱芝（245）
一题多解……………………………………谢力之（248）

其　它

一种摸球模型……………………娄言　余汶　一兵（253）
怎样证明组合恒等式………………唐攀龙　陈铁山（262）
关于用“排阵”解决排列问题的一点探讨
……………………………………韩云波　晁振英（281）
$|a|=\sqrt{a^2}$在求导数时的应用………宋炎　张学禧（287）

用 $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$ 解题的教学范例…… 蔡乘湘 (289)
求三角形“中心”的一个新方法…………王岳庭译 (295)
欧拉数………………………………………徐宪明译 (301)
欧拉线的推广………………………………张在民译 (306)
牛顿的正弦和余弦级数……………………茅中良译 (312)
用代数与作图相结合的方法来解几何问题汤德祥译 (318)

代数公式资料

数的扩张、分类及其基本运算规则…………………… (329)
复数……………………………………………………… (332)
数列与简单级数………………………………………… (334)
乘法与因式分解公式…………………………………… (340)
分式……………………………………………………… (340)
比例……………………………………………………… (345)
根式……………………………………………………… (346)
不等式…………………………………………………… (348)
阶乘、排列与组合……………………………………… (353)
杨辉三角形与多项式定理……………………………… (358)
数学归纳法与抽屉原理………………………………… (359)

谈一元二次方程与二次函数

华东师大二附中　滕永康

一元二次方程、二次函数是初中代数中的重要内容之一。让学生切实掌握这部分知识，是值得重视的一个课题。下面谈五点做法。

（一）通过例题的选讲，使学生加深对基本概念的理解。

例一：决定实数K，使方程$(2-K^2)x^2+(2K^2-2K)x-K^2+2K-3=0$的二实根之和等于1。

分析：∵二实根之和等于1，∴由韦达定理可知：

$$\frac{2K^2-2K}{K^2-2}=1.$$

但是一元二次方程的韦达定理，仅阐明了二根之和、二根之积与系数的关系，并不能保证该方程一定有实根！因此在解本题时还需要$\triangle\geqslant 0$的条件。

解：由题意可知，K应满足：

$$\begin{cases} 2-K^2\neq 0 & (1) \\ \triangle=(2K^2-2K)^2-4(2-K^2)\cdot(-K^2+2K-3)\geqslant 0 & (2) \\ \dfrac{2K^2-2K}{K^2-2}=1 & (3) \end{cases}$$

由(3)可得：$K=2$，由于$K=2$不满足(2)，

所以没有实数K能满足题意。

例二：已知x、y是实数，且$3x^2+2y^2=6x$，　试求

x^2+y^2的极大值。

分析：本题虽然由$3x^2+2y^2=6x$可得：

$$x^2+y^2=-\frac{1}{2}(x-3)^2+\frac{9}{2},$$

但不能就武断地认为x^2+y^2的极大值为$\frac{9}{2}$。因为二次三项式$ax^2+bx+c(a\neq0)$顶点的纵坐标，$\frac{4ac-b^2}{4a}$固然是其极值，但须自变量在取值于顶点的横坐标：$-\frac{b}{2a}$时才能达到！

本题由已知条件：$2y^2=6x-3x^2\geqslant0$，可知$0\leqslant x\leqslant2$，所以x^2+y^2的极大值不会是$\frac{9}{2}$。（解略）

例三：m为何值时，方程 $mx^2-(m+1)x+3=0$ 有实数根？

分析：由于本题既没有指明是二次方程，也没有要求有两个实数根，所以二次项系数m可以等于0（此时不允许再使用判别式）。

解：1）如$m=0$：此时方程为：$-x+3=0$
由于此时有实根3，所以$m=0$为本题之一解。

2）如$m\neq0$：由 $\begin{cases} m\neq0 \\ \triangle=[-(m+1)]^2-4\cdot3\cdot m\geqslant0, \end{cases}$

可得：　$m\geqslant5+2\sqrt{6}$或$m\leqslant5-2\sqrt{6}$。

综上所述可知：在$m=0$或$m\geqslant5+2\sqrt{6}$或$m\leqslant5-2\sqrt{6}$时原方程有实数根。

例四：K为何值时，不等式$Kx^2-Kx+1>0$恒成立？

分析：由于本题没有强调是一元二次不等式，所以二次项系数要分$K=0$，$K\neq0$两种情况讨论。

解：1）如$K=0$：此时原不等式可写为：$0\cdot x^2-0\cdot x+1>0$，由于此时不等式恒成立，所以$K=0$为本题之一解。

2）如$K\neq 0$：则可由：

$$\begin{cases} K>0 \\ \triangle=(-K)^2-4K<0 \end{cases}$$

来确定K．解之可得：$0<K<4$．

综上所述可知：在$0\leqslant K<4$时，不等式$Kx^2-Kx+1>0$恒成立。

（二）通过对一些典型例题的分析，综合归纳出一些解题规律。

例一：1）确定实数m的值，使方程$2x^2-4mx+2m^2-5m-3=0$有两个正数根？

解：由 $\begin{cases} \triangle=(-4m)^2-4\cdot 2\cdot(2m^2-5m-3)\geqslant 0 \\ x_1+x_2=\dfrac{4m}{2}>0 \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{2m^2-5m-3}{2}>0． \end{cases}$ 解之可得$m>3$．

2）确定实数m，使方程$2(m+1)x^2+4mx+(3m-2)=0$有一正根和一负根？

解：由 $\begin{cases} m+1\neq 0 \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{3m-2}{2(m+1)}<0 \end{cases}$ 解之可得：$-1<m<\dfrac{2}{3}$．

3）m取什么值时，二次方程$(m-1)x^2-6(3m-1)x+(m^2-1)=0$有一根为0？

解：由 $\begin{cases} m-1\neq 0 \\ m^2-1=0， \end{cases}$ 可得：$m=-1$．

4）m取什么实数时，方程$x^2-(m-2)x-(m-5)=0$

的二实根成相反数？

解：由 $\begin{cases} \triangle=[-(m-2)]^2+4(m-5)\geqslant 0 & (1) \\ x_1+x_2=m-2=0 & (2) \end{cases}$

可知：此不等式组无解。

即不可能有这样的实数m，使方程$x^2-(m-2)x-(m-5)=0$的二实根成相反数。

从例一可以看出：解这类问题应该从二次项系数不等于0，判别式不小于0（大于0），根与系数的关系等几方面去考虑。

从例一还可以看出：在一根为正，一根为负（一根为0）的场合，因为从$x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}<0(=0)$，可得$\triangle=b^2-4ac>0$（$\geqslant 0$），所以此时判别式的符号可免去考虑。这对加快解题速度显然是十分有利的。特别要注意的是，不能误认为"由$x_1+x_2=0$必然可得二根或都为0或一个为正根另一个为负根，从而判别式必然不小于0，在解题过程中也可免去考虑"。上述最后一小题就是一个明显的反例。

例二：1）已知$x^2+x+K=0$与$x^2+Kx+1=0$有公共实根，求K。

解：设两个方程的公共实根为α，

则 $\begin{cases} \alpha^2+\alpha+K=0 & (1) \\ \alpha^2+K\alpha+1=0 & (2) \end{cases}$

由此可得：或$1-K=0$，即$K=1$；由于此时方程无实根，不合题意，所以舍去。

或$\alpha=1$，此时由韦达定理可知第二个方程的另一个根β也为1，所以$K=-(\alpha+\beta)=-2$

综上所述可得：$K=-2$．

2）确定实数P，使方程$x^2+Px-3=0$与方程$x^2=4x-(P-1)=0$有一个公共实根？并求此公根？

解：设两个方程的公共根为α，

$$\text{则}\begin{cases}\alpha^2+P\alpha-3=0 & (1)\\ \alpha^2-4\alpha-(P-1)=0 & (2)\end{cases}$$

解之可得：$P=-2$时$\alpha=3$．

所以，当$P=-2$时两个方程有公共实根；其公根为3．

从例二可以体会到：在两个方程有公共(实)根时，不妨先设公共实根为α，然后把α代入两个方程……。

例三：1）K是什么整数时，方程$(K^2-1)x^2-6(3K-1)x+72=0$有两个不相等的正整数根？

解：由题意首先可知：

$$\begin{cases}K^2-1\neq 0\\ \triangle=36(3K-1)^2-288(K^2-1)>0\end{cases}\quad \text{即}\begin{cases}K\neq\pm 1\\ K\neq 3.\end{cases}$$

$$\text{又}\because x=\frac{6(3K-1)\pm 6(K-3)}{2(K^2-1)}$$

$$\therefore\ x_1=\frac{12}{K+1},\qquad x_2=\frac{6}{K-1}$$

为了能使x_1，x_2都是正整数，需且仅需：

$$\begin{cases}0<K+1\leqslant 12,\text{且}K+1\text{能整除}12,\\ 0<K-1\leqslant 6,\text{且}K-1\text{能整除}6,\end{cases}$$

$\therefore K=2$或$K=3$（舍去）

综上所述可得：$K=2$时原方程有两个不等的正整数根。

2）如果x的二次方程$x^2-2ax+4a^2-6a=0$有两个整数解，求a。

解：由$\begin{cases}\triangle=6a-3a^2\geqslant 0\\ x_1+x_2=2a\text{是整数}\end{cases}$可得：$\begin{cases}8a(a-2)\leqslant 0\\ 2a\text{是整数}\end{cases}$

$\therefore$ $a=0$，$\frac{1}{2}$，1，$\frac{3}{2}$，2。

将其一一代入原方程，可知：

$a=0$，$\frac{1}{2}$，$\frac{3}{2}$，2时，原方程有两个整数解。

3）已知$12<m<60$，试求整数m使方程$x^2-2(m+1)x+m^2=0$有两个整数根。

解：要使一元二次方程有整数解，判别式必需是完全平方。

$\therefore$由$\begin{cases}12<m<60\\ \triangle=2m+1\text{是完全平方}\end{cases}$

可知$2m+1=36$，49，64，81，100。

将其一一代入原方程，可知：

$m=24$或$m=40$时原方程有两个整数解。

4）已知方程$ax^2-(a-3)x+a-2=0$至少有一整数解，求整数a。

解：1）当$a=0$时，原方程为$3x-2=0$。由于此时无整数解，所以$a=0$不是本题之解。

2）当$a\neq 0$时，由$\triangle\geqslant 0$。

可得：$\frac{1-2\sqrt{7}}{3}\leqslant a\leqslant\frac{1+2\sqrt{7}}{3}$

注意到a是整数，所以$a=-1$，1，2。将其一一代入原方程，可知：$a=-1$或$a=2$时原方程至少有一整数解。

从例三可以归纳出求（二次）方程整数解的规律：

①如果判别式本身是完全平方，且方程解的形式比较简单，可以直接从方程解本身来考虑，使其满足题意〔如例三中1）〕。

②如果判别式本身不是完全平方，那么可以先通过一些必需满足的条件(必要条件)来缩小所求字母的范围，然后通过检验来确定满足题意的答案。当然利用哪些必要条件来缩小所求字母的范围，要具体情况具体分析。

例如：例三中2)注意到一次项系数比常数项简单，所以用

$$\begin{cases}\triangle \geqslant 0 \\ x_1 + x_2\text{是整数}\end{cases} \quad (\text{不用}\begin{cases}\triangle \geqslant 0 \\ x_1 \cdot x_2 = 4a^2 - 6a\text{是整数}\end{cases})$$

来缩小a的范围。

例三中3)由于已知的m是整数，所以$x_1 + x_2 = 2(m+1)$是整数，($x_1 \cdot x_2 = m^2$是整数)并不能缩小m的范围；而利用判别式必需是完全平方(注意到$12 < m < 60$)能较方便地缩小m的范围。

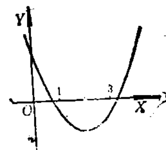
例三中4)利用韦达定理并不能方便地缩小a的范围；利用判别式必需是完全平方也不能轻松地缩小a的范围；而利用判别式必需不小于0(注意到a是整数)能简单地缩小a的范围。

(三)通过解题中的典型错误分析，来强调某些学生容易忽视的内容。

例一：试求图中所示的A点坐标(用a，b，c表示)

误解：$\because x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$，

$\therefore A$点坐标是$\left(\dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, 0\right)$。



错误分析：A点横坐标(的数值)固然应该比B点横坐标(的数值)小，$-b-\sqrt{b^2 - 4ac}$也确实小于$-b + \sqrt{b^2 - 4ac}$，但是本题由图形可知：$a < 0$。

$$\therefore \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} > \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

正解：$\because x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，又$\because a<0$，

$$\therefore \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} < \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

即A点坐标是$\left(\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ 0\right)$.

例二：求二次方程$x^2-ax+a^2-4=0$的实数a，使方程仅有一正根。

误解：因为方程仅有一正根，所以方程的另一根或为0或为负根。

$\therefore$由$x_1\cdot x_2=a^2-4=(a+2)(a-2)\leqslant 0$，可得：$-2\leqslant a\leqslant 2$.

错误分析：方程仅有一正根确实意味着另一根或为0或为负根。但是$x_1\cdot x_2\leqslant 0$并不能保证二根中一定有一正根（当$x_2=0$时，$x_1\leqslant 0$同样满足$x_1\cdot x_2\leqslant 0$）.

正解：1）如果一根为负，则$x_1\cdot x_2=(a+2)\cdot(a-2)<0$从而$-2<a<2$.

2）如果一根为0，则

$$\begin{cases} x_1>0 \\ x_1\cdot x_2=(a+2)\cdot(a-2)=0. \end{cases}$$

由于$a=-2$时，$x_1=-2<0$，$\therefore a=-2$舍去，

从而$a=2$.

综上所述可得：$-2<a\leqslant 2$.

读者可自行思考一下，本题如将要求改为：使方程至少有一正根，又该怎样来解？

例三：已知方程 $x^2+px+q=0$ 有两实根 p、q，求 p、q。

误解：由根的定义可得：

$$\begin{cases} p^2+p\cdot p+q=0 & (1) \\ q^2+p\cdot q+q=0 & (2) \end{cases}$$

(1)－(2)：$(p-q)\cdot(2p+q)=0$，$\therefore p=q$　(3)

或 $2p+q=0$　(4)

分别把(3)，(4)代入(1)，解之可得：

$$\begin{cases} p=0 \\ q=0 \end{cases} \text{或} \begin{cases} p=-\frac{1}{2} \\ q=-\frac{1}{2} \end{cases} \text{或} \begin{cases} p=1 \\ q=-2. \end{cases}$$

错误分析：由于根据(3)代入(1)解得的 p、q 之值，并不能保证方程 $x^2+px+q=0$ 的判别式等于0，所以上述之解有增根可能。事实上通过检验可知：

$$\begin{cases} p=-\frac{1}{2} \\ q=-\frac{1}{2} \end{cases}$$ 是增根，应舍去。

正解一：……(见误解中解法)，

把得到的三个解分别代入原方程检验可知：

$$\begin{cases} p=0 \\ q=0 \end{cases} \text{或} \begin{cases} p=1 \\ q=-2. \end{cases}$$

正解二：由判别式与韦达定理可得：

$$\begin{cases} \triangle\geqslant 0 \\ x_1+x_2=p+q=-p \\ x_1\cdot x_2=p\cdot q=q \end{cases}$$

解之得：$\begin{cases} p=0 \\ q=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} p=1 \\ q=-2. \end{cases}$

例四：已知$f(\theta)=a\sin^2\theta+2a\sin\theta+b\cos^2\theta$ $(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，$a\neq 0)$ 其中a、b是实数，试求满足$f(\theta)=0$的θ值的个数。

误解：$\because f(\theta)=(a-b)\cdot\sin^2\theta+2a\sin\theta+b$　　（1）

$$\triangle=(2a)^2-4(a-b)\cdot b=4(a^2+b^2-ab),$$

由a^2-ab+b^2的判别式大于0，可得：

$\triangle=4(a^2+b^2-ab)>0$.

$\therefore$总有两个不同的$\sin\theta_1$、$\sin\theta_2$能使$f(\theta_1)=0$，$f(\theta_2)=0$.即满足$f(\theta)=0$的θ值共有2个。

错误分析：实系数一元二次方程在判别式大于0时，有两个不同的实根的结论，是在未知数可取一切实数时成立！本题判别式虽大于0，但由于未知数($\sin\theta$)只能在〔－1、1〕中取值，所以，其两个解不一定在〔－1、1〕上。即本题不能由$\triangle>0$就可得到总有两个不同的$\sin\theta_1$、$\sin\theta_2$能使$f(\theta_1)=0$，$f(\theta_2)=0$.

正解：设$\sin\theta=t$，则(1)式可写为：

$F(t)=(a-b)t^2+2at+b$　$(-1\leqslant t\leqslant 1$，$a\neq 0)$.

$\because F(1)\cdot F(-1)=(a-b-2a+b)\cdot(a-b+2a+b)$

$=-3a^2<0$

$\therefore$方程$F(t)=0$只有一个根t_1(由抛物线是连续的图形，顶点是递增，递减的分界点，可知：使其函数值符号相反的自变量之间，有且仅有一自变量的值能使其函数值为0)。

从而只有一个θ值能使$f(\theta)=0$.

例五：已知二次函数$y=(lga)x^2+2x+4lga$的最大值为0，求a.

误解：由题意可得：$\dfrac{4\cdot lga\cdot 4lga-4}{4\cdot lga}=0$

$\therefore lga=\frac{1}{2}$或$lga=-\frac{1}{2}$。即 $a=\sqrt{10}$或 $a=\frac{\sqrt{10}}{10}$

错误分析：上述的解法实际上只反映出二次函数的极值为0，现在题中要求的是最大值，所以还需加上二次项系数小于0的条件。

正解：由题意可得：

$$\begin{cases} lga<0 \\ \dfrac{4\,lga\cdot 4\,lga-4}{4\,lga}=0, \end{cases}$$

$$\therefore lga=-\frac{1}{2}.$$

$$\text{即 } a=\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

例六：实数K为何值时，方程$x^2+2(K+3)x+2K+4=0$的两根均小于3？

误解：设一根为x_1，另一根为x_2。

$\because x_1<3$，$x_2<3$，

$\therefore x_1+x_2<6$，$x_1\cdot x_2<9$。

从而由 $\begin{cases} \triangle=4(K^2+4K+5)\geqslant 0 \\ -2(K+3)<6 \\ 2K+4<9. \end{cases}$

解之可得：$-6<K<\frac{5}{2}$。

错误分析：从$x_1<3$，$x_2<3$，确实能得到$x_1+x_2<6$，但不一定有$x_1\cdot x_2<9$；从$\begin{cases} x_1+x_2<6 \\ x_1\cdot x_2<9 \end{cases}$也不一定能得到$x_1<3$，$x_2<3$（例如：$x_1=-1$，$x_2=5$）。

正解：设一根为x_1，另一根为x_2。

$\because x_1<3$，$x_2<3$，