

理科数学

欧维义 编

TESHU
HAN SHU
JI QI
YING YONG

特殊函数及其应用

吉林大学出版社

特殊函数及其应用

欧维义 编



吉林大学出版社

特殊函数及其应用

欧维义 编

*

吉林大学出版社出版 吉林大学印刷厂印刷

吉林省新华书店发行

850×1168 大32开 9.125印张 226 000字

1988年4月第1版 1988年年月第1次印刷

印数 1-3 000册

*

ISBN 7-5601-0092-9/O·19

定价：1.80元

出版说明

根据教学需要，我们出版了这套《吉林大学本科生教材》，这套教材适合高等学校本科生基础课或选修课的教学，由我社逐年陆续出版。

吉林大学出版社

序

本书是根据编者为吉林大学数学系力学专业、理科物理、化学各专业所开设的数学物理方法课程而编写的《特殊函数及其应用》讲义修改而成。同属于数学物理方法课程内容的，还有《数学物理方程》(1985年由吉林科学技术出版社出版)和《复变函数论》(1987年由吉林大学出版社出版)。

本书的内容包括：第一，很细致地讲述了勒让德多项式、球函数，第一类、第二类贝塞尔函数，厄密多项式、拉革尔多项式的来源及其应用；第二，简要地介绍了有关斯特姆-刘维尔问题的名称、概念和主要结果；第三，对进一步学习和理解特殊函数内容特别有用的结论和定理的证明，作为附录写在第七章。

本书采用这样的结构，具有实用、思路清晰、中心突出的优点。同时也能适应不同学时，不同层次的教学需要，既便于课堂教学又适合于自学。

本书在编写过程中，得到王柔怀教授的指导，并得到陈维钧、高玉环、王毅、卢喜观、金德俊等同志的帮助。在此，谨向他们致以谢意。

本书中不妥之处，谨请读者指正。

编者

1987年12月于吉林大学

目 录

第一章 Γ -函数和B-函数	(1)
§ 1 Γ -函数及其基本性质	(1)
1.1 含复参变量广义积分确定的函数的 解析性	(1)
1.2 Γ -函数的定义及其解析性	(2)
1.3 Γ -函数的解析延拓	(2)
1.4 Γ -函数的基本公式	(4)
1.5 Γ -函数的对数导数	(7)
1.6 Γ -函数的渐近公式	(8)
§ 2 B-函数	(9)
2.1 B-函数的定义	(9)
2.2 B-函数与 Γ -函数的联系	(10)
第二章 勒让德多项式及其应用	(12)
§ 1 幂级数解法	(12)
1.1 解析点附近解的存在性与唯一性定理	(12)
1.2 幂级数解法	(12)
1.3 勒让德方程的有界解	(13)
§ 2 勒让德多项式的引入	(21)
2.1 本征值问题的提出	(21)
2.2 本征值问题的解	(23)
2.3 $P_l(x)$ 的微分表达式与积分表达式	(25)
§ 3 勒让德多项式的基本性质	(28)
3.1 $P_l(x)$ 的母函数	(28)
3.2 $P_l(x)$ 的递推公式	(31)
3.3 $P_l(x)$ 的正交性与模	(34)

3.4	按勒让德多项式展开的收敛定理	(36)
§ 4	关于勒让德多项式的应用	(45)
4.1	模型问题的解	(45)
4.2	均匀场中介质球的电场	(46)
4.3	点电荷影响下介质球的电场	(49)
第三章	球函数及其应用	(55)
§ 1	连带(综合)勒让德函数	(55)
1.1	连带勒让德函数的引入	(56)
1.2	连带勒让德函数的正交性和模	(59)
1.3	按连带勒让德函数展开的收敛定理	(62)
§ 2	球函数	(64)
2.1	球函数的引入	(64)
2.2	球函数的正交性和模	(66)
2.3	关于球函数的展开定理	(70)
2.4	加法公式	(74)
§ 3	球函数的应用	(81)
3.1	球内第一边值问题的解	(81)
3.2	球内第二边值问题的解	(83)
3.3	加法公式的应用	(85)
第四章	贝塞尔函数及其应用	(89)
§ 1	第一类贝塞尔函数	(89)
1.1	正则奇点附近解的结构定理	(89)
1.2	第一类贝塞尔函数	(90)
§ 2	第二类贝塞尔函数	(99)
2.1	级数型的第二类贝塞尔函数	(99)
2.2	按不定型引进的第二类贝塞尔函数	(107)
§ 3	第一、二类贝塞尔函数的基本性质	(115)
3.1	递推公式	(115)
3.2	母函数与加法公式	(117)

3.3	积分表达式和渐近表达式	(120)
3.4	零点的分布	(123)
3.5	正交性、模与展开定理	(127)
§ 4	关于贝塞尔函数的应用	(133)
4.1	圆膜振动问题的解	(133)
4.2	具轴对称的圆膜振动问题的解	(138)
4.3	一个引理	(139)
4.4	圆域上热传导的第二边值问题	(141)
第五章	常微分方程的本征值问题	(147)
§ 1	广义傅立叶级数	(147)
1.1	正交、归一化系	(147)
1.2	施密特正交化方法	(149)
1.3	广义傅立叶级数和收敛的概念	(151)
1.4	完全系(统)的概念及其判别	(153)
§ 2	本征值问题中的名称和概念	(155)
2.1	斯特姆-刘维尔型方程	(155)
2.2	斯特姆-刘维尔型问题	(156)
2.3	奇异的斯特姆-刘维尔问题	(157)
2.4	周期的斯特姆-刘维尔问题	(158)
§ 3	关于斯特姆-刘维尔问题的结论	(158)
3.1	本征函数的性质	(158)
3.2	本征值和本征展开	(161)
第六章	厄密多项式和拉革尔多项式	(163)
§ 1	厄密多项式	(163)
1.1	本征值问题	(163)
1.2	厄密方程的解	(164)
1.3	本征值问题的解	(166)
1.4	厄密多项式	(167)
1.5	母函数与微分表达式	(168)

1.6	正交性、模与展开定理	(171)
§ 2	拉革尔多项式	(175)
2.1	拉革尔多项式的引入	(176)
2.2	母函数与微分表达式	(178)
2.3	正交性、模与展开定理	(181)
§ 3	广义拉革尔多项式	(182)
3.1	奇异S-L问题(3.1)-(3.2)的解	(182)
3.2	母函数与微分表达式	(185)
3.3	递推公式	(186)
3.4	正交性、模与展开定理	(190)
第七章	附 录	(195)
§ 1	带复参量的积分	(195)
1.1	有穷限的带复参变量的积分	(195)
1.2	无穷限的带复参变量的积分	(197)
§ 2	解析点附近解的结构定理	(201)
2.1	基本引理	(201)
2.2	解析点附近解的结构定理	(207)
§ 3	第二章极限式(1.26)的证明	(207)
3.1	极限 $\lim_{k \rightarrow +\infty} I_k = A > 0$ 的证明	(207)
3.2	极限 $\lim_{k \rightarrow +\infty} J_k = p > 0$ 的证明	(210)
§ 4	正则奇点附近解的结构定理	(211)
§ 5	其它类型的贝塞尔函数	(221)
5.1	汉克尔函数 $H_\nu^{(1)}(z)$ 、 $H_\nu^{(2)}(z)$	(221)
5.2	虚宗量贝塞尔函数 $I_\nu(z)$ 和 $K_\nu(z)$	(222)
5.3	球贝塞尔函数	(226)
§ 6	斯特姆-刘维尔问题的结果及其证明	(229)
6.1	用泛函等式描述的本征函数的性质	(230)
6.2	极值函数与本征函数	(231)

6.3 求一般本征值的库朗定理.....	(235)
6.4 本征值的比较定理.....	(238)
6.5 S-L 问题的结果及其证明.....	(241)
答案与提示.....	(249)

第一章 Γ -函数和B-函数

Γ -函数 (Gamma 函数) $\Gamma(z)$ 和 B-函数 (Beta 函数) $B(p, q)$, 是最简单而又重要的特殊函数, 它的许多性质是研究其它特殊函数的基础。

§1 Γ -函数及其基本性质

1.1 含复参变量广义积分确定的函数的解析性

在讨论 Γ -函数 $\Gamma(z)$ 和 B-函数 $B(p, q)$ 的性质时, 要用到下面的定理。

定理1.1 设

- 1) D 是 z 平面上的一个区域;
- 2) $f(t, z)$ 作为变量 t, z 的函数, 当 $t \geq a, z \in D$ 时连续;
- 3) 对 $t \geq a$ 的任何 t 值, $f(t, z)$ 作为 z 的函数, 在 D 内解析;

4) 广义积分

$$\int_a^{+\infty} f(t, z) dt \quad (1.1)$$

在 D 内一致收敛。

则由带复参变量 z 的广义积分(1.1)确定的函数

$$F(z) = \int_a^{+\infty} f(t, z) dt$$

在 D 内解析, 并且对 $z \in D$, 有

$$F'(z) = \int_a^{+\infty} f'_z(t, z) dt$$

这个定理的证明篇幅较长, 又非基本要求, 我们把它写在附录(第七)章的§1中。

1.2 Γ -函数的定义及其解析性

Γ -函数, 是指带复参变量 z 的积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (\operatorname{Re} z > 0)$$

确定的函数, 记为 $\Gamma(z)$, 即

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (\operatorname{Re} z > 0) \quad (1.2)$$

因为(1.2)式右端积分中的被积函数

$$f(t, z) = e^{-t} t^{z-1}$$

当 $t > 0$ 时是 z 的解析函数, 又对任意给定的正数 $\delta > 0$ 及 $A > \delta$, 容易看出在区域 $0 < \delta \leq \operatorname{Re} z \leq A < +\infty$ 内(1.2)式右端被积函数满足不等式:

$$|f(t, z)| \leq \varphi(t)$$

式中

$$\varphi(t) = \begin{cases} e^{-t} t^{\delta-1}, & 0 \leq t \leq 1 \\ e^{-t} t^{A-1}, & t \geq 1 \end{cases}$$

并且 $\varphi(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的积分收敛. 所以, (1.2)式右端积分在 $0 < \delta \leq \operatorname{Re} z \leq A < +\infty$ 上一致收敛. 引用定理1.1便知, $\Gamma(z)$ 函数在带域 $0 < \delta \leq \operatorname{Re} z \leq A$ 上解析, 考虑到 δ, A 的任意性以及解析是一种局部性质, 便推出 $\Gamma(z)$ 于 $\operatorname{Re} z > 0$ 上解析.

在变换 $t = u^2$ 下, 依据(1.2)式, 可以把 $\Gamma(z)$ 改写成

$$\Gamma(z) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} u^{2z-1} du \quad (\operatorname{Re} z > 0) \quad (1.3)$$

由(1.2)式和(1.3)式, 可以推出:

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(2) = 1, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

1.3 Γ -函数的解析延拓

当 $\operatorname{Re} z > 0$ 时, 对(1.2)式右端积分施行分部积分, 有

$$\begin{aligned}
 \Gamma(z) &= \frac{1}{z} e^{-t} t^z \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{z} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^z dt \\
 &= \frac{1}{z} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^z dt \\
 &= \frac{1}{z} \left(\frac{1}{z+1} e^{-t} t^{z+1} \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{z+1} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z+1} dt \right) \\
 &= \frac{1}{z(z+1)} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z+1} dt = \dots
 \end{aligned}$$

由此便知, 当 $\operatorname{Re}z > 0$ 时, 有

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)} = \dots = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\dots(z+n)} \quad (1.4)$$

若记

$$f(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\dots(z+n)} \quad (1.5)$$

则根据 1.2 的讨论, 可知当 $\operatorname{Re}(z+n+1) > 0$ (即 $\operatorname{Re}z > -(n+1)$) 时函数 $\Gamma(z+n+1)$ 解析. 从而 $f(z)$ 在区域 $\operatorname{Re}z > -(n+1)$ 上, 且 $z \neq 0, z \neq -1, \dots, z \neq -n$ 时解析.

从 (1.4) 式知, 在区域 $\operatorname{Re}z > 0$ 上, 有

$$\Gamma(z) \equiv f(z) \quad (1.6)$$

于是, 若应用等式 (1.6) 式规定 $\Gamma(z)$ 在 $\operatorname{Re}z > -(n+1)$ 上的值, 则 $\Gamma(z)$ 就是区域 $\operatorname{Re}z > -(n+1)$ 上除去点 $z=0, z=-1, \dots, z=-n$ 外的解析函数, 并且有

$$\begin{aligned}
 \lim_{z \rightarrow -n} (z+n)\Gamma(z) &= \lim_{z \rightarrow -n} (z+n) \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\dots(z+n)} \\
 &= \frac{\Gamma(1)}{(-n)(-n+1)\dots[-n+(n-1)]} = \frac{(-1)^n}{n!} \quad (1.7)
 \end{aligned}$$

因此, 点 $z = -n (n=0, 1, 2, \dots)$ 是 $\Gamma(z)$ 的一级极点. 根据罗朗展开定理, $\Gamma(z)$ 在环域 $0 < |z+n| < 1$ 内, 可以展成罗朗

级数

$$\Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z+n)^k \quad (1.8)$$

1.4 Γ -函数的基本公式

Γ -函数有以下基本公式:

$$\text{递推公式} \quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (1.9)$$

$$\text{余元公式} \quad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin\pi z} \quad (1.10)$$

变数加倍公式

$$2^{z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma(2z) \quad (1.11)$$

(1.9)式可由(1.4)式推出。为证(1.10)式,先假定 z 为区间 $(0,1)$ 中的实数。依(1.3)式,有

$$\Gamma(z) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} u^{2z-1} du \quad (1.12)$$

在上式中,把 z 改为 $1-z$,得

$$\Gamma(1-z) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-v^2} v^{1-2z} dv = 2 \int_0^{+\infty} e^{-v^2} v^{1-2z} dv$$

从而

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = 4 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-u^2-v^2} \left(\frac{u}{v}\right)^{2z-1} dudv \quad (1.13)$$

在极坐标变换

$$u = r\cos\theta, \quad v = r\sin\theta$$

下, (1.13)式成为

$$\begin{aligned} \Gamma(z)\Gamma(1-z) &= 4 \int_0^{+\infty} \int_0^{\pi/2} e^{-r^2} \operatorname{ctg}^{2z-1}\theta r dr d\theta \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \operatorname{ctg}^{2z-1}\theta d\theta \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr = 2 \int_0^{\pi/2} \operatorname{ctg}^{2z-1}\theta d\theta \end{aligned}$$

再引入变换

$$\theta = \arccot \sqrt{x}$$

注意到在此变换下，当 θ 经历变程 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时， x 将取遍 $+\infty$ 到 0 的一切值，以及

$$d\theta = \frac{-1}{2\sqrt{x}(1+x)} dx$$

即得

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{z-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi z} \quad (1.14)$$

最后一个等式是复变函数论中应用留数计算积分得到的一个常见结论。所以，当 z 是实轴上 $(0, 1)$ 线段上的点时，有

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

考虑到上式两端都是复平面上去掉整数点 $z=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 的区域 G 上的解析函数，则依据解析函数的内部唯一性定理（恒等定理），就知(1.10)式在 G 上恒成立。

最后我们来证等式(1.11)。先设 $\operatorname{Re} z > 0$ ，由(1.12)式，有

$$\begin{aligned} & 2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) \\ &= 4 \cdot 2^{2z-1} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} u^{2z-1} du \cdot \int_0^{+\infty} e^{-v^2} v^{2z} dv \\ &= 4 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-u^2+v^2} (2uv)^{2z-1} v du dv \end{aligned}$$

把上式中 u, v 对调，并相加，可得对称表达式

$$\begin{aligned} & 2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(u^2+v^2)} (2uv)^{2z-1} (u+v) du dv \end{aligned}$$

$$= 4 \iint_D e^{-(u^2+v^2)} (2uv)^{2z-1} (u+v) du dv$$

其中 D 是扇形域 $0 \leq u < +\infty, 0 \leq v \leq u$.

在变换

$$a = u^2 + v^2, \quad \beta = 2uv$$

下, 雅可比行列式

$$\frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial u} & \frac{\partial \alpha}{\partial v} \\ \frac{\partial \beta}{\partial u} & \frac{\partial \beta}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u & 2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = 4(u^2 - v^2)$$

由重积分的变数变换公式, 有

$$dad\beta = 4|u-v||u+v|dudv$$

或

$$|u+v|dudv = \frac{1}{4\sqrt{\alpha-\beta}}dad\beta$$

于是*

$$\begin{aligned} 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} e^{-\alpha} d\alpha \int_0^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{\alpha-\beta}} \beta^{2z-1} d\beta \\ &= \int_0^{+\infty} \beta^{2z-1} d\beta \int_{\beta}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha}}{\sqrt{\alpha-\beta}} d\alpha \\ &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-\beta} \beta^{2z-1} d\beta \cdot \int_0^{+\infty} e^{-w^2} dw \\ &= \sqrt{\pi} \Gamma(2z) \end{aligned}$$

即当 $\operatorname{Re}z > 0$ 时, (1.11) 式成立, 至于在点 $z=0, -\frac{1}{2},$

$-1, -\frac{3}{2}, \dots$ 外的其余点处, 还是根据解析函数的内部唯一性

* 在运算过程中, 我们作了变数变换. $\alpha - \beta = w^2$

定理知(1.11)式成立。

从 Γ -函数的余元公式和递推公式, 不难推出:

- 1) Γ -函数在整个复平面上没有零点;
- 2) $\Gamma(n+1) = n!$.

1.5 Γ -函数的对数导数

Γ -函数的对数导数记为 $\Psi(z)$, 即

$$\Psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \quad (1.15)$$

因为 $\Gamma(z)$ 是一个半纯函数(即 $\Gamma(z)$ 是一在全平面上只有极点的解析函数), 而且没有零点, 所以 $\Psi(z)$ 除了 $\Gamma(z)$ 的极点 $z = -n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)外, 别无其它的奇点。

在 $0 < |z+n| < 1$ 内, 由(1.8)式, 有

$$\Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z+n)^k$$

$$\Gamma'(z) = -\frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{(z+n)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (z+n)^{k-1}$$

于是, 在 $0 < |z+n| < 1$ 内, 对 $\Gamma'(z)/\Gamma(z)$ 做大除法, 得

$$\Psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\frac{1}{z+n} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z+n)^k \quad (1.16)$$

所以 $\Psi(z)$ 是半纯函数, 只有一级极点 $z = 0, -1, -2, \dots$ 。

依据对数导数的定义式(1.15)和关于 Γ -函数的基本公式(1.9)–(1.11), 可以证明 $\Psi(z)$ 有下述的性质:

$$\Psi(z+1) = \frac{1}{z} + \Psi(z) \quad (1.17)$$

$$\Psi(1-z) - \Psi(z) = \pi \operatorname{ctg} \pi z \quad (1.18)$$

$$\Psi(z) + \Psi\left[z + \frac{1}{2}\right] + 2 \ln 2 = 2\Psi(2z) \quad (1.19)$$

事实上, 从(1.9)式知