理科数学

欧维义 编

TESHU HANSHU JI QI YING YONG

特殊函数及其应用

吉林大学出版社

特殊函数及其应用

欧维义　编

吉林大学出版社

特殊函数及应其用

欧维义　编

*

吉林大学出版社出版　吉林大学印刷厂印刷
吉林省新华书店发行
850×1168　大32开　9.125印张　226 000字
1988年4月第1版　　1988年年月第1次印刷
印数　1—3 000册

*

ISBN 7-5601-0092-9/O·19

定价：1.80元

出 版 说 明

根据教学需要，我们出版了这套《吉林大学本科生教材》，这套教材适合高等学校本科生基础课或选修课的教学，由我社逐年陆续出版。

吉林大学出版社

序

本书是根据编者为吉林大学数学系力学专业、理科物理、化学各专业所开设的数学物理方法课程而编写的《特殊函数及其应用》讲义修改而成。同属于数学物理方法课程内容的，还有《数学物理方程》(1985年由吉林科学技术出版社出版)和《复变函数论》（1987年由吉林大学出版社出版）。

本书的内容包括：第一，很细致地讲述了勒让德多项式，球函数，第一类、第二类贝塞尔函数，厄密多项式、拉革尔多项式的来源及其应用；第二，简要地介绍了有关斯特姆-刘维尔问题的名称、概念和主要结果；第三，对进一步学习和理解特殊函数内容特别有用的结论和定理的证明，作为附录写在第七章。

本书采用这样的结构，具有实用、思路清晰、中心突出的优点。同时也能适应不同学时，不同层次的教学需要，既便于课堂教学又适合于自学。

本书在编写过程中，得到王柔怀教授的指导，并得到陈维钧、高玉环、王　毅、卢喜观、金德俊等同志的帮助。在此，谨向他们致以谢意。

本书中不妥之处，谨请读者指正。

编者

1987年12月于吉林大学

目　　录

第一章　Γ-函数和B-函数

Γ-函数（Gamma 函数）Γ(z)和 B-函数（Beta 函数）B(p,q)，是最简单而又重要的特殊函数，它的许多性质是研究其它特殊函数的基础。

§1　Γ-函数及其基本性质

1.1　含复参变量广义积分确定的函数的解析性

在讨论Γ-函数Γ(z)和 B-函数 B(p,q) 的性质时，要用到下面的定理。

定理1.1　设

1）　D是z平面上的一个区域；

2）　$f(t,z)$作为变量t,z的函数，当$t\geqslant a$, $z\in D$时连续；

3）　对$t\geqslant a$的任何t值，$f(t,z)$作为z的函数，在D内解析；

4）　广义积分

$$\int_a^{+\infty} f(t,z)\mathrm{d}t \tag{1.1}$$

在D内一致收敛。

则由带复参变量z的广义积分(1.1)确定的函数

$$F(z)=\int_a^{+\infty} f(t,z)\mathrm{d}t$$

在D内解析，并且对$z\in D$，有

$$F'(z)=\int_a^{+\infty} f'_z(t,z)\mathrm{d}t$$

这个定理的证明篇幅较长，又非基本要求，我们把它写在附录（第七）章的§1中。

1.2 Γ-函数的定义及其解析性

Γ-函数，是指带复参变量z的积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t \qquad (\mathrm{Re}z>0)$$

确定的函数，记为$\Gamma(z)$，即

$$\Gamma(z)=\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t \qquad (\mathrm{Re}z>0) \tag{1.2}$$

因为(1.2)式右端积分中的被积函数

$$f(t,z)=e^{-t}t^{z-1}$$

当$t>0$时是z的解析函数，又对任意给定的正数$\delta>0$及$A>\delta$，容易看出在区域$0<\delta\leqslant\mathrm{Re}z\leqslant A<+\infty$内(1.2)式右端被积函数满足不等式：

$$|f(t,z)|\leqslant\varphi(t)$$

式中

$$\varphi(t)=\begin{cases} e^{-t}t^{\delta-1}, & 0\leqslant t\leqslant 1 \\ e^{-t}t^{A-1}, & t\geqslant 1 \end{cases}$$

并且$\varphi(t)$在$(0,+\infty)$上的积分收敛。所以，(1.2)式右端积分在$0<\delta\leqslant\mathrm{Re}z\leqslant A<+\infty$上一致收敛。引用定理1.1便知，$\Gamma(z)$函数在带域$0<\delta\leqslant\mathrm{Re}z\leqslant A$上解析，考虑到$\delta$、$A$的任意性以及解析是一种局部性质，便推出$\Gamma(z)$于$\mathrm{Re}z>0$上解析。

在变换$t=u^2$下，依据(1.2)式，可以把$\Gamma(z)$改写成

$$\Gamma(z)=2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}u^{2z-1}\mathrm{d}u \qquad (\mathrm{Re}z>0) \tag{1.3}$$

由(1.2)式和(1.3)式，可以推出：

$$\Gamma(1)=1,\ \Gamma(2)=1,\quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

1.3 Γ-函数的解析延拓

当$\mathrm{Re}z>0$时，对(1.2)式右端积分施行分部积分，有

$$\Gamma(z)=\frac{1}{z}e^{-t}t^{z}\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{z}\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{z}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{z}\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{z}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{z}\left(\frac{1}{z+1}e^{-t}t^{z+1}\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{z+1}\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{z+1}\mathrm{d}t\right)$$

$$=\frac{1}{z(z+1)}\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{z+1}\mathrm{d}t=\cdots$$

由此便知，当$\mathrm{Re}z>0$时，有

$$\Gamma(z)=\frac{\Gamma(z+1)}{z}=\frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)}=\cdots=\frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)} \quad (1.4)$$

若记

$$f(z)=\frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)} \quad (1.5)$$

则根据 1.2 的讨论，可知当$\mathrm{Re}(z+n+1)>0$（即$\mathrm{Re}z>-(n+1)$）时函数$\Gamma(z+n+1)$解析。从而$f(z)$在区域$\mathrm{Re}z>-(n+1)$上，且$z\neq0$，$z\neq-1,\cdots,z\neq-n$时解析。

从(1.4)式知，在区域$\mathrm{Re}z>0$上，有

$$\Gamma(z)\equiv f(z) \quad (1.6)$$

于是，若应用等式(1.6)式规定$\Gamma(z)$在$\mathrm{Re}z>-(n+1)$上的值，则$\Gamma(z)$就是区域$\mathrm{Re}z>-(n+1)$上除去点$z=0$，$z=-1,\cdots$，$z=-n$外的解析函数，并且有

$$\lim_{z\to-n}(z+n)\Gamma(z)=\lim_{z\to-n}(z+n)\frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$

$$=\frac{\Gamma(1)}{(-n)(-n+1)\cdots[-n+(n-1)]}=\frac{(-1)^n}{n!} \quad (1.7)$$

因此，点$z=-n(n=0,1,2,\cdots)$是$\Gamma(z)$的一级极点。根据罗朗展开定理，$\Gamma(z)$在环域$0<|z+n|<1$内，可以展成罗朗

级数

$$\Gamma(z)=\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n}+\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z+n)^k \qquad (1.8)$$

1.4 Γ-函数的基本公式

Γ-函数有以下基本公式：

递推公式 $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$ (1.9)

余元公式 $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\dfrac{\pi}{\sin\pi z}$ (1.10)

变数加倍公式

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z) \qquad (1.11)$$

(1.9)式可由(1.4)式推出。为证(1.10)式，先假定z为区间(0,1)中的实数。依(1.3)式，有

$$\Gamma(z)=2\int_0^{+\infty}e^{-u^2}u^{2z-1}du \qquad (1.12)$$

在上式中，把z改为$1-z$，得

$$\Gamma(1-z)=2\int_0^{+\infty}e^{-u^2}u^{1-2z}du=2\int_0^{+\infty}e^{-v^2}v^{1-2z}dv$$

从而

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-(u^2+v^2)}\left(\frac{u}{v}\right)^{2z-1}dudv \qquad (1.13)$$

在极坐标变换

$$u=r\cos\theta,\qquad v=r\sin\theta$$

下，(1.13)式成为

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=4\int_0^{+\infty}\int_0^{\pi/2}e^{-r^2}\mathrm{ctg}^{2z-1}\theta r dr d\theta$$

$$=4\int_0^{\pi/2}\mathrm{ctg}^{2z-1}\theta d\theta\int_0^{+\infty}e^{-r^2}rdr=2\int_0^{\pi/2}\mathrm{ctg}^{2z-1}\theta d\theta$$

再引入变换

$$\theta = \operatorname{arc\,ctg}\sqrt{x}$$

注意到在此变换下，当 θ 经历变程 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时，x 将取遍 $+\infty$ 到 0 的一切值，以及

$$\mathrm{d}\theta = \frac{-1}{2\sqrt{x}\,(1+x)}\mathrm{d}x$$

即得

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{z-1}}{1+x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin\pi z} \qquad (1.14)$$

最后一个等式是复变函数论中应用留数计算积分得到的一个常见结论。所以，当 z 是实轴上(0,1)线段上的点时，有

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin\pi z}$$

考虑到上式两端都是复平面上去掉整数点 $z=0, \pm1, \pm2$, …的区域 G 上的解析函数，则依据解析函数的内部唯一性定理（恒等定理），就知(1.10)式在 G 上恒成立。

最后我们来证等式(1.11)。先设 $\mathrm{Re}z>0$，由(1.12)式，有

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)$$

$$= 4\cdot 2^{2z-1}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}u^{2z-1}\mathrm{d}u \cdot \int_0^{+\infty} e^{-v^2}v^{2z}\mathrm{d}v$$

$$= 4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(u^2+v^2)}(2uv)^{2z-1}v\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

把上式中 u,v 对调，并相加，可得对称表达式

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)$$

$$= 2\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(u^2+v^2)}(2uv)^{2z-1}(u+v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=4\iint_D e^{-(u^2+v^2)}(2uv)^{2z-1}(u+v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

其中D是扇形域$0\leqslant u<+\infty$，$0\leqslant v\leqslant u$。

在变换

$$\alpha=u^2+v^2,\qquad \beta=2uv$$

下，雅可比行列式

$$\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\alpha}{\partial u} & \dfrac{\partial\alpha}{\partial v}\\ \dfrac{\partial\beta}{\partial u} & \dfrac{\partial\beta}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2u & 2v\\ 2v & 2u\end{vmatrix}=4(u^2-v^2)$$

由重积分的变数变换公式，有

$$\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta=4|u-v|\,|u+v|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

或

$$|u+v|\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{1}{4\sqrt{\alpha-\beta}}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta$$

于是*

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=\int_0^{+\infty}e^{-\alpha}\mathrm{d}\alpha\int_0^{\alpha}\frac{1}{\sqrt{\alpha-\beta}}\beta^{2z-1}\mathrm{d}\beta$$

$$=\int_0^{+\infty}\beta^{2z-1}\,\mathrm{d}\beta\int_{\beta}^{+\infty}\frac{e^{-\alpha}}{\sqrt{\alpha-\beta}}\mathrm{d}\alpha$$

$$=2\int_0^{+\infty}e^{-\beta}\beta^{2z-1}\mathrm{d}\beta\cdot\int_0^{+\infty}e^{-w^2}\mathrm{d}w$$

$$=\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z)$$

即当$\mathrm{Re}z>0$时，(1.11)式成立，至于在点$z=0$，$-\dfrac{1}{2}$，-1，$-\dfrac{3}{2}$，…外的其余点处，还是根据解析函数的内部唯一性

* 在运算过程中，我们作了变数变换．$\alpha-\beta=w^2$

定理知(1.11)式成立。

从Γ-函数的余元公式和递推公式，不难推出：

1) Γ-函数在整个复平面上没有零点；

2) $\Gamma(n+1)=n!$。

1.5 Γ-函数的对数导数

Γ-函数的对数导数记为$\Psi(z)$，即

$$\Psi(z)=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \tag{1.15}$$

因为$\Gamma(z)$是一个半纯函数(即$\Gamma(z)$是一在全平面上只有极点的解析函数)，而且没有零点，所以$\Psi(z)$除了$\Gamma(z)$的极点$z=-n$ $(n=0,1,2,\cdots)$外，别无其它的奇点。

在 $0<|z+n|<1$ 内，由(1.8)式，有

$$\Gamma(z)=\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n}+\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z+n)^k$$

$$\Gamma'(z)=-\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{(z+n)^2}+\sum_{k=1}^{\infty}kc_k(z+n)^{k-1}$$

于是，在 $0<|z+n|<1$ 内，对$\Gamma'(z)/\Gamma(z)$做大除法，得

$$\Psi(z)=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=-\frac{1}{z+n}+\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z+n)^k \tag{1.16}$$

所以$\Psi(z)$是半纯函数，只有一级极点 $z=0,-1,-2,\cdots$。

依据对数导数的定义式(1.15)和关于Γ-函数的基本公式(1.9)—(1.11)，可以证明$\Psi(z)$有下述的性质：

$$\Psi(z+1)=\frac{1}{z}+\Psi(z) \tag{1.17}$$

$$\Psi(1-z)-\Psi(z)=\pi\mathrm{ctg}\pi z \tag{1.18}$$

$$\Psi(z)+\Psi\left(z+\frac{1}{2}\right)+2\ln 2=2\Psi(2z) \tag{1.19}$$

事实上，从(1.9)式知