

Computer-
Aided
Analysis
电子线路的计算机辅助分析:

Algorithm and Computational
Techniques
算法和计算技术

下册
Analysis

[美] 蔡少棠 林本铭 著
黄安山 主译

庄镇泉 戴英侠 王荣生 校
Of Electronic

Circuits :

Algorithms &

Computational

Techniques

上海機械學院

电子线路的计算机辅助分析: 算法和计算技术

下 册

[美] 蔡少棠 林本铭 著

黄安山 主译

庄镇泉 戴英侠 王荣生 校

上海機械學院

**电子线路的计算机辅助分析：
算法和计算技术**

下 册

〔美〕蔡少棠 林本铭 著

黄安山 主译

庄镇泉 戴英侠 王荣生 校

上海机械学院印刷厂印刷

开本 787×1092 1/16 印张 22 字数 628,000

1984年9月第1版 1984年9月第1次印刷

印数 1~3000

内部使用 工本费 2.85元

中 文 版 序

晚近三十余年来，在电机工程各项进展中，对人类日常生活最有影响者莫过于微电子电路与计算机。由于集成电路制造技术之突飞猛进，电子线路之体积愈变愈小，而其内部之结构则愈趋复杂。此种电路之设计与分析，如果不用计算机辅助，专靠人力计算是无法完成的。“计算机辅助电路分析”这一门新兴学问即为达成上述目的而极受重视。关于这一门学问的专门论文，已多至车载斗量，但欲求一深入浅出，对全盘作有系统介绍的书籍，则如凤毛麟角，是为本书著作之缘由。本书之陈述次序，以及章节之选用办法，均见原序，兹不赘述。

本书之俄文本及波兰文本已分别于1980年及1981年问世，今又得以著者之母语与读者见面，著者深感欣慰。中文本系由黄安山主译。著者在此谨向所有参加翻译工作之人员，表示谢意。中文本系根据1980年英文本第二版，在英文本第一版中所发现之若干误植，均已更正。

如果此书之中文本能有助于电子专业人员之探窥门径，或因此而更求深入堂奥，使科技研究普遍生根，则著者之愿望就达到了。

蔡少棠于美国柏克莱加州大学

林本铭于美国普渡大学

一九八三年

本书译自美国柏克莱加州大学蔡少棠教授和美国普渡大学林本铭教授所著“Computer-Aided Analysis of Electronic Circuits: Algorithms & Computational Techniques”一书(1980年第2版)。著者特为中译本作了序言,在翻译过程中,承林本铭教授的热情关注并给予了指导。

中译本分上册(序言、1—8章)、和下册(9—17章、索引),上册由北京大学陆钟辉、上海机械学院肖杰生、上海640研究所钟兆文三位同志校。下册由中国科技大学庄镇泉、戴英侠、王荣生三位同志校。

上海柴油机厂沈岳祥同志和上海机械学院陈离同志分别提供了第2、11、12章和第6章的译稿。

肖杰生同志为本书的出版起了很大的促进作用,谨此致谢。

由于译者水平限制,肯定存在不少错误,深望读者不吝指教。

黄安山于上海机械学院

一九八三年

下 册 目 录

第九章 线性动态网络状态方程的数值解	(319)
9—1 状态方程的时域解	(319)
9—1—1 变参法	(319)
9—1—2 e^{At} 的一些性质	(320)
9—1—3 状态方程的解	(322)
9—2 转换成差分方程	(323)
9—3 e^{At} 的计算	(326)
9—4 瞬态响应计算的一个完整例子	(328)
9—5 状态方程的频域解	(331)
9—5—1 Souriau-Frame 算法	(332)
9—5—2 传递函数作为特征值问题	(334)
*9—6 QR 算法	(338)
9—6—1 QR 算法的实质	(339)
9—6—2 化为 Hessenberg 矩阵	(342)
9—6—3 QU 因式分解	(344)
9—6—4 用 QR 算法计算特征值的数值实例	(347)
9—6—5 原点的移位	(348)
第十章 用计算机建立非线性动态网络的状态方程	(354)
10—1 引言	(354)
10—2 非线性动态网络范式方程的存在性	(354)
10—3 用拓扑方法建立非线性动态网络的状态方程	(360)
10—3—1 关于许用网络类别的常规假设	(361)
10—3—2 步骤 1: 混合 m 端口 $\hat{N}$ 的形成和表征	(363)
10—3—3 步骤 2: 解非线性电阻性子网络	(371)
10—3—4 步骤 3: 解 C - E 回路和 L - J 割集	(373)
10—3—5 步骤 4: 最后一部分工作	(374)
10—3—6 确定非状态变量的拓扑方程	(382)
10—4 对既不包含 C - E 回路也不包含 L - J 割集的网络建立状态方程—— 特别法	(383)

*10—5 状态变量的选择	(385)
第十一章 非线性动态网络状态方程的数值解	(393)
11—1 解的存在及唯一性	(393)
11—2 初值问题数值解的误差考虑	(398)
11—3 用泰勒级数展开式求数值解	(399)
11—3—1 一阶泰勒算法: 正向欧拉算法	(403)
11—3—2 二阶泰勒算法	(403)
11—3—3 三阶泰勒算法	(404)
11—4 龙格-库塔算法	(405)
11—4—1 二阶龙格-库塔算法	(405)
11—4—2 四阶龙格-库塔算法	(406)
11—5 用多项式逼近求数值解	(407)
11—5—1 数值积分公式的局部截断误差	(409)
11—5—2 用预测-校正公式的隐式算法	(414)
11—5—3 多步数值积分算法的起步方法	(417)
*11—6 预测-校正算法的规范矩阵表示法	(417)
*11—7 预测-校正算法的等价规范矩阵表示法	(423)
11—7—1 用反向差分向量表示法的预测-校正算法	(424)
11—7—2 用 Nordsieck 向量表示法的预测-校正算法	(426)
第十二章 多步数值积分算法	(436)
12—1 对多步算法的精确性约束	(436)
12—2 Adams-Bashforth 算法	(438)
12—3 Adams-Moulton 算法	(441)
12—4 误差传播分析——实例研究	(444)
12—5 多步算法的稳定性	(447)
12—6 多步算法的收敛性	(452)
*12—7 选择最佳阶和最佳步长的方法	(452)
12—7—1 变阶	(454)
12—7—2 变步长	(454)
*12—8 阶和步长的自动控制	(458)
12—8—1 自动变阶和变步长的算法	(459)
第十三章 用隐式算法求解由刚性状态方程表征的网络	(465)
13—1 绝对稳定区	(465)
13—1—1 确定绝对稳定区的方法	(466)
13—1—2 显式 Adams-Bashforth 算法的绝对稳定区	(468)

13—1—3	隐式 Adams-Moulton 算法的绝对稳定区	(470)
13—1—4	Adams-Bashforth 和 Adams-Moulton 算法绝对 稳定区之比较	(472)
13—2	刚性状态方程介绍	(472)
13—3	解刚性状态方程所希望的绝对稳定区	(475)
13—4	Gear 强稳定算法的推导	(478)
*13—5	Gear 算法的校正迭代	(483)
第十四章 生成符号网络函数的算法		(495)
14—1	引言	(495)
14—2	信号流图 (SFG) 法	(497)
14—2—1	信号流图和 Mason 法则	(497)
14—2—2	信号流图的形成	(501)
14—2—3	列举路径和回路	(504)
14—2—4	列举一阶和 n 阶回路	(506)
14—2—5	信号流图法中的符号处理	(510)
14—3	树-列举法	(512)
14—3—1	用 Y_n 的行列式和余子式表示的网络函数	(512)
14—3—2	分类方案	(513)
14—3—3	不定导纳矩阵及其图	(514)
14—3—4	从 G_d 的有向树得到的节点行列式	(516)
*14—4	参数提取法	(519)
14—4—1	参数提取定理	(519)
14—4—2	一个完整的例题	(520)
14—4—3	引申和进一步评述	(522)
	附录 14A 求所有路径的一种算法	(523)
第十五章 频域和时域灵敏度计算		(532)
15—1	引言	(532)
15—2	增量网络法	(533)
15—3	伴随网络法	(540)
15—3—1	特勒根定理	(540)
15—3—2	伴随网络	(543)
15—3—3	使用伴随网络计算灵敏度	(548)
15—4	符号网络函数法	(556)
*15—5	时域灵敏度计算	(559)
15—6	用伴随网络法计算误差梯度	(566)
15—6—1	具有恒定激励的线性电阻性网络	(566)

*15—6—2	线性动态网络误差梯度的计算——频域情况	(568)
*15—6—3	线性动态网络误差梯度的计算——时域情况	(570)
15—7	非线性电阻性网络的灵敏度计算	(572)
第十六章	电路分析的稀疏矩阵技术介绍	(581)
16—1	引言	(581)
16—2	方程排序的影响	(583)
16—3	在 LU 因式分解中填项的确定	(586)
16—4	近佳排序算法	(591)
*16—5	结构对称矩阵的编程方法	(594)
16—5—1	非零元素的存储	(595)
16—5—2	LU 因式分解和 $LUx = \mu$ 的解	(597)
*16—6	最佳 Crout 算法	(604)
附录 16A	SPARSE 程序清单	(609)
第十七章	适用于计算机模拟程序的先进算法和计算技术	(613)
17—1	通用的伴生离散电路模型法	(613)
17—1—1	电容器的通用的伴生离散电路模型	(613)
17—1—2	电感器的通用的伴生离散电路模型	(615)
17—1—3	将动态网络变换成一个通用的伴生离散电阻性网络	(617)
17—2	表格法	(619)
17—3	解隐式微分-代数方程组的变步长变阶算法	(622)
17—3—1	推导反向差分公式 (BDF)	(624)
17—3—2	预测牛顿-拉夫逊迭代的初猜值	(627)
17—3—3	反向差分公式的局部截断误差	(630)
17—3—4	用反向差分表示的反向差分公式	(631)
17—3—5	变步长变阶反向差分公式的算法	(632)
17—4	变阶变步长的通用表格法	(633)
17—5	确定非线性电路在非周期输入时稳态周期解的算法	(635)
17—5—1	用公式表示定点问题	(636)
17—5—2	用数值微分法求雅可比矩阵 $F'(x_0^{(i)})$ 之值	(638)
17—5—3	用灵敏度网络的瞬态分析求雅可比矩阵 $F'(x_0^{(i)})$ 之值	(639)
17—5—4	迭代算法的收敛	(645)
17—6	确定非线性振荡器稳态周期解的算法	(646)
17—7	非线性通讯电路的频谱分析和失真分析	(650)
17—7—1	准线性通讯电路的失真分析	(651)
17—7—2	用扰动法的低失真分析	(651)
索引		(665)

第九章 线性动态网络状态方程的数值解

在第八章中，我们详细描述了如何建立线性动态网络以方程(8—4)和(8—5)表示的状态方程。为方便起见，将这两个方程重复如下：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (9-1)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} + (\mathbf{D}_1\dot{\mathbf{u}} + \dots) \quad (9-2)$$

正如(8—1)节指出的那样，选择状态变量法的一个重要理由是，它适合于数字计算机求解。在这一章中，我们将说明如何应用某些巧妙的数值方法求得方程(9—1)和(9—2)的解。时域和频域两个方面的问题本章都将予以考察。

9-1 状态方程的时域解

给定一个特性由方程(9—1)和(9—2)表征的线性动态网络，初始状态 $\mathbf{x}(t_0)$ 以及 $t \geq t_0$ 时的输入为 $\mathbf{u}(t)$ 。我们希望求得 $t \geq t_0$ 时的输出 $\mathbf{y}(t)$ 。因为此解要用数值方法求得，所以 $\mathbf{x}(t)$ 和 $\mathbf{y}(t)$ 仅为 t 的某些离散值，例如

$$t = t_0, t_0 + T, t_0 + 2T, \dots$$

所确定。式中 T 是某一选定的“时间步长”。输入 $\mathbf{u}(t)$ 可以用显式表示为 t 的函数，或者仅用取样数据的形式给出。

显然，问题的关键是要求解方程(9—1)；这是我们将要致力解决的问题。我们首先通过变参法回顾一阶线性微分方程的解。随后进而讨论矩阵指数的某些重要性质，这样我们就能以完全类似的方式求得方程(9—1)的解。〔事实上，这是以方程(9—1)的形式写出运动方程的一大优点。〕

9—1—1 变参法

已知一阶线性微分方程

$$\dot{x} = ax + bu \quad (9-3)$$

和 $x(t_0)$ ，对于 $t \geq t_0$ 有许多求 $x(t)$ 的方法，这里将使用变参法。

首先考察 $u(t) = 0$ 这一特殊情况，这时方程(9—3)是齐次的。于是通解很容易表示为

$$x(t) = e^{at}K \quad (9-4)$$

式中 K 是一个任意常数。〔我们写成 $e^{at}K$ 而不写成比较惯用的 Ke^{at} ，这是为了表明这一节的

方程和9—1—3节的那些方程之间有惊人的相似之处。)

对于 $u(t) \neq 0$ 的情况, 我们试图令 K 是 t 的函数, 使

$$x(t) = e^{At}K(t) \quad (9-5)$$

由此求得方程(9—3)的解。因为假定式(9—5)是方程(9—3)的一个解, 所以我们将式(9—5)及其导数代入方程(9—3), 得到

$$ae^{At}K(t) + e^{At}\dot{K}(t) = ae^{At}K(t) + bu(t) \quad (9-6)$$

因此,

$$\begin{aligned} \dot{K}(t) &= (e^{At})^{-1}bu(t) \\ &= e^{-At}bu(t) \end{aligned} \quad (9-7)$$

从 $t=t_0$ 到 t 积分方程(9—7)的两边, 我们有:

$$\int_{t_0}^t \dot{K}(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t e^{-A\tau}bu(\tau) d\tau \quad (9-8)$$

或

$$K(t) = \int_{t_0}^t e^{-A\tau}bu(\tau) d\tau + K(t_0) \quad (9-9)$$

根据式(9—9)和(9—5), 我们有

$$x(t) = e^{At} \left[\int_{t_0}^t e^{-A\tau} bu(\tau) d\tau + K(t_0) \right] \quad (9-10)$$

为了确定 $K(t_0)$, 我们在式(9—5)中令 $t=t_0$

$$x(t_0) = e^{At_0}K(t_0)$$

或

$$K(t_0) = e^{-At_0}x(t_0) \quad (9-11)$$

因此, 方程(9—3)的解是

$$x(t) = e^{At} \int_{t_0}^t e^{-A\tau} bu(\tau) d\tau + e^{A(t-t_0)} x(t_0) \quad (9-12)$$

9—1—2 e^{At} 的一些性质

一个线性方程 $ax=k$ 的解可以表示为 $x=a^{-1}k$ 。同样, 一组联立方程 $Ax=k$ 的解也可以表示为 $x=A^{-1}k$ 。在两种情况中的解, 除了从标量变为矩阵外, 恰好具有相同的形式。然而, 因为矩阵乘法一般不符合交换律(一般 $AB \neq BA$), 所以务必按各矩阵原有的次序排列。例如, 在标量方程中, 我们可以将此解写成 $x=a^{-1}k$ 或 $x=ka^{-1}$, 而在矩阵方程中我们只能写成 $x=A^{-1}k$, 而不能写成 $x=kA^{-1}$ 。

为了以类似于9—1—1节描述的方式求得方程(9—1)的解, 我们必须定义 e^{At} 并且研究其某些基本性质。原来 e^{At} 和 e^{-At} 有许多(但不是所有的)性质是共同的。因此, 稍许费力便可

熟悉 e^{At} 的性质。

矩阵指数 e^{At} ，其中 A 是一个 n 阶常方阵，可定义为下列无穷级数：

$$e^{At} = 1 + At + \frac{1}{2!} (At)^2 + \dots + \frac{1}{n!} (At)^n + \dots \quad (9-13)$$

可以证明，此无穷级数对于所有 t 值收敛 $[1]$ 。由式(9-13)， e^{At} 是一个 n 阶方阵，其元素是 t 的函数。

例题9-1。如果 $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ ，则

$$\begin{aligned} e^{At} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} t + \frac{1}{2!} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}^2 t^2 + \dots \\ &= \begin{bmatrix} 1 + at + \frac{1}{2!} (at)^2 + \dots & 0 \\ 0 & 1 + bt + \frac{1}{2!} (bt)^2 + \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{bt} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

例题9-2。如果 $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -b & 0 \end{bmatrix}$ ， $a > 0$ 和 $b > 0$ ，则

$$A^{n+2} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a \\ -b & 0 \end{bmatrix} A^n = -ab A^n$$

因此，我们有

$$\begin{aligned} e^{\begin{bmatrix} 0 & a \\ -b & 0 \end{bmatrix} t} &= 1 + At + \frac{1}{2!} (At)^2 + \frac{1}{3!} (At)^3 + \dots \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ 1 - \frac{abt^2}{2!} + \frac{1}{4!} a^2 b^2 t^4 - \frac{1}{6!} a^3 b^3 t^6 + \dots \right\} \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 & a \\ -b & 0 \end{bmatrix} \left\{ t - \frac{1}{3!} abt^3 + \frac{1}{5!} a^2 b^2 t^5 - \dots \right\} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \cos \sqrt{abt} + \begin{bmatrix} 0 & a \\ -b & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{ab}} \cdot \sin \sqrt{abt} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \sqrt{abt} & \sqrt{\frac{a}{b}} \sin \sqrt{abt} \\ -\sqrt{\frac{b}{a}} \sin \sqrt{abt} & \cos \sqrt{abt} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

通常，把式(9-13)中各项加起来得到闭式 e^{At} 的元素是非常困难的。然而，如果把 t 定为

常数 $t = T$, 那么式 (9—13) 是计算 e^{At} 的一种非常实用的方法 (见 9—3 节)。

我们将解方程 (9—1) 需要的 e^{At} 的某些重要性质列出如下:

性质 1.
$$e^{A0} = 1. \quad (9-14)$$

性质 2.
$$e^{At} \cdot e^{Bt} = e^{(A+B)t}, \text{ 当且仅当 } AB = BA. \quad (9-15)$$

性质 3.
$$[e^{At}]^{-1} = e^{-At}. \quad (9-16)$$

性质 4.
$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} = e^{At} A. \quad (9-17)$$

性质 5.
$$\int_0^t e^{A\tau} d\tau = A^{-1}(e^{At} - 1) \quad (9-18)$$

$$= (e^{At} - 1) A^{-1}, \text{ 如果 } A \text{ 是非奇异的.}$$

在式 (9—13) 中, 令 $t=0$ 可以直接得到式 (9—14)。式 (9—15) 可以通过把所有矩阵指数展开成无穷级数后加以证明 (见习题 9—1)。式 (9—16) 可以从式 (9—15) 导出。式 (9—17) 可由微分式 (9—13) 的两边然后从无穷级数中提取因子 A 得到。式 (9—18) 则是式 (9—17) 的直接结果

9—1—3 状态方程的解

我们现在已经有了求解方程 (9—1) 所需的一整套方法。有趣的是要注意到, 除了从标量符号变为矩阵符号外, 下述推导恰好是 9—1—1 节推导的重复。

$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ 的通解是

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{K} \quad (9-19)$$

式中 $\mathbf{K}$ 是一个具有常数元素的任意的 $n \times 1$ 向量。这一论断可用性质 4 证明:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt}(e^{At}\mathbf{K}) = \mathbf{A}e^{At}\mathbf{K} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

对于方程 (9—1), 我们试图令 $\mathbf{K}$ 是 t 的函数, 使

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{K}(t) \quad (9-20)$$

由此求得方程的一个解。将式 (9—20) 代入方程 (9—1), 并利用式 (9—17), 我们有

$$\mathbf{A}e^{At}\mathbf{K}(t) + e^{At}\dot{\mathbf{K}}(t) = \mathbf{A}e^{At}\mathbf{K}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (9-21)$$

根据式 (9—21) 和 (9—16), 我们有

$$\dot{\mathbf{K}}(t) = e^{-At}\mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (9-22)$$

从 $t = t_0$ 到 t 积分式 (9—22), 我们有

$$\int_{t_0}^t \dot{\mathbf{K}}(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t e^{-A\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (9-23)$$

或

$$\mathbf{K}(t) = \int_{t_0}^t e^{-A\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau + \mathbf{K}(t_0) \quad (9-24)$$

于是, 根据式 (9—24) 和 (9—20),

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{\Lambda t} \left[\int_{t_0}^t e^{-\Lambda \tau} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau + \mathbf{K}(t_0) \right] \\ \mathbf{x}(t_0) &= e^{\Lambda t_0} \mathbf{K}(t_0) \end{aligned} \quad (9-25)$$

或

$$\mathbf{K}(t_0) = e^{-\Lambda t_0} \mathbf{x}(t_0) \quad (9-26)$$

因此, 方程 (9—1) 的解是

$$\mathbf{x}(t) = e^{\Lambda t} \int_{t_0}^t e^{-\Lambda \tau} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau + e^{\Lambda(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) \quad (9-27)$$

把式 (9—27) 代入方程 (9—2), 我们得到

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} e^{\Lambda(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \left\{ \mathbf{C} e^{\Lambda t} \int_{t_0}^t e^{-\Lambda \tau} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau + \mathbf{D} \mathbf{u}(t) + \mathbf{D}_1 \dot{\mathbf{u}}(t) + \dots \right\} \quad (9-28)$$

式 (9—28) 中的第一项是固有响应或零输入响应; 第二项是强迫响应或零状态响应。

9-2 转换为差分方程

虽然式 (9—27) 是方程 (9—1) 的精确解, 但它不是以适合于数字处理的形式表示的。用数字计算机, 我们只能对 t 的某些离散值计算 $\mathbf{x}(t)$ 。通常, 我们计算 $t = kT$ 时的 $\mathbf{x}(t)$, 式中 k 是一个整数而 T 是一个合适选定的时间间隔。因为假定输入 $\mathbf{u}(kT)$ 对于所有 k 是已知的, 所以我们需要的是一个有关 $\mathbf{x}[(k+1)T]$ 和 $\mathbf{u}(kT)$ 及 $\mathbf{x}(kT)$ 的方程。这样一个方程是差分方程的特殊情况。差分方程一经求得, 对于所有 k 的 $\mathbf{x}(kT)$ 就可以相继计算出来。例如, 如果

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[(k+1)T] &= \frac{1}{2} \mathbf{x}(kT) + \mathbf{u}(kT) \\ \mathbf{u}(kT) &= \left(\frac{1}{4}\right)^k, \text{ 对所有 } k \\ \mathbf{x}(0) &= 1 \end{aligned} \quad (9-29)$$

则根据 $\mathbf{x}(0) = 1$ 和 $\mathbf{u}(0) = 1$, 按式 (9—29) 我们有 $\mathbf{x}(T) = 3/2$ 。其次, 根据 $\mathbf{x}(T) = 3/2$ 和 $\mathbf{u}(T) = 1/4$, 我们有 $\mathbf{x}(2T) = 3/4 + 1/4 = 1$ 。对于 $k = 1, 2 \dots$ 继续此过程。

我们现在将说明将式 (9—27) 转换为差分方程的两种基本方法。因为我们的起点是式 (9—27), 所以其结果仅适用于线性定常网络。将非线性网络的状态方程转换成差分方程的方法将在第十一章和第十二章讨论。通过差分方程对 $\mathbf{x}(kT)$ 进行计算是数值积分的一种形式, 其细节可在论述数值分析的许多教科书里找到 [2]。

在式 (9—27) 中, 令 $t_0 = kT$ 和 $t = (k+1)T$; 我们有

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = e^{\Lambda T} \mathbf{x}(kT) + e^{\Lambda(k+1)T} \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-\Lambda \tau} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (9-30)$$

对于下列特殊情况, 可以对式 (9—30) 的积分精确求值。

情况1. $u(t)$ 是分段常数, 使得

$$u(t) = u(kT), \text{ 对于 } kT \leq t < (k+1)T, k=0, 1, 2, \dots \quad (9-31)$$

这样一种强制函数的实例示于图9-1(a)。于是, 使用式(9-18), 我们有

$$\begin{aligned} \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau &= \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-A\tau} d\tau \cdot B u(kT) \\ &= [-e^{-A\tau}]_{kT}^{(k+1)T} \cdot A^{-1} B u(kT) \\ &= [-e^{-A(k+1)T} + e^{-AkT}] \cdot A^{-1} B u(kT) \end{aligned}$$

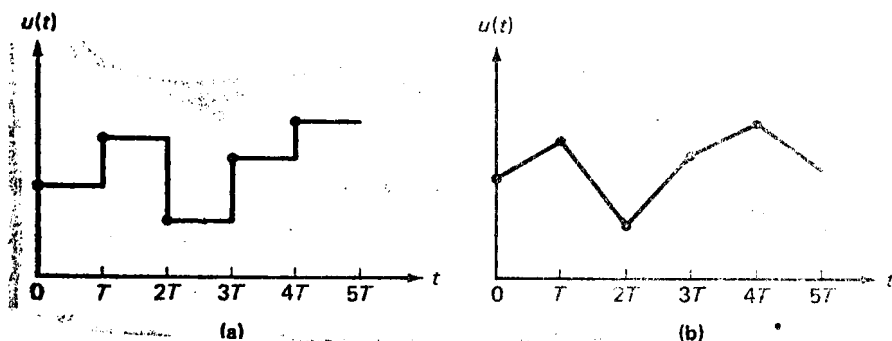


图 9-1 分段-常数函数和分段-线性函数

因此, 式(9-30)变成

$$x[(k+1)T] = e^{AT} x(kT) + [e^{AT} - 1] A^{-1} B \cdot u(kT) \quad (9-32)$$

上式即所求的差分方程。方程(9-32), 实际上是一个递归公式, 在数字计算机上很容易编成程序。首先, 式(9-32)中 A^{-1} 的存在似乎要求 A 是非奇异的。但并不是这种情况, 因为实际上我们是通过把无穷级数(9-13)的许多项相加来计算 e^{AT} 的。因此,

$$\begin{aligned} [e^{AT} - 1] A^{-1} &= \left[\left(1 + AT + \frac{1}{2} A^2 T^2 + \dots \right) - 1 \right] A^{-1} \\ &= 1 \cdot T + \frac{1}{2!} A T^2 + \frac{1}{3!} A^2 T^3 + \dots \end{aligned} \quad (9-33)$$

请注意, 在式(9-33)中不必计算 A^{-1} 。

情况2. $u(t)$ 是连续的并且是分段线性的, 使得

$$u(t) = u(kT) + \frac{u[(k+1)T] - u(kT)}{T} (t - kT) \quad (9-34)$$

对于 $kT \leq t \leq (k+1)T, k=0, 1, 2, \dots$ 。这样一种强制函数的实例示于图9-1(b)。

把式(9-34)代入式(9-30)中, 经过一些变换后我们得到下列结果(细节留作练习, 见习题9-2):

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = \mathbf{F}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{G}\mathbf{u}(kT) + \mathbf{H}\mathbf{u}[(k+1)T]$$

(9-35)

式中

$$\mathbf{F} = e^{\mathbf{A}T} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\mathbf{A}T)^n$$

$$\mathbf{G} = [\mathbf{e}^{\mathbf{A}T}(-\mathbf{I} + \mathbf{A}T) + \mathbf{I}](\mathbf{A}^2T^2)^{-1}\mathbf{B}T$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+2)} (\mathbf{A}T)^n \cdot \mathbf{B}T$$

$$\mathbf{H} = [\mathbf{e}^{\mathbf{A}T} - \mathbf{I} - \mathbf{A}T](\mathbf{A}^2T^2)^{-1}\mathbf{B}T$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} (\mathbf{A}T)^n \cdot \mathbf{B}T$$

式(9-32)和式(9-35)仅对强制函数 $\mathbf{u}(t)$ 的某些特殊情况提供 $\mathbf{x}(kT)$ 的精确解。一般说来,如果 $\mathbf{u}(t)$ 是连续的,则式(9-32)和式(9-35)给出 $\mathbf{x}(kT)$ 的近似解。因为误差来源在于用式(9-31)或式(9-34)逼近原始强制函数,分别如图9-2(a)和(b)所示,所以很明显,使用较小的时间步长 T 误差可减小。比较小的 T 意味着计算机运算时间较长。这样一种变通办法在解微分方程的每一种数值方法中都采用。同样,从图9-2可见,作为对原始连续函数的近似,式(9-34)比式(9-31)要好。

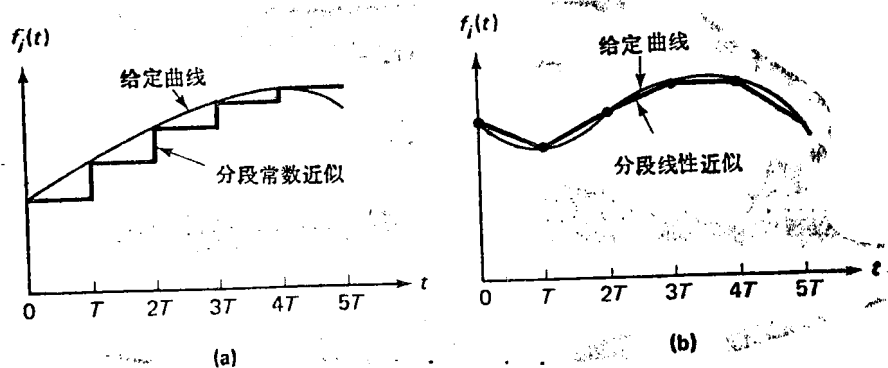


图 9-2 用分段-常数或分段-线性曲线逼近连续曲线

到此为止,我们仅考虑了当强制函数 $\mathbf{u}(t)$ 是分段-常数函数或分段-线性函数时式(9-30)的精确积分。通过假定 $\mathbf{x}(t)$ 或式(9-30)中的被积函数为分段常数、分段线性的或分段抛物线的,我们也能得到一个近似的差分方程。现将这些近似差分方程归纳如下。它们的推导留作练习[见习题9-3到9-8。也见第十一和十二章]。

1. 假定 $\mathbf{x}(t)$ 为分段常数;即,在图9-2(a)中 $f_i(t) = \mathbf{x}_i(t)$ 。其结果是通常所谓的正向欧拉公式:

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = (\mathbf{I} + \mathbf{A}T)\mathbf{x}(kT) + T\mathbf{B}\mathbf{u}(kT) \quad (9-36)$$

注意到如果我们使用 $e^{\mathbf{A}T} \cong \mathbf{I} + \mathbf{A}T$ 作为 $e^{\mathbf{A}T}$ 的非常粗略的近似式,则式(9-32)化

为式(9-36)。

2. 假定 $\dot{x}(t)$ 是分段线性的, 即: 在图9-2(b)中 $f_1(t) = \dot{x}_1(t)$ 。其结果通常称为梯形公式:

$$\begin{aligned} x[(k+1)T] = & \left(1 - \frac{T}{2}A\right)^{-1} \left(1 + \frac{T}{2}A\right)x(kT) \\ & + \left(1 - \frac{T}{2}A\right)^{-1} \frac{T}{2} \cdot B[u(kT) + u(kT+T)] \end{aligned} \quad (9-37)$$

3. 假定式(9-30)中的被积函数

$$f(t) = e^{-At}Bu(t)$$

是分段常数, 如图9-2(a)所示。我们得到

$$x[(k+1)T] = e^{AT}x(kT) + e^{AT} \cdot T Bu(kT) \quad (9-38)$$

4. 假定式(9-30)中的被积函数是分段线性的, 如图9-2(b)所示。我们得到

$$x[(k+1)T] = e^{AT}x(kT) + e^{AT}B \frac{T}{2} u(kT) + B \frac{T}{2} u[(k+1)T] \quad (9-39)$$

5. 假定式(9-30)中的被积函数是 t 的二次多项式。在这样一种假设下的积分求值导致辛卜生法则(细节见习题9-8)。我们得到

$$\begin{aligned} x[(2n+2)T] = & e^{2AT}x(2nT) + e^{2AT} \cdot \frac{T}{3} Bu(2nT) \\ & + e^{AT} \cdot \frac{4}{3} T Bu[(2n+1)T] + \frac{T}{3} Bu[(2n+2)T] \end{aligned} \quad (9-40)$$

注意到在式(9-40)中, 每隔 T 秒需要 $u(t)$, 而每隔 $2T$ 计算 $x(t)$ 。

在接下来讲述计算 e^{AT} 的问题以后, 我们将在9-4节考察与这些公式有关的精度和稳定性问题。

9-3 e^{AT} 的计算

在9-2节中, 我们给出了几种把状态方程(9-1)转换成近似差分方程的方法。矩阵 e^{AT} 在上述几种差分方程中已经出现。文献中有很多将 e^{At} , 线性定常系统状态转移矩阵, 作为闭式中 t 的函数的计算方法[3]。当然人们可以首先计算 e^{At} , 然后令 $t=T$ 来求得 e^{AT} 。当使用数字计算机时此法未必复杂。因为我们实际上只对某一特定 t 值时的 e^{At} 感兴趣, 所以使用 e^{AT} 的级数展开要容易得多。我们用式(9-13)前面的 $(k+1)$ 项逼近 e^{AT} :

$$e^{AT} \cong 1 + AT + \frac{1}{2!}(AT)^2 + \cdots + \frac{1}{K!}(AT)^K \triangleq M = [m_{ij}] \quad (9-41)$$

于是误差矩阵 R 可由式(9-13)和(9-41)之差表示为