普通高等教育“十一五”国家级规划教材

高等数学

第2版 下册

同济大学数学系 主编

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

高 等 数 学

第 2 版　下册

同济大学数学系　主编

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下册/同济大学数学系主编. —2 版. —上海：
同济大学出版社，2009. 10

ISBN 978-7-5608-4164-9

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 同…　Ⅲ. 高等数学—高等学校—教材
Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 171005 号

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

高等数学　第 2 版　下册

同济大学数学系　主编

责任编辑　卞玉清　　责任校对　徐春莲　　封面设计　陈益平

出版发行　同济大学出版社　　www.tongjipress.com.cn
（地址：上海市四平路 1239 号　邮编：200092　电话：021-65985622）
经　　销　全国各地新华书店
印　　刷　同济大学印刷厂
开　　本　787mm×960mm　1/16
印　　张　17.5
印　　数　1—16 000
字　　数　350 000
版　　次　2009 年 10 月第 2 版　　2009 年 10 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5608-4164-9

定　　价　27.00 元

前　　言

我国高等学校的教学改革正在逐步地深入，教材的改革是整个教学改革的一个重要方面. 本书正是按照新形势下教材改革的精神，遵循《工科类本科数学基础课程教学基本要求》(修订稿)的要求，使之能够适应更多的学校与专业对高等数学这门基础课程的具体教学要求而编写的.

当前，许多高等学校以培养应用型科学技术人才为主要目标，针对这样一种具体情形，本书遵循的编写原则是：在数学内容的深度和广度方面基本达到高等工科院校《高等数学课程教学基本要求》的要求，渗透现代化教学思想和手段，特别加强学生应用能力的培养，力求做到易教、易学、易懂，故本书不仅适合新世纪应用型本科生的需要，也易为高职、高专生所乐于接受. 本书的编写力图做到以下几点：

(1) 以显示微积分的直观性与广泛的应用性为侧重，避免过多地涉及其严格的逻辑基础方面的内容. 例如，我们从直观的角度引进极限的概念(只是为了照顾某些学校或专业对本课程的较高要求，在带"*"号的条目内初步介绍了极限概念的严格的数学表述，而且仅此而已)；又例如，基本初等函数在其定义域内是连续的，这是微积分中的一个重要结论. 在本书中，为了使学生能够尽早地进入到极限运算方法的学习中去，甚至在介绍函数连续的概念之前，就以"基本初等函数在其定义域内每一点处的极限都存在，并且等于函数在该点处的函数值"这样一种方式，以学生在中学数学学习中所得到的相关知识为基础，直观地给出了这个结论. 我们指出可以用极限的严格表述来证明这个结论，但是并没有这样做. 本书主要强调的是微积分的运算以及运用，运用中涉及到的函数主要是初等函数. 我们希望在这样一个学习过程中，初学者能够理解并接受微积分的基本思想与方法，既获得知识，获得学习其他课程的工具，也提高自己的数学素养.

(2) 在内容的取舍方面，充分考虑到当前许多学校高等数学的教学时数不可避免地被压缩的实际情况，以及计算机科学的迅速发展，本书对某些内容作了适当的精简. 例如，在不定积分这部分内容中，介绍了不定积分的基本运算方法，但是在技巧性方面较之于以往传统的教材有所不同，我们控制了例题与习题的难度；再如，对函数的作图、方程的近似解、数值积分等内容，只介绍基本原理与方法. 我们还考虑到不同的学校与专业，对高等数学课程的教学会有不尽相同的目标，所以在内容的编排上也尽可能地按照深浅程度等因素分条目叙述，以利于教学过程中的取舍.

（3）内容的叙述方面力求详细、易懂，配备较多的例题与习题，尤其是多领域的应用性例题与习题.我们希望初学者易于接受与理解，并且从中感受到微积分的魅力.

本书分为上、下两册.上册包括函数、极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学以及常微分方程初步等内容，下册包括无穷级数、空间解析几何与向量代数、多元函数微分学以及多元函数积分学等内容.每节之后配有习题，习题按照难易程度分为 A 和 B 两级.每册书末附有习题答案.

本书由同济大学数学系黄珏、蒋福民和刘庆生负责编写，黄珏主审.

由于编者水平有限，加之时间仓促，书中难免有不妥之处，错误亦在所难免，希望专家、同行与广大读者批评指正.

编　者

2009 年 10 月

目　录

第七章 空间解析几何与向量代数

第一节 空间直角坐标系以及曲面、曲线的方程

一、空间直角坐标系

1. 点的坐标

在平面解析几何学中，我们通过建立平面直角坐标系，使平面上的点与一对有序实数之间建立了一一对应关系，从而使平面曲线与方程对应. 这样就能够利用代数的方法研究平面几何问题.

同样，为了运用代数的方法去研究空间的图形——曲线与曲面，就需要建立空间直角坐标系，使空间内的点与三元数组之间建立起一一对应关系.

在空间取定一点 O 和三条都以 O 为原点的两两垂直的数轴，依次记为 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）、z 轴（竖轴），统称为坐标轴，它们组成一个空间直角坐标系，称为 $Oxyz$ 坐标系.

建立空间直角坐标系时，习惯上取右手系，即 x,y,z 三条轴的方向符合右手法则，这就是：以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从 x 轴正向以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向 y 轴正向时，大拇指的指向就是 z 轴的正向（图 7-1）.

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面，这样定出的平面统称为坐标面. x 轴及 y 轴所确定的坐标面称为 xOy 面，另两个由 y 轴及 z 轴与由 z 轴及 x 轴所确定的坐标面分别称为 yOz 面及 zOx 面. 三个坐标面把空间分成八个部分，每一部分称为一个卦限. 由 x 轴、y 轴与 z 轴正半轴确定的那个卦限称为第一卦限，其他第二、第三、第四卦限在 xOy 面的上方，按逆时针方向确定. 第五至第八卦限在 xOy 面的下方，由第一卦限之下的第五卦限按逆时针方向确定，这八个卦限分别用 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ，Ⅵ，Ⅶ，Ⅷ表示（图 7-2）.

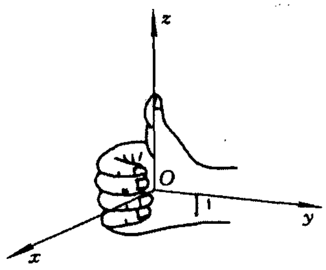


图 7-1

设 M 是空间的一点，过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴与 z 轴并交 x 轴、y 轴与 z 轴于 P,Q,R 三点. 点 P,Q,R 分别称为点 M 在 x 轴、y 轴与 z 轴

上的投影. 设这三个投影在 x 轴、y 轴与 z 轴上的坐标依次为 x,y 与 z，于是，空间一点 M 唯一地确定了一个有序数组 x,y,z. 反过来，对给定的有序数组 x,y,z，可以在 x 轴上取坐标为 x 的点 P，在 y 轴上取坐标为 y 的点 Q，在 z 轴上取坐标为 z 的点 R，过 P,Q,R 分别作垂直于 x 轴、y 轴与 z 轴的三个平面，这三个平面的交点 M 就是有序数组 x,y,z 确定的唯一点(图 7-3). 这样，空间的点与有序数组 x,y,z 之间就建立了一一对应的关系. 这组数 x,y,z 称为点 M 的坐标(依次称 x,y 与 z 为点 M 的横坐标、纵坐标与竖坐标)，并可记为 $M(x,y,z)$. 另外，由所作的三个平面以及三个坐标平面，形成一个长方体 $RHMK—OPNQ$，其中棱 MN、MK 与 MH 分别垂直于 xOy 面、yOz 面与 zOx 面，点 N,K 与 H 也分别位于相应的坐标面上，这三点分别被称为点 M 在 xOy 面、yOz 面与 zOx 面上的投影.

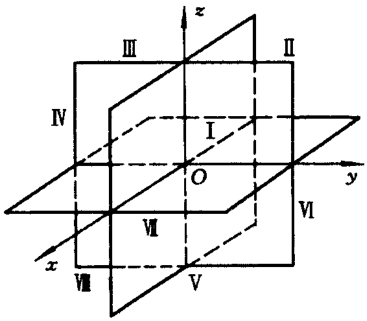


图 7-2

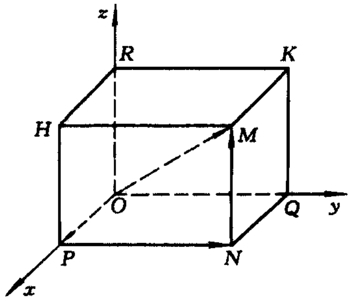


图 7-3

2. 空间两点间的距离

设 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2)$ 是空间两点，为了表达点 P_1 与 P_2 之间的距离，我们过点 P_1 与 P_2 各作三个分别垂直于 x 轴、y 轴与 z 轴的平面，这六个平面围成一个以 P_1P_2 为对角线的长方体(图 7-4). 从图中易见，该长方体各棱的长度分别是

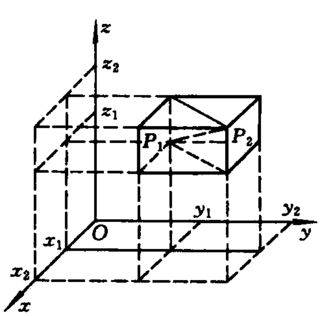


图 7-4

$$|x_2-x_1|,\quad |y_2-y_1|,\quad |z_2-z_1|.$$

于是，对角线 P_1P_2 的长度，亦即空间两点 P_1 与 P_2 间的距离为

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

例 1 证明：以 $M_1(4,3,1)$，$M_2(7,1,2)$，$M_3(5,2,3)$ 为顶点的三角形是一个等腰三角形.

解 由两点间的距离公式可得

$$|M_1M_2|=\sqrt{(7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2}=\sqrt{14},$$

$$|M_2M_3|=\sqrt{(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{6},$$

$$|M_1M_3|=\sqrt{(5-4)^2+(2-3)^2+(3-1)^2}=\sqrt{6}.$$

由 $|M_1M_3|=|M_2M_3|$ 可知，$\triangle M_1M_2M_3$ 是等腰三角形.

例 2 在 z 轴上求与两点 $A(-4,1,7)$ 和 $B(3,5,-2)$ 等距离的点.

解 因为所求的点 M 在 z 轴上，故可设该点坐标为 $M(0,0,z)$，依题意有

$$|MA|=|MB|,$$

即

$$\sqrt{(-4-0)^2+(1-0)^2+(7-z)^2}=\sqrt{(3-0)^2+(5-0)^2+(-2-z)^2}.$$

两边去根号，解得

$$z=\frac{14}{9}.$$

所以所求的点为 $M\left(0,0,\frac{14}{9}\right)$.

二、曲面及其方程

1. 曲面方程的概念

曲面是空间动点的轨迹. 如果曲面 S 上的点 (x,y,z) 都满足三元方程

$$F(x,y,z)=0, \tag{1}$$

并且满足方程(1)的点都位于曲面 S 上，那么，方程(1)就称为曲面 S 的方程，而曲面 S 就称为方程(1)的图形(图 7-5).

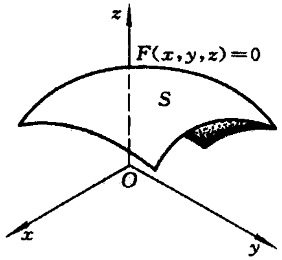


图 7-5

例 3 求与定点 $M_0(1,2,-1)$ 相距为 2 的点的轨迹方程.

解 设 $M(x,y,z)$ 为任一与定点 $M_0(1,2,-1)$ 相距为 2 的点. 由两点间的距离公式得到

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2}=2.$$

两边平方后，则有

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=2^2.$$

该轨迹方程就是以点 $M_0(1,2,-1)$ 为球心、半径为 2 的球面方程.

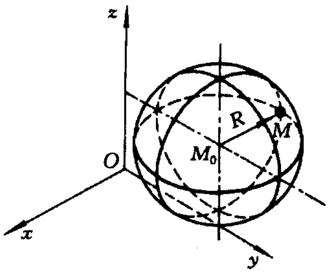


图 7-6

一般地，以点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为球心、以 R 为半径的球面(图 7-6)的方程为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.$$

2. 柱面方程

在平面解析几何中，方程

$$x^2+y^2=R^2 \tag{2}$$

的图形是 xOy 面上圆心在坐标原点 O、半径为 R 的圆. 然而在空间直角坐标系中，xOy 面上的点的坐标为$(x,y,0)$. 如果点$(x,y,0)$满足方程(2)，那么，对一切实数 z，点(x,y,z)也满足方程(2). 因此，经过圆上任一点作平行于 z 轴的直线，这些直线上的点都满足方程(2)；反之，满足方程(2)的点也必然是这些直线上的点. 这说明，在空间解析几何中，方程(2)的图形是一张曲面，它是由所有经过 xOy 面上的圆 $x^2+y^2=R^2$ 并且平行于 z 轴的直线所构成的曲面，该曲面称为母线平行于 z 轴的圆柱面(图7-7).

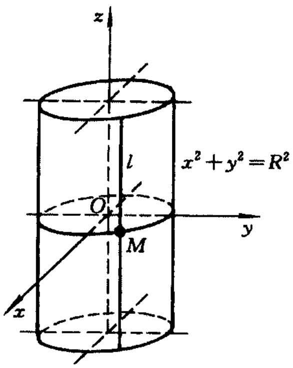
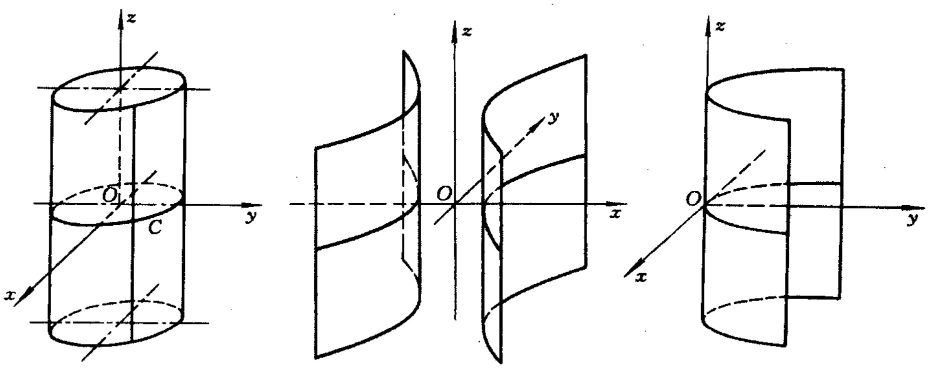


图 7-7

一般地，平行于定直线并沿定曲线 C 移动的直线 l 所形成的曲面称为柱面；定曲线 C 称为柱面的准线，而这些直线 l 称为柱面的母线.

对应于 xOy 平面上的二次曲线，在空间直角坐标系中，我们得到了相应的母线平行于 z 轴的二次柱面(图 7-8).



(a) (b) (c)

图 7-8

(a) 椭圆柱面　　$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$；

(b) 双曲柱面　　$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$；

(c) 抛物柱面($a>0$)　$y=ax^2$.

同样，对应于 xOy 平面上的直线方程，在空间直角坐标系中，它的图形是一张平面. 例如方程

$$x+y=1$$

在 xOy 平面上表示一条直线，而在空间直角坐标系中，它表示一张母线平行于 z 轴的柱面，事实上是一张平面(图 7-9).

三、空间曲线及其方程

1. 空间曲线的一般方程

空间曲线可以看作两张曲面的交线. 设

$$F(x,y,z)=0 \quad 与 \quad G(x,y,z)=0$$

是两张曲面的方程，它们的交线为 C(图 7-10). 因为曲线 C 上任何点的坐标应同时满足这两张曲面的方程，所以应满足方程组

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0; \end{cases} \tag{3}$$

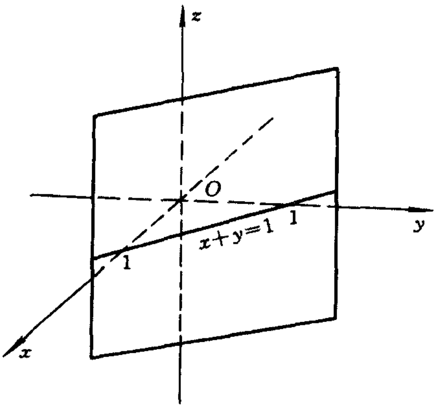


图　7-9

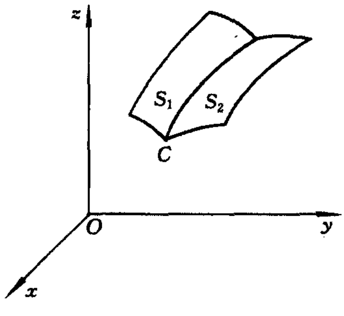


图　7-10

反过来，如果点 M 不在曲线 C 上，那么，它不可能同时在这两张曲面上，所以它的坐标不满足方程组(3). 因此，曲线 C 可以用方程组(3)来表示. 方程组(3)称为空间曲线 C 的一般方程.

例 4 说明下列方程组所确定的是什么曲线,并画出曲线的图形:

(1) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4, \\ x+y=1; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x^2-\dfrac{y^2}{4}=1, \\ z=1. \end{cases}$

解 (1) $x^2+y^2+z^2=4$ 表示球心在坐标原点、半径为 2 的球面,而$x+y=1$ 表示平行于 z 轴的平面. 因此,方程组表示这球面与平面的交线,是如图7-11(a)所示的圆.

(2) $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$ 是母线平行于 z 轴的双曲柱面,$z=1$ 是平行于 xOy 面的平面. 方程组表示的曲线是这柱面与平面的交线,是由 xOy 平面上的双曲线沿着 z 轴的正向作了 1 个单位的平移所得的位于平面 $z=1$ 上的双曲线,如图 7-11(b)所示.

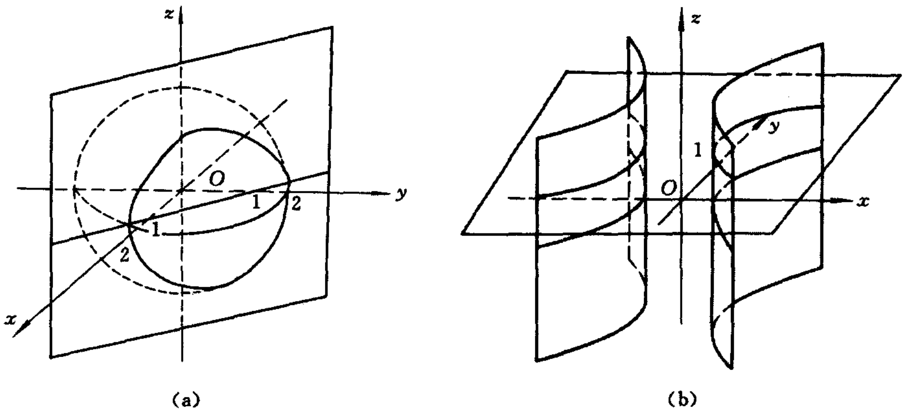


图 7-11

2. 空间曲线的参数方程

空间曲线 C 的方程除了一般方程之外,还可以用参数形式表示,只要将 C 上的动点坐标 x,y,z 表示为 t 的函数:

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \\ z=z(t). \end{cases} \tag{4}$$

当给定 $t=t_1$ 时,就得到 C 上的一个点(x_1,y_1,z_1),随着 t 的变动,便可以得到曲线 C 的全部点. 方程组(4)称为空间曲线 C 的参数方程. 例如,如果空间一点 M 在圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 上以角速率 ω 绕 z 轴旋转,同时又以线速率 v 沿平行于 z

轴的正方向上升(其中 ω, v 都是常数),那么,点 M 构成的图形称为螺旋线(图7-12). 取时间 t 为参数,我们可以推导出它的参数方程为

$$\begin{cases} x=a\cos\omega t, \\ y=a\sin\omega t, \\ z=vt. \end{cases}$$

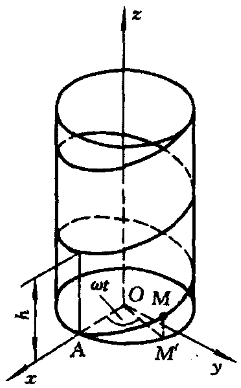


图 7-12

若令参数 $\theta=\omega t$,并记 $b=\dfrac{v}{\omega}$,则螺旋线的参数方程可以写作

$$\begin{cases} x=a\cos\theta, \\ y=a\sin\theta, \\ z=b\theta. \end{cases}$$

这是一种常用的曲线. 比如机用螺线的外缘曲线就是螺旋线. 当 θ 从 θ_0 变到 $\theta_0+2\pi$时,点 M 沿螺线升高了 $h=2\pi b$. 这一高度在工程技术上称为螺距.

3. 空间曲线在坐标平面上的投影

设 C 是一条空间曲线. 从 C 上各点作 xOy 面的垂线,由得到的垂足所构成的曲线 C'就称为曲线 C 在 xOy 面上的投影或投影曲线(图 7-13). 下面我们将推出在坐标面上的投影曲线所满足的方程.

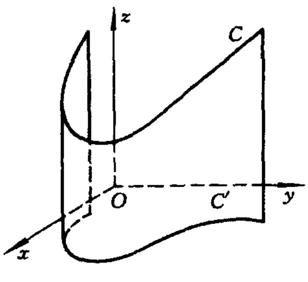


图 7-13

设 C 的一般方程为

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases} \tag{5}$$

我们消去方程组中的变量 z 后就得到一个不含变量 z 的方程:

$$H(x,y)=0. \tag{6}$$

方程(6)所表示的是母线平行于 z 轴的柱面. 由于满足方程(5)的点都满足方程(6),因此曲线 C 含在方程(6)所表示的柱面内. 因而方程组

$$\begin{cases} H(x,y)=0, \\ z=0. \end{cases} \tag{7}$$

所表示的位于 xOy 面上的曲线也就包含曲线 C 在 xOy 面上的投影 C'. 因此投影曲线 C'上的点都满足方程组(7).

类似地,如果我们分别消去方程组(5)中的变量 y 或 x,得到方程

$$R(x,z)=0 \quad \text{或} \quad T(y,z)=0,$$

那么,方程组

$$\begin{cases} R(x,z)=0, \\ y=0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} T(y,z)=0, \\ x=0 \end{cases}$$

所表示的曲线分别包含曲线 C 在 zOx 面或 yOz 面上的投影.

例 5 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4, \\ 2z-y=0 \end{cases}$ 分别在 xOy 面与 zOx 面上的投影的方程.

解 由方程组的第二式解得 $z=\dfrac{y}{2}$. 将它代入方程组的第一式,得到

$$x^2+y^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=4,$$

即

$$x^2+\frac{5}{4}y^2=4.$$

因此,该曲线在 xOy 面上的投影包含于方程为

$$\begin{cases} x^2+\dfrac{5}{4}y^2=4, \\ z=0 \end{cases} \tag{8}$$

的曲线内. 但容易看出该空间曲线在 xOy 面上的投影也就是方程(8)所表示的曲线.

将原方程组中的变量 y 消去,得到

$$x^2+5z^2=4.$$

经过类似的观察,得到方程

$$\begin{cases} x^2+5z^2=4, \\ y=0 \end{cases}$$

就是该曲线在 zOx 平面上投影的方程.

习　题　7-1

(A)

1. 在空间直角坐标系中,指出下列各点在哪个卦限?

$A(1,-2,3)$; $B(2,3,-4)$; $C(2,-3,-4)$; $D(-2,-3,1)$.

2. 求点 $(1,-2,-1)$ 关于各坐标面、各坐标轴、坐标原点的对称点的坐标.

3. 边长为 a 的立方体的一个顶点在原点，三条棱分别在三条正半轴上，求各顶点的坐标.

4. 自点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 分别作各坐标面和各坐标轴的垂线，写出各垂足的坐标.

5. 如何判断空间一点 (x_0,y_0,z_0) 是否在球面 $x^2+2x+y^2+z^2-2z=0$ 的内部、外部或是在球面上？

6. 试证明以三点 $A(4,1,9)$，$B(10,-1,6)$，$C(2,4,3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

7. 求满足下列条件的动点轨迹的方程：

(1) 到点 $(-4,3,4)$ 的距离等于到 xOy 面的距离；

(2) 到 y 轴的距离是到 z 轴距离的 4 倍；

(3) 到点 $(1,2,1)$ 与到点 $(2,0,1)$ 的距离分别等于 3 与 2.

8. 指出下列方程所表示的曲线：

(1) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=25, \\ x=3; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x^2-2x+y^2=0, \\ z=2; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x^2+4y^2+9z^2=36, \\ z=-1; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x^2-y^2-2z^2=1, \\ y=1. \end{cases}$

9. 求下列曲线在 xOy 平面上的投影曲线的方程：

(1) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9, \\ x+z=1; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=16, \\ x^2+z^2-y^2=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x^2+y^2-z=0, \\ z=x+1; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} z^2=x^2+y^2, \\ z^2=2y. \end{cases}$

10. 分别求母线平行于 x 轴及 y 轴而且通过曲线 $\begin{cases} 2x^2-y^2+3z^2=16, \\ x^2+y^2-z^2=4 \end{cases}$ 的柱面方程.

(B)

1. 画出下列曲线在第一卦限内的图形：

(1) $\begin{cases} x=1, \\ y=2; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2}, \\ x-y=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ x^2+z^2=a^2. \end{cases}$

2. 求上半球体 $0\leqslant z\leqslant \sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 与圆柱体 $x^2+y^2\leqslant ax(a>0)$ 的公共部分在 xOy 面与 zOx 面上的投影.

3. 求满足下列条件的球面方程：

(1) 中心在 $(2,-2,1)$ 并与 zOx 面相切；

(2) 与球面 $x^2+y^2+z^2-6x+4z-36=0$ 有相同的球心并且经过点 $(2,5,-7)$.

4. 试确定 k 分别取何值时，可以使球面 $x^2+y^2+2y+z^2-4z=k$ 分别与 xOy 面、zOx 面以及 x 轴相切？