★高等学校通用精品教材★

★中国数学会推荐使用教材★

GLLY
SLTJ

总主编　罗李平

概率论与数理统计

主编　罗李平　郭运瑞　等

中国科学技术出版社

★高等学校通用精品教材★
★中国数学会推荐使用教材★

总主编　罗李平等

概率论与数理统计

主　编　罗李平　郭运瑞
副主编　谭德俊　易艳春
编　委　袁德强　李伟平　牛惠芳
牛保青　睢　音　罗李平
查正邦　王　波　郭运瑞
谭德俊　易艳春

中国科学技术出版社
·北京·

责任编辑:付万成 戈笑阳

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/罗李平 郭运瑞 编著.—北京:中国科学技术出版社,2009.8

SBN 978—7—5046—5487—8

(高等学校通用精品教材)

I.概… II.①罗…②郭… III.①概论论 ②数理统计—高等学校—教材 IV.021

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第134128号

概率论与数理统计

罗李平 郭运瑞 编著

中国科学技术出版社出版

(1000710 北京市东城区安德路甲61号红都商务中心)

2009年7月第1版 2009年7月第1次印刷

开本:787毫米×1092毫米 1/16 印张:18 字数:410千字

ISBN 978—7—5046—5487—8 定价:34.00元

网址 //www.kjpbooks.com.cn

科学普及出版社发行部发行

北京迪鑫印刷厂印刷

前 言

《概率论与数理统计》是高等院校数学专业、理工类专业、经管类专业及其他有关专业的一门重要的必修基础课，在工农业生产、科学技术、经济预测及教育研究等领域中有着十分广泛的应用，特别是在当前社会主义现代化建设中，为实现经济建设的各个阶段的战略目标，《概率论与数理统计》这门课程将发挥其重要作用．从某种意义来讲，《概率论与数理统计》在一个国家中的应用程度标志着一个国家的科学水平．

在本教材编写中，我们密切结合教学实践，根据编者多年的教学经验，精选内容，努力使教材的观点正确稳妥，材料充实可靠，文字通俗易懂，深入浅出，并且尽可能地从内容和方法上反映近来年《概率论与数理统计》这门课程在教学和科研中的最新成果．另外，书中带“*”号的内容各专业可根据自己的教学实际适当取舍．本教材各章后配有习题，书末附有参考答案．在例题和习题中有选择地收录了历届研究生考试试题，便于教学，有利于考试复习．

与同类教材相比，本教材突出体现了三大特点：第一，淡化了某些繁杂形式，更关注核心内容，但简而不略；第二，加强了理论与实际的联系，注重该学科知识在社会生活，特别是在社会经济与工程技术方面的具体应用；第三，在教材处理上避免使用较深的数学知识，只要具备微积分和线性代数基本知识即可，书中的所有推理论证都是在这一范围内进行的．

本教材符合国家教育部制订的教学大纲的要求，可作为高等院校物理专业、化学专业、计算机专业、经管类各专业、以及其他有关专业相应课程的教材或教学参考书，还可作为各类成人教育相应课程的教材或教学参考书．

本书由罗李平、郭运瑞拟写大纲并负责写作、统稿，其中罗李平、郭运瑞、易艳春分别撰写第一、二章，第三、四章，第五章，余下由其他人员编著，参编单位有武汉大学、湖南大学、河南大学、衡阳师范学院、南华大学、河南科技学院、河南财经学院、安阳广播电视大学、洛阳师范学院、安阳师范学院等.在编写过程中，我们参考了大量的有关文献，在此谨向这些作者表示衷心的感谢！

要在教学计划和教学大纲的指导下编写出一本比较成熟的教材，不是一件容易的事情，它应该是一个长期努力的过程．

由于我们水平有限，加之时间仓促，缺点、错误在所难免，恳请读者批评指正，以使本教材不断完善．

编者
2009 年 5 月

目　录

第一章　随机事件与概率

在自然界及人类社会活动中，可观察到的现象多种多样，概括起来无非是两类现象：确定性的和随机性的．例如：在一个标准大气压下纯净的水加热到100℃时必然沸腾；一个平面三角形的内角和一定等于180°；同性电荷必然互相排斥，异性电荷必然相互吸引等等．这类现象为确定性现象，只要在一定条件下进行观察或试验，其结果必然发生，是人们可以预知的．另有一类现象，在一定条件下，试验有多种可能的结果，但到底出现哪一种结果是带有偶然性的，事先并不能确定，此类现象称为随机现象．例如：掷同一枚质地均匀的硬币，观察它落地后哪一面朝上；在城市交通的某一路口，记录一段时间内经过的车辆数目；在一批电视机中任意抽取一台，电视机的寿命长短等都是随机现象．

对于随机现象的一次具体观察或试验，事先并不能预知其结果，但在大量重复观察和试验中，它的结果却呈现某种客观规律性（统计规律性）．比如就掷一枚硬币而言，出现正面朝上或反面朝上完全是偶然的．但在相同条件下多次掷同一枚质地均匀的硬币，就会发现“出现正面朝上”或“出现反面朝上”的次数大约各占总抛掷次数的1/2左右；又如就投一次篮球而言，NBA球星和非职业球员都有可能投进也可能投不进，但在相同条件下各多次投篮，几乎肯定是NBA球星进球的比例高．

概率论（Probability Theory）与数理统计（Mathematical Statistics）是研究和揭示大量的同类型的随机现象所呈现出来的统计规律性的一门学科，也是现代数学的一个重要分支．它的思想、理论和方法在自然科学、社会科学、工农业生产实践、工程技术等领域有着广泛的应用．例如在工业生产中，可以应用概率统计方法进行质量控制、工业试验设计、产品的抽样检查等．还可使用概率统计方法进行气象预报、水文预报和地震预报等．另外，概率统计的理论与方法正在向各基础学科、工程学科、经济学科渗透，产生了各种边缘性的应用学科，如排队论、计量经济学、信息论、控制论、时间序列分析等．

§1.1　随机事件

1.1.1　随机试验与样本空间

为研究客观现象的规律，常常需要进行大量的观察或实验．我们把这种对客观现象进行的一次观察或一次科学实验统称为**一个试验**．

如果一个试验满足下述条件：

(1) 可以在相同条件下重复进行(**可重复性**)；

(2) 所有可能结果是明确知道的，并且不止一个(**确定性**)；

(3) 每次试验总是恰好出现这些可能结果中的一个，但在试验之前却不能肯定究竟出现哪一个(**随机性**)．

则称它为**一个随机试验**,为方便起见,也简称为**试验**,用字母 E 表示.

以后,如无特别说明,我们所提到的试验都是指随机试验.

随机试验的每一个可能的不可分割的结果称为**基本事件**,也称为**样本点**,常用 ω 表示.由所有基本事件组成的集合称为**样本空间**,常用 Ω 表示.

每一个试验都有一个观测的目的,根据这个目的,试验被观测到有多个不同的不可分割的可能结果,这些可能的结果便是基本事件,它们组成的集合便是样本空间.

例 1 抛掷一枚质地均匀的硬币,目的是观察它哪一面朝上,这时只有"正面"、"反面"两种不同的结果,至于硬币落在哪一个位置,朝哪一个方向滚动以及滚动的距离等都不在观察的目的之列,不能看做试验的结果.因此这一随机试验的基本事件为:ω_1="正面",ω_2="反面",样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$.

例 2 麻将游戏中抛掷一枚骰子的目的是观测向上一面出现的点数,因此有 6 个不同的结果:"出现的点数为 $i,i=1,2,\cdots,6$".于是,这一随机试验的基本事件为:ω_i="出现的点数为 $i,i=1,2,\cdots,6$",样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$.

1.1.2 随机事件

(一)随机事件

在一定的条件下可能出现也可能不出现的结果,称为这一条件下的**随机事件**,简称**事件**.随机事件常用大写字母 A、B、C 等表示,如果属于随机事件 A 的某一个基本事件 ω 在随机试验中出现,则称 A 发生,否则,称 A 没发生.

由随机事件的定义可得:随机试验的每一个可能的结果都是随机事件,因此基本事件必为随机事件,除此以外,还有一类随机事件它是由若干基本事件组合而成的,我们称这类随机事件为**复合事件**.

例 3 在 $0,1,2,\cdots,9$ 十个数中任意选取一个,所有不同的结果有十个:"取得的数是 $i,i=0,1,2,\cdots,9$",因此基本事件为:ω_i="取得的数是 $i,i=0,1,2,\cdots,9$",A="取得的数是奇数"、B="取得的数大于 6"都是复合事件.事实上,$A=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5,\omega_7,\omega_9\}$,$B=\{\omega_7,\omega_8,\omega_9\}$.

(二)必然事件与不可能事件

在一定的条件下,一定出现的结果称为这一条件下的**必然事件**,用字母 Ω 表示.在一定的条件下,一定不出现的结果称为这一条件下的**不可能事件**,用字母 $\varnothing$ 表示.

对于例 3,我们有 C="取得的数不大于 10"是必然事件,D="取得的数大于 10"是不可能事件.

由于每一次随机试验,必然有该随机试验的样本空间 Ω 中的一个基本事件出现,因此样本空间在每一次试验中必然发生,因而样本空间作为一个事件,是必然事件.

必然事件和不可能事件都是在试验之前可以准确预言的,因而本质上它们不是随机事件.但为了方便起见,以后将它们均看做随机事件.

1.1.3 事件的关系和运算

我们引进了样本空间,并建立了事件和集合间的联系,于是事件的关系和运算完全可以运用集合间的关系和运算来处理.为方便起见,我们假设 A、B、C 等为同一个试验中的事件.

(一)事件的包含与相等

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称**事件 A 包含于事件 B**(或**事件 B 包含事件 A**),记作 $A\subset B$(或 $B\supset A$).

如果事件 A、B 满足:$A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称**事件 A 与事件 B 相等**,或称**事件 A 与 B 等价**,记作 $A=B$.

(二)事件的和(并)

事件 A 与事件 B 至少有一个发生(事件 A 发生或事件 B 发生)仍是一个事件,称此事件为 **A 与 B 的和(并)**,记作 $A\cup B$(或 $A+B$),即 $A\cup B=\{\omega|\omega\in A$ 或 $\omega\in B\}$.

类似地,事件"$A_1,A_2,\cdots,A_n$中至少有一个发生"称为 **n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和(并)**,记作$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$. 事件"$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$中至少有一个发生"称为**可列无穷多个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的和(并)**,记作$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

(三)事件的积(交)

事件 A 与 B 同时发生仍是一个事件,称此事件为**事件 A 与事件 B 的积(交)**,记作 $A\cap B$(或 AB),即 $A\cap B=\{\omega|\omega\in A$ 且 $\omega\in B\}$.

类似地,事件"$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生" 称为 **n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积(交)**,记作$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$. 事件"$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$同时发生"称为**可列无穷多个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的积(交)**,记作$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

(四)事件的差

事件 A 发生但事件 B 不发生仍是一个事件,称此事件为**事件 A 与事件 B 的差**,记作 $A-B$,即 $A-B=\{\omega|\omega\in A$ 且 $\omega\notin B\}$.

(五)互不相容(互斥)事件

若事件 A 与 B 不能同时发生,则称**事件 A 与 B 互不相容(或互斥)**,记作 $A\cap B=\varnothing$.

例如在例 3 的取数试验中,若设 $A=$"取到数 2",$B=$ "取到奇数",则事件 A 与 B 互不相容,即 $A\cap B=\varnothing$.

(六)对立(逆)事件

若事件 B 等于 Ω 与事件 A 的差 $\Omega-A$,则称事件 B 为**事件 A 的对立(逆)事件**,记作 $B=\overline{A}$.

显然,这里 A、B 满足关系:$A\cup B=\Omega$,且 $A\cap B=\varnothing$,即就每次试验而言,A 与 B 有且仅有一个发生. 如果 B 为 A 的对立事件,则 A 也是 B 的对立事件,故也称 A 与 B 互为对立(逆)事件.

仍以例 3 中的取数试验为例,若设 $A=$"取到小于 7 的数",$B=$"取到不小于 7 的数",则 A 与 B 互为对立事件.

显然,如果 A 与 B 互为对立事件,则 A 与 B 一定互不相容. 但是,如果 A 与 B 互不相容,则 A 与 B 不一定是对立事件.

关于对立事件,有下列关系成立:

(1)$\overline{\overline{A}}=A$; (2)$A\overline{A}=\varnothing,A\cup\overline{A}=\Omega$;

(3)$A\overline{B}=A-B=A-AB$；　　　　(4)若 $A\subset B$，则 $\overline{A}\supset\overline{B}$；

(5)$\overline{\varnothing}=\Omega$，　$\overline{\Omega}=\varnothing$.

(七)完备事件组

若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足：$A_iA_j=\varnothing(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n)$，且 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\Omega$，即在每次试验中，事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中有且仅有一个发生，则称 **$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成一个完备事件组**，或称它是样本空间 Ω 的一个**划分**.

类似地，对于可列无穷多个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$，如果满足 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j;i,j=1,2,\cdots)$，且 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=\Omega$，则称 **$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 构成一个完备事件组**，或称它是样本空间 Ω 的一个**划分**.

特别地，若 A 与 B 为对立事件，则 A、B 也构成一个完备事件组. 也称 A、B 是样本空间 Ω 的一个划分.

事件间的各种关系和运算，可用文氏图表示(如图 1—1 所示)：

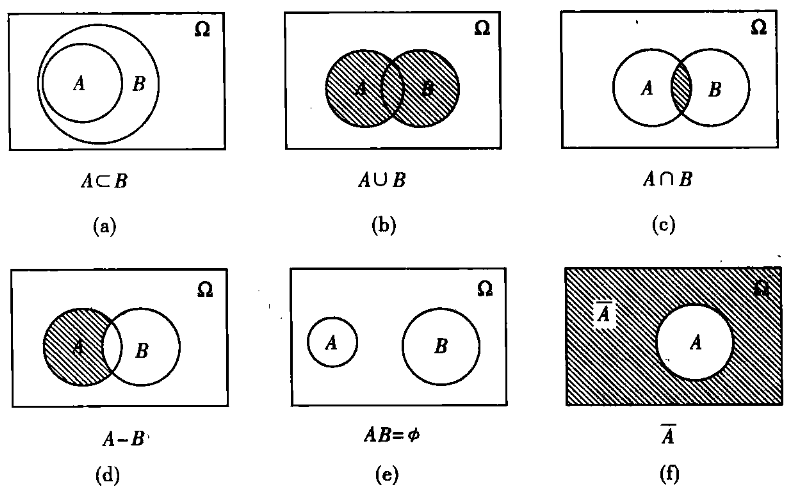

图 1—1

1.1.4　事件的运算性质

随机事件的运算具有以下基本性质：

(一)交换律

$$A\cup B=B\cup A$$
$$A\cap B=B\cap A$$

(二)结合律

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$$
$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$$

(三)分配律

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$
$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

(四)德·摩根律

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

分配律和德·摩根律均可推广到有限个或可列无穷多个事件的情形. 如

$$(\bigcup_i A_i) \cap B = \bigcup_i (A_i \cap B)$$
$$(\bigcap_i A_i) \cup B = \bigcap_i (A_i \cup B)$$
$$\overline{\bigcup_i A_i} = \bigcap_i \bar{A}_i, \qquad \overline{\bigcap_i A_i} = \bigcup_i \bar{A}_i$$

例 4　设 A,B,C 为三个事件,用 A,B,C 的运算式表示下列事件:

(1) A 发生而 B 与 C 都不发生:$A\bar{B}\bar{C}$ 或 $A-B-C$ 或 $A-(B\cup C)$.

(2) A,B 都发生而 C 不发生:$AB\bar{C}$ 或 $AB-C$.

(3) A,B,C 至少有一个事件发生:$A\cup B\cup C$.

(4) A,B,C 至少有两个事件发生:$(AB)\cup(AC)\cup(BC)$.

(5) A,B,C 恰好有两个事件发生:$(AB\bar{C})\cup(AC\bar{B})\cup(BC\bar{A})$.

(6) A,B,C 恰好有一个事件发生:$(A\bar{B}\bar{C})\cup(B\bar{A}\bar{C})\cup(C\bar{A}\bar{B})$.

(7) A,B 至少有一个发生而 C 不发生:$(A\cup B)\bar{C}$.

(8) A,B,C 都不发生:$\overline{A\cup B\cup C}$或 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

例 5　甲、乙、丙三人各向靶子射击一次,设 A_i 表示“第 i 人击中靶子”,$i=1,2,3$. 试说明下列各式表示的事件:

(1) $A_1\bar{A}_2A_3$;　　(2) $(A_1\cup A_2)\bar{A}_3$;

(3) $A_1A_2\cup A_2A_3\cup A_1A_3$;　　(4) $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3\cup\bar{A}_1A_2\bar{A}_3\cup\bar{A}_1\bar{A}_2A_3$

解　(1) 仅有乙未击中靶;　　(2) 甲、乙至少一人击中,而丙未击中靶;

(3) 至少两人击中靶;　　(4) 靶上仅中一弹.

§1.2　概率

1.2.1　概率的直观意义

随机事件虽然有偶然性的一面,即在一次试验中可能发生也可能不发生,但在相同条件下进行大量重复试验,人们还是可以发现它有内在统计规律性,即它出现的可能性大小可通过区间[0,1]中的一个数值 p 来度量,这种用来刻画随机事件出现的可能性大小的数值称为事件的概率. 这就是概率的直观意义.

然而,要确定事件的概率并不是一件很容易的事,为此引入描述事件出现的可能性大小的另一个数量指标——频率的概念,进而引入概率的公理化定义.

1.2.2　频率及其性质

定义 1.1　将试验 E 重复进行 n 次,称事件 A 出现的次数 n_A 为**事件 A 出现的频数**,称比值$\frac{n_A}{n}$为**事件 A 在 n 次试验中出现的频率**,记作 $\mu_n(A)$,即

$$\mu_n(A) = \frac{n_A}{n}.$$

频率具有如下性质:

(1) $0 \leqslant \mu_n(A) \leqslant 1$($A$ 为任一事件);

(2) $\mu_n(\Omega)=1$;

(3) 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 互不相容,则有

$$\mu_n(\bigcup_{i=1}^{m} A_i) = \sum_{i=1}^{m} \mu_n(A_i)$$

性质(1)、(2)显然成立.

对性质(3),下面仅就 $m=2$ 的情形给出证明:

设在 n 次重复试验中,A_1 出现了 n_1 次,A_2 出现了 n_2 次,则 $\mu_n(A_1)=\frac{n_1}{n}$,$\mu_n(A_2)=\frac{n_2}{n}$,因为 A_1 与 A_2 互不相容,所以 $A_1 \cup A_2$ 出现了 n_1+n_2 次,于是有

$$\mu_n(A_1 \cup A_2) = \frac{n_1+n_2}{n} = \frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} = \mu_n(A_1) + \mu_n(A_2)$$

为研究事件的概率,人们曾作过投硬币的试验,并将其频率统计列表,如表 1—1、表 1—2 所示,表中 A 表示出现“正面”.

表 1—1

实验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_A	$\mu_n(A)$	n_A	$\mu_n(A)$	n_A	$\mu_n(A)$
1	4	0.8	25	0.50	251	0.502
2	2	0.4	21	0.42	249	0.498
3	3	0.6	22	0.44	248	0.496
4	4	0.8	26	0.52	250	0.500
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	25	0.50	261	0.522

表 1—2

试验者	n	n_A	$\mu_n(A)$
德·摩根	2048	1061	0.5181
蒲丰	4040	2048	0.5069
费勒	10000	4979	0.4979
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005
维尼	30000	14994	0.4998

从上述数据不难看出,在相同条件下进行的重复试验,同一个事件出现的频率是不尽相同的,也就是说频率具有波动性.但是,当试验次数很大时,频率总是在某一个固定的数值 p(上述试验中 $p=0.5$)附近摆动,并且随着试验次数无限增大,频率与数值 p 相差很大的可能性越来越小(这将在第五章有比较详细的描述),也就是说频率具有稳定性,数值 p 便是频率的稳

定值.显然,频率如果稳定于较小的数值,则表明相应事件出现的可能性较小,反之,表明事件出现的概率较大.

大量的随机试验显示:尽管频率具有波动性,然而频率也具有稳定性.频率的稳定性,正是随机现象的统计规律的体现,频率的稳定值 p 正是相应事件发生的可能性大小的数值度量.因此,我们将频率的稳定值 p 作为相应事件的概率是合理的.

由于频率的稳定值是客观存在的,因此对于任何一个事件 A,描述它发生的可能性大小的概率值 $P(A)$也是客观存在的,由频率的三条性质使人们很自然地认为事件的概率值应具备相应的三条基本性质.基于此,建立了概率的公理化定义.

1.2.3 概率的数学定义

定义 1.2 设 E 为一个随机试验,Ω 是 E 的样本空间,对于 E 的每一个事件 $A(A\subset\Omega)$,都赋予一个实数 $P(A)$,若 $P(A)$满足以下三条公理,则称 $P(A)$为事件 A 的概率.

公理 1　**非负性**:对于任一事件 A,有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

公理 2　**正则性**:$P(\Omega)=1$.

公理 3　**可列可加性**:若 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 为可列无穷多个互不相容的事件,则

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

由上可知,对于试验 E 的任意一个确定的随机事件 A,所谓 A 的概率 $P(A)$,实际上是一个定义在由试验 E 的所有随机事件组成的集合到$[0,1]$上的函数(布尔代数)在自变量取事件 A 时的函数值,如果令 $\mathscr{F}=\{A|A\subset\Omega\}$,$D=[0,1]$,则 $P(A)$是由 $\mathscr{F}$ 到 D 的函数.

1.2.4 概率的性质

由概率的公理化定义出发,可推出概率的性质:

性质 1　$P(\varnothing)=0$.

证明　因为

$$\varnothing = \varnothing \cup \varnothing \cup \cdots$$

由概率的可加性,得

$$P(\varnothing) = P(\varnothing) + P(\varnothing) + \cdots$$

又由概率的非负性,所以有

$$P(\varnothing) = 0.$$

此性质说明,不可能事件的概率为零.但需要指出的是,概率为零的事件不一定是不可能事件(见第二章 § 2.3 节).

性质 2　若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为有限个互不相容事件,则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \tag{1.1}$$

证明　因为

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \varnothing \cup \cdots$$

由概率的可列可加性和性质 1,有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

性质 3 对任一事件 A,有

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) \tag{1.2}$$

证明 因为

$$A \cup \overline{A} = \Omega \text{ 且 } A\overline{A} = \varnothing$$

由概率的正则性和性质 2,有

$$P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

所以,有

$$P(A) = 1 - P(\overline{A})$$

性质 4 若 $A \subset B$,则

$$P(B - A) = P(B) - P(A) \tag{1.3}$$

证明 因为 $A \subset B$,所以 $B = A \cup (B - A)$,又由于 $A \cap (B - A) = \varnothing$,由性质 2,有

$$P(B) = P(A) + P(B - A)$$

所以,有

$$P(B - A) = P(B) - P(A)$$

推论 对任意的事件 A、B,有

$$P(A - B) = P(A) - P(AB) \tag{1.4}$$

性质 5 对于任意两个事件 A、B,有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \tag{1.5}$$

证明 因为 $A \cup B = A \cup (B - AB)$,又 $A \cap (B - AB) = \varnothing$,$AB \subset B$,由性质 2 与性质 4,有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - AB) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

这一性质可推广到有限个事件的情形,即

$$\begin{aligned} P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = & \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_i A_j) \\ & + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_i A_k A_j) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n) \end{aligned} \tag{1.6}$$

此式称为**概率一般加法公式**.

例 1 设事件 A,B 的概率分别分 $\frac{1}{3}$,$\frac{1}{2}$. 在下列三种情况下分别求 $P(B\overline{A})$ 的值:

(1) A 与 B 互斥;

(2) $A \subset B$;

(3) $P(AB) = \frac{1}{8}$.

解 由概率的性质,可得 $P(B\overline{A}) = P(B) - P(AB)$.

(1) 因为 A 与 B 互斥,所以 $AB = \varnothing$,$P(B\overline{A}) = P(B) - P(AB) = P(B) = \frac{1}{2}$

(2) 因为 $A \subset B$;所以 $P(B\overline{A}) = P(B) - P(AB) = P(B) - P(A) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

(3) $P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$

例 2 某地共发行 A、B、C 三种报纸，调查表明居民家庭中订购 A 报纸的有 45%，订购 B 报纸的有 35%，订购 C 报纸的有 30%，同时订购 A、B 报纸的有 10%，同时订购 A、C 报纸的有 8%，同时订购 B、C 报纸的有 5%，同时订购 A、B、C 报纸的有 3%. 试求下列事件的概率：(1)只订购 A 报纸；(2)只订购 A 与 B 报纸；(3)至少订购一种报纸；(4)不订购任何报纸.

解 设 A、B、C 分别表示订购 A 报、B 报、C 报的事件，由题设，有 $P(A)=0.45$，$P(B)=0.35$，$P(C)=0.3$，$P(AB)=0.1$，$P(AC)=0.08$，$P(BC)=0.05$，$P(ABC)=0.03$

(1) $P(A\overline{B}\overline{C})=P(A-B-C)=P(A-AB-AC)=P(A-A(B\cup C))$

$=P(A)-P(AB\cup AC)=P(A)-P(AB)-P(AC)+P(ABC)$

$=0.45-0.1-0.08+0.03=0.3$

(2) $P(AB\overline{C})=P(AB-C)=P(AB-ABC)=P(AB)-P(ABC)=0.1-0.03=0.07$

(3) $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

$=0.45+0.35+0.3-0.1-0.08-0.05+0.03=0.9$

(4) $P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)=1-0.9=0.1$

§1.3 古典概型与几何概型

1.3.1 古典概型

在历史上人们最早研究的随机试验是“抛硬币，掷骰子”之类的问题. 对于这类随机试验，直观上可以清楚地看到应如何用数值来度量事件出现的可能性大小，它的有关事件的概率可直接通过计算得出.

定义 1.3 称具有以下两个特点的随机试验 E 为**古典型随机试验**(简称**古典概型**)：

(1) 有限性：试验 E 的样本空间 Ω 中只含有有限多个基本事件；

(2) 等可能性：每次试验中它的各个基本事件出现的可能性大小都相等.

对于一个古典概型，若样本空间 Ω 中样本点的总数为 n，事件 A 包含样本点个数为 m_A (m_A 也称为 **A 的有利场合数**)，则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{m_A}{n}=\frac{\text{事件 } A \text{ 所含样本点数}}{\Omega \text{ 中样本点总数}} \tag{1.7}$$

容易验证，(1.7)式满足概率的三条公理.

例 1 将一枚完全均匀的硬币连抛两次，记 A=“只有一次出现正面”，B=“至少一次出现正面”，试求事件 A 与 B 的概率.

解 该试验的样本空间为 Ω={(正面，正面)，(正面，反面)，(反面，正面)，(反面，反面)}，其中共有 4 个基本事件，且每个基本事件的出现是等可能的，所以试验是古典概型.

由题设条件可得

A={(正面，反面)，(反面，正面)}

B={(正面，正面)，(正面，反面)，(反面，正面)}

可知

$$n=4, m_A=2, m_B=3.$$

故由公式(1.7)得

$$P(A)=\frac{m_A}{n}=\frac{2}{4}=0.5$$

$$P(B)=\frac{m_B}{n}=\frac{3}{4}=0.75$$

例 2　在 1～9 的整数中可重复的随机取 6 个数组成 6 位数,求下列事件的概率:

(1) 6 个数完全不同;

(2) 6 个数不含奇数;

(3) 6 个数中 5 恰好出现 4 次.

解　从 9 个数中允许重复的取 6 个数进行排列,共有 $n=9^6$ 种排列方法.

(1) 事件 A="6 个数完全不同"的取法有 $m_A=P_9^6$ 种取法,故

$$P(A)=\frac{m_A}{n}=\frac{9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4}{9^6}=0.11$$

(2) 事件 B="6 个数不含奇数"的取法. 因为 6 个数只能在 2,4,6,8 四个数中选,每次有 4 种取法,所以有 $m_B=4^6$ 取法. 故

$$P(B)=\frac{m_B}{n}=\frac{4^6}{9^6}=0.0077$$

(3) 事件 C="6 个数中 5 恰好现 4 次"的取法. 因为 6 个数中 5 恰好出现 4 次是 6 次中的任意 4 次,出现的方式有 C_6^4 种,剩下的两种只能在 1,2,3,4,6,7,8,9 中任取,共有 8^2 种取法. 故

$$P(C)=\frac{m_C}{n}=\frac{C_6^4 8^2}{9^6}=0.0018$$

例 3　袋中装有 10 个小球,其中 4 个红色的,6 个白色的. 分别按:

(1) 放回抽样(每次取一个,取出后就放回);

(2) 不放回抽样(每次取一个,取出后不再放回)的方式随机地连续从袋中取 3 个球.

试求事件 A="3 个球都是白色球" 和事件 B="2 个红色球 1 个白色球"的概率.

解　(1) 放回抽样(重复抽样)

由于每次取出的小球看过颜色后再放回袋中,所以每次都是 10 个球中抽取,样本空间的基本事件即为从 10 个小球中每次取一个连取 3 次的所有可能取法,有 $10^3=1000$ 个,即样本空间的基本事件总数 $n=10^3=1000$.

而 A 中含有的基本事件数 m_A,即是每次从 6 个白球中取出一个,连取 3 次的不同取法数为 6^3,即 $m_A=6^3=216$.

因此　　$$P(A)=\frac{m_A}{n}=\frac{6^3}{10^3}=0.216.$$

而 B 中含有的样本点数 m_B 即是 3 次抽取中有 2 次取的是红球,1 次取的是白球的不同取法数,于是 $m_B=C_3^2\times 4^2\times 6$,所以有

$$P(B)=\frac{m_B}{n}=\frac{C_3^2\times 4^2\times 6}{10^3}=0.288$$

(2) 不放回抽样(无放回抽样)

由于每次取出小球看过颜色后不再放回,所以第 1 次有 10 个球可取,任取一个有 10 种可能取法,而第 2 次只能从剩下的 9 个球中抽取,有 9 种不同取法,同理可知,第 3 次只有 8 种取法. 因此,样本空间中的基本事件总数 $n=10\times 9\times 8$.

同样的分析可知,事件 A 所含的基本事件数 $m_A=P_6^3=6\times 5\times 4$,事件 B 所含的基本事件数为 $m_B=C_3^2P_4^2P_6^1=3\times 4\times 3\times 6$.

所以有

$$P(A)=\frac{6\times 5\times 4}{10\times 9\times 8}=\frac{1}{6}\approx 0.167$$

$$P(B)=\frac{3\times 4\times 3\times 6}{10\times 9\times 8}=0.3$$

1.3.2　几何概型

在概率论的发展初期,人们就认识到,仅假定样本空间为有限集是不够的,有时需要处理有无穷多个样本点的情形. 我们先看下面两个例子.

例 4　用计算机在[0,1]区间上任打出一个随机数 x,求 x 小于$\frac{1}{3}$的概率.

例 5　随机地在单位圆内任掷一点 M,求 M 点到原点距离小于$\frac{1}{2}$的概率.

以上两个例子都具有"等可能性"的性质. 在前一例中,我们认为随机数 x 在[0,1]上任何一处出现的机会均等,其概率应只与区间$[0,\frac{1}{3}]$的长度有关,应该等于$\frac{1}{3}$;后一例中,我们亦认为单位圆中每一点被掷到的机会均等,只要 M 点落入以原点为圆心,以$\frac{1}{2}$为半径的小圆内,对应的事件就会发生,其概率应该为小圆面积与大圆面积之比,即为$\frac{1}{4}$.

为了研究的方便,我们引入几何概型的定义.

定义 1.4　如果试验 E 的样本空间为某一可度量的区域 Ω,并且 Ω 中任一子区域 A 出现的可能性大小与该区域的几何度量成正比,而与 A 的形状和位置无关,则称 E 为**几何型随机试验**,简称**几何概型**. 几何概型中随机事件的概率称为**几何概率**.

可知,对于几何概型 E,若其样本空间 Ω 为欧氏空间的一个区域,以 $m(\Omega)$表示 Ω 的几何度量(一维为长度,二维为面积,三维为体积等). $A\subset\Omega$ 是 Ω 中一个可以度量的子集,则事件 A 出现的概率为

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)} \tag{1.8}$$

例 6　(会面问题)两人约定于 0 到 T 时间内在某地相见,先到者等待 $t(t\leqslant T)$时,若未见后到者便离去. 假设两人在 0 到 T 时间内任一时刻到达是等可能的,试求两人能会面的概率.

解　以 x,y 分别表示两人的到达时刻,则 $0\leqslant x\leqslant T$,　$0\leqslant y\leqslant T$,这样(x,y)便构成一个正方形 Ω,因此,两人会面相当于向平面区域 $\Omega=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant T,\quad 0\leqslant y\leqslant T\}$内随机地投掷点. 记 $A=$"两人能会面",则 A 发生的充要条件为投掷的点落在平面区域