

S. S. S.

新平面幾何學

譯 者

嚴幼芝 徐任吾 吳文俊

龍門聯合書局發行

三S新平面幾何學

譯者

嚴幼芝 徐任吾 吳文俊

龍門聯合書局發行

序

我和徐任吾君在十二年前，都在江蘇省立上海中學教算學。那時我們爲求教學便利起見，曾把三 S 平面何幾學 (Plane Geometry. by Schultze-Sevenook-Schuyler) 譯了出來，經中華書局代爲出版。全國中等學校採用的很多，再版竟達六十餘次。教師們所以樂於採用的緣故，實因此書說理既極嚴密而清楚；選材又饒興趣而適當，教的人容易教，學的人容易學，比較別種教本，的確有其不可磨滅的優點，譯者不過是很忠實的把他譯成中文罷了。

1935 年紐約高等學校算學主任教員 L. C. Stone，得到 Schultze 的同意，把原書整個改編一下，內容格外充實，於是引起我們重譯的動機。適值龍門出版公司努力於出版工作，我們就把這新的譯本貢獻給他。藉他的傳播力量，貢獻給全國的算學教師們。

自 Euclid 編著幾何學原本以來，數千年中絕少變更，惟教學方法，則日新月異。Stone 本其豐富的教學經驗，審慎周詳的選擇材料，把 Schultze 的原著改編得更爲好教易學了。茲特把他改編後值得我們注意的幾點介紹於下：

1. 本書在緒論中增加了許多作圖練習，量角器的應用方法，及大量的關於數的習題，藉於學習幾何學的本文以前，予

以更充分的研討。所以事實上這篇緒論就是具體而微的幾何學。

2. 在本書中特別重視作圖法，並注意作圖題的圖形怎樣完成，及怎樣運用點畫線表示題中所求的結果。

3. 本書對於軌跡有很詳盡的討論，使之簡單而容易了解。

4. 有些命題，則舉幾種證法，避免編者主觀的偏見。

5. 本書蒐集充分的材料，足敷應用，教師無須另覓補充教材。

6. 因為習題不限於 30° , 45° 和 60° 的角，所以對於三角函數也曾在第三編中詳加解釋，俾學者可以隨時拿來運用。

7. 本書常常提到三個向度的空間，藉以充分說明平面的概念。

8. 隨時隨地舉出作圖和數的練習，並詳為說明，使每個新定理的意義更為確切。

9. 許多有趣的材料，放在本書的附錄內，以供學者於普通平面幾何學課程以外的需要。

本書譯述時，得沈溯明程克猷兩先生的幫助不少，書此誌謝。

嚴幼芝識

中華民國三十三年八月八日

三S新平面幾何學

目 錄

緒論

第一編 直線和直線形

第二編 圓、作圖、軌跡

第三編 比例、相似多邊形、三角學

第四編 多邊形的面積

第五編 正多邊形、圓的度量

附 錄 極大和極小極限、十邊形、圓周率的計算

中西名詞對照表

記 號

$\cong$ 全同

$\neq$ 不等於

$>$ 大於

$<$ 小於

$\therefore$ 所以

$\perp$ 垂直於或垂直線

$\parallel$ 平行於或平行線

$\sim$ 相似

$\angle$ 角

$\sphericalangle$ 角（多數）

$\triangle$ 三角形

$\triangle$ 三角形（多數）

$\square$ 平行四邊形

$\square$ 平行四邊形（多數）

$\odot$ 圓

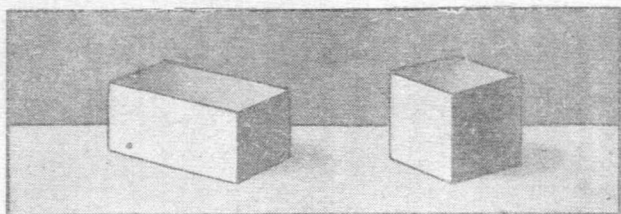
$\odot$ 圓（多數）

$\overset{\circ}{=}$ 以……度之

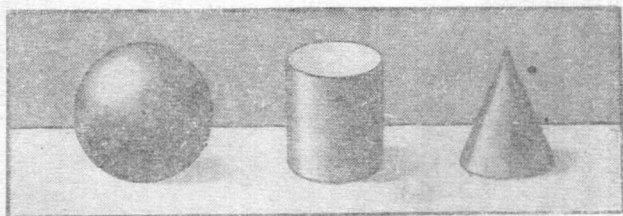
三 S 新平面幾何學

緒 言

自然界的物體（實物）必占據空間。若該物體有幾個平面時，譬如一個箱子，則有三個向度，叫做長，廣，和厚，（或高）這是大家熟悉的。



若物體有曲面時，譬如球，則其向度雖以半徑來表明，但是仍然占着三個向度的空間。



平面幾何學祇研究在一個平面上的圖形。若圖形是用直線構成的，則此圖形祇有二個向度。若含有曲線構成的，則其向度以半徑表之。

幾何學所研究的圖形和實例是我人日常生活中時常遇着的。讀者當能回答下列諸問題。

1. 什麼是角？
2. 什麼是平行線？
3. 什麼是三角形？ 正方形？
4. 直線時時改變他的方向嗎？
5. 直線能引伸到怎樣遠？
6. 二條直線能夠相交多少次？
7. 從一點到另一點能夠作幾條直線？

讀者對於上述 1, 2, 3 諸問題的答案，或者是不合科學的。一種科學如果沒有正確的定義，則不能求得合乎邏輯的進展。所以爲了上述諸問題中的圖形和將來探討的別種圖形，供給嚴格的合乎科學的定義是重要的。

4, 5, 6, 7 諸問題的答案必須有正確的方式，作爲進一步推究的基礎。

故第一步，必須學習正確的定義，正確的假設，和正確的作圖方法。

正確的敘述和合式的證明是學習幾何學的目標。鬆懈的敘述和攏統的推理在科學中沒有立足的餘地，尤以幾何學爲最。

I. 線的定義

1. 線祇有一個向度——長。

如“省界線”是表明兩個省分分界之處，沒有廣，祇有長。

2. 點是沒有向度的——祇有位置。

如一隻船在海洋裏的位置是一點，用經緯度表之。線上的點既沒有廣，又沒有厚。

3. 線上任意一點的方向不變更時，這線是直線。

從這一定義，容易推得：

(a) 直線是兩點間最短的距離。

(b) 兩直線祇能相交於一點。

(c) 兩點決定一直線；即兩點間祇能作一直線。

4. 折線含有二條或二條以上的直線。

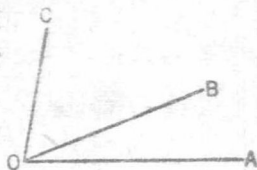
5. 曲線是在每一點上變更他的方向的。

在平面幾何學上所用的曲線祇限於圓或圓弧。

II. 角 的 定 義

6. 兩直線遇於一點，則成角，這點叫做頂點。

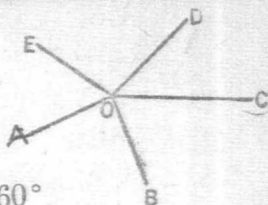
學習角的命名的方法是很重要的。如圖，在同一點或頂點 O ，有三個角其邊不相同，而各角是以其邊命名的。最小的一個角叫做 AOB ，最大的一個角叫做 AOC ，第三角叫做 BOC 。應注意中間的一個字母就是頂點。從圖知道最大的角是由其他兩個角構成的，而等於其和，即 $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$ 。又 $\angle AOC - \angle BOC = \angle AOB$ 。所以我們知道角是可以加減的。



習 題

1. $\angle BOD$ 等於那幾個角的和？

2. $\angle BOE$ 等於那幾個角的和?
 3. $\angle BOE - \angle EOC$ 等於那一個角?



環繞一點諸角的和叫做對於此點的角度之總量，等於 360° 或 360° 。

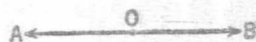
7. 角的二邊在同一直線上而向反對方向伸張的叫做平角，如 $\angle AOB$ 。

平角等於 180° 。

凡平角皆相等。

幾點鐘時一隻鐘的兩針成一個平角?

平角是繞一點的角度之總量的幾分之幾?



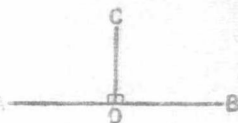
8. 直角是平角的一半；如 $\angle COB$ 及 $\angle COA$ 都是直角。

一直角有幾度?

凡直角皆相等。

幾點鐘時一隻鐘的兩針成一個直角?

直角是繞一點的角度之總量的幾分之幾?



9. 成直角的二條直線是垂線。 $CO \perp AB$ 及 $AB \perp CO$ 。

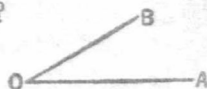
直角的兩邊是互相垂直的。

習題

1. 若 $\angle AOC = \angle COB$ ，何故 $CO \perp AB$?

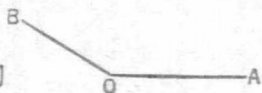
10. 比直角小的角叫做銳角。

11. 比直角大而比平角小的角



叫做**鈍角**。

12. 除直角及平角外，所有的角都叫做**斜角**。如銳角和鈍角都是斜角。

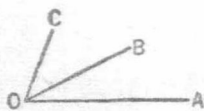


III. 成對的角的定義

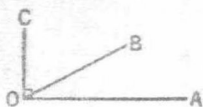
13. 若兩個角有共同的一點或公共的頂點，其間又有一條公共的邊，這兩個角叫做**鄰角**。如 $\angle AOB$ 及 $\angle BOC$ 是鄰角。

習題

1. $\angle AOB + \angle BOC$ 等於那一個角？
2. $\angle AOC - \angle BOC$ 等於那一個角？
3. $\angle AOC - \angle AOB$ 等於那一個角？



14. 假使兩個角的和等於一直角，這兩個角互為**餘角**。

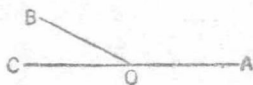


$\angle AOB$ 及 $\angle BOC$ 是互為餘角。

$\angle AOB$ 是 $\angle BOC$ 的餘角， $\angle BOC$ 是 $\angle AOB$ 的餘角。

[註] 每個角等於直角減去其餘角。假使互為餘角的兩個角相等，則他們各有多少度？

15. 假使兩個角的和等於一平角，這兩個角互為**補角**。



$\angle AOB$ 及 $\angle BOC$ 是互為補角。

$\angle AOB$ 是 $\angle BOC$ 的補角， $\angle BOC$ 是 $\angle AOB$ 的補角。

假使互為補角的兩個角相等，則他們各有多少度？

兩個直角是否互為補角？

平常兩個角互為補角時，一個是銳角，其他一個是鈍角。

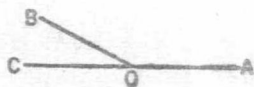
下列重要敘述，很容易從補角定義推得之：

補角之半互為餘角。

（平角之半是直角。）

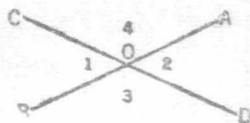
餘角之倍互為補角。

（直角之倍是平角。）



16. 兩直線相交而成的諸角中，

其地位相反的，叫做對頂角。



直線 AB 及 CD 相交於 O 而成四個角。

習 題

1. 指出四對鄰角。
2. 指出二對對頂角。
3. 指出四對補角。
4. 指出 $\angle AOC$, $\angle DOA$, $\angle BOC$ 及 $\angle BOD$ 的兩個補角。

IV. 角 的 度 量

17. 量角的單位是度，一度等於直角的 $\frac{1}{90}$ 。

一度分做六十等份，每份叫做分，即 $1^\circ = 60'$ 。

一分分做六十等份，每份叫做秒，即 $1' = 60''$ 。

18. 角的度量表：

$$60'' = 1'$$

$$60' = 1^\circ$$

$$90^\circ = \text{一直角}$$

$$180^\circ = \text{一平角}$$

$$360^\circ = \text{環繞一點的角度之總量}$$

習 題

1. 加:
$$\begin{array}{r} 23^\circ 47' \\ 37^\circ 34' \\ \hline \end{array}$$

2. 減:
$$\begin{array}{r} 40^\circ 23' \\ 17^\circ 35' \\ \hline \end{array}$$

3. 若環繞一點而有六個相等的角，
則每角有多少度？ $\angle FOC$ 是平角否？
 $\angle AOD$ 是平角否？

4. 若環繞一點而有四個相等的角，
則每角有多少度？每角叫做什麼角？
 AOC 是直線否？ DOB 呢？ DB 和
 AC 互相垂直否？何故？

5. 從 $45^\circ 45'$ ，直角及平角各減去 $30^\circ 30'$ 。

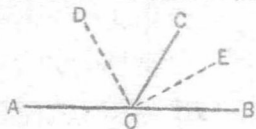
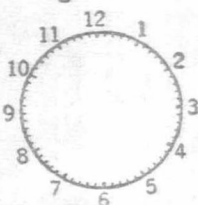
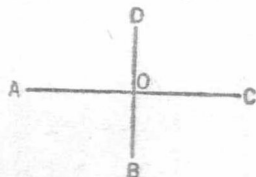
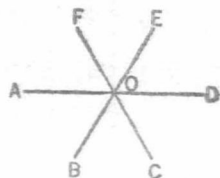
6. 在平角的 $\frac{2}{3}$ 上加直角之半。

7. 在鐘面上，表時的兩字間的地位有多少度？表分的一格的地位呢？

8. 三點鐘時鐘面上兩針所成的角是什麼角？六點鐘呢？九點鐘呢？十點鐘呢？六點半呢？五點半呢？

9. 用代數記號記：

(a) x° 的餘角。



(b) x° 的補角。

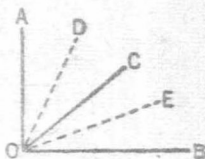
(c) x° 的餘角再加上 40° 。

10. 若 $\angle AOC = 120^\circ$, $\angle COB = 60^\circ$, 這兩個角的二等分線所成的 $\angle DOE$ 有多少度?

11. 若 AOB 是一直線又 $\angle AOC = x^\circ$, 則 $\angle AOC$ 及 $\angle COB$ 的二等分線所成的 $\angle DOE$ 有多少度? (示意: 先表出 $\angle COB$.)

12. 兩個相鄰的補角的二等分線所成的角是什麼角?

13. 若 $\angle AOC = 50^\circ$, $\angle COB = 40^\circ$, 則其二等分線 DO 及 OE 所成的角是什麼角?



14. 兩個相鄰的餘角的二等分線所成的角是什麼角?

餘角及補角的計算習題

1. 求 45° ; $47^\circ 11'$; $51^\circ 41' 27''$ 及 x° 各角的餘角。
2. 求 75° ; $77^\circ 9'$; $121^\circ 51' 24''$ 及 x° 各角的補角。
3. 一個角的餘角比此角多 20° ; 求此角的度數。
4. 一個角的補角比此角多 100° ; 求此角的度數。
5. 一個角的餘角比此角之半多 30° ; 求此角的度數。
6. 一個角的補角比此角之半多 120° ; 求此角的度數。
7. 那一種角等於他的補角?
8. 一個角的補角比他的餘角大多少度?
9. 一個角四倍於另一個角, 而這兩個角互為餘角, 求各角的度數。
10. $89^\circ 59' 60''$ 是那一種角?
11. 一個角的餘角是 47° , 此角有多少度? 80° 呢?

12. 求 150° 及 40° 之補角的餘角。
13. 求 $75^\circ, 19^\circ, 86^\circ$, 及 78° 之餘角的補角。
14. 54° 的餘角的補角有多少度?
15. 求 130° 的補角的餘角。
16. 一角的餘角和其補角的比是 $4:13$, 求此角。
17. 一角的餘角和其補角的和比其餘角之四倍少 25° , 求此角。
18. 一角的餘角和其補角的和是 120° , 求此角。
19. 一角的餘角和其補角的比是 $2:7$, 求此角。
20. 一角的補角比其餘角的五倍多 10° , 求此角。
21. 一角的補角七倍於其餘角, 求此角。
22. 若一角逐漸增大, 其餘角怎樣呢? 補角呢? 若一角逐漸縮小, 其餘角和補角怎樣變更?

23. 那一種角是沒有餘角的? 他有補角嗎?

那一種角是沒有補角的?

19. 同角或等角的補角相等。

因各等於 $180^\circ - x^\circ$ 。

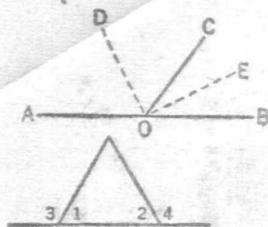
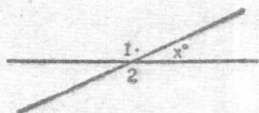
20. 同角或等角的餘角相等。

因各等於 $90^\circ - x^\circ$ 。

補角和餘角的習題

1. 若 DO 二等分 $\angle AOC$, EO 二等分 $\angle COB$, 求證 $\angle DOE = 90^\circ$ 。
(示意: $\angle AOC + \angle COB = 180^\circ$)。

2. 若 $\angle 1 = \angle 2$, 求證 $\angle 3 = \angle 4$ 。



3. 在同圖內, 若 $\angle 3 = \angle 4$,
求證 $\angle 1 = \angle 2$.

4. 若 $\angle 1 = \angle 2$ 求證 $\angle 3 = \angle 4$.

5. 在同圖內, 若 $\angle 1 = \angle 2$ 求證 (a) $\angle 1$ 和 $\angle 4$ 互為補角;
(b) $\angle 3$ 和 $\angle 2$ 互為補角.

6. 在同圖內, 若 $\angle 1$ 是 $\angle 4$ 的補角, 求證 (a) $\angle 1 = \angle 2$;
(b) $\angle 3 = \angle 4$.

7. 若 $\angle 1$ 及 $\angle 2$ 是直角, 求證
 ABC 是一直線.

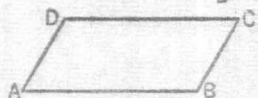
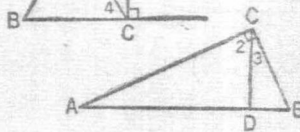
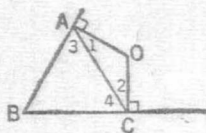
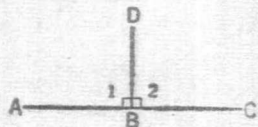
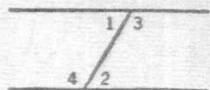
8. 若 $OA \perp AB$, $OC \perp BC$,
 $\angle 3 = \angle 4$, 求證 $\angle 1 = \angle 2$.

9. 若 $AC \perp BC$, $\angle A$ 是 $\angle 2$
的餘角, 求證 $\angle A = \angle 3$.

10. 在同圖內, 若 $\angle B$ 和 $\angle 3$ 互
為餘角, 求證 $\angle 2 = \angle B$.

11. 若 $\angle A$ 是 $\angle D$ 的補角, $\angle A$
是 $\angle B$ 的補角, 求證 $\angle D = \angle B$.

12. 若三角形的諸內角相等, 何以其
諸外角亦相等?



V. 量角器的練習

1. 畫兩直線遇於一點, 量所成的角.

2. 畫一個任意銳角而度量之.

3. 延長第二習題銳角的一邊, 量所成的鈍角.

4. 第二習題所得的度數加上第三習題所得的度數, 其和

是多少？

5. 畫兩直線使相交，量所成的四個角，那幾個角是相等的？

6. 畫一約 2 吋長的直線，在兩端各畫一 40° 的角，此二直線相遇於該直線之上方，量之，此二直線必相等。

7. 畫一個 50° 的角，在兩邊上各截取 1 吋，而聯結其兩端，量此三角形的其他二個角，此二個角必相等。

8. 畫一個 60° 的角，在兩邊上各截取 1 吋，而聯結其兩端，此三角形的三邊必相等。

9. 作一個三角形，底邊長 1 吋，在其一端，畫一 40° 的角，另端畫一 50° 的角，量第三個角，此角應該是 90° 。

10. 作一個三角形，一邊 1 吋，一邊 $1\frac{1}{2}$ 吋，其所夾的角是 45° ，量其他二個角而求其和，是 135° 否？

11. 任意畫一個三角形，再以尺及量角器，取其底邊及兩個底角，依樣另作一個三角形，量二個三角形的第三個角及其他兩邊，而比較之。

12. 任意畫一個三角形，再以尺及量角器，取其兩邊及其夾角，依樣另作一個三角形，量二個三角形的第三邊及其兩角而比較之。

13. 畫一個任意四邊形，量所成的四個角，而求其和，是 360° 否？

14. 用尺及量角器作一個正方形。

15. 用尺及量角器作一個矩形，使底二倍於廣，須作幾個直角？

16. 用圓規畫一個圓，從中心作兩條半徑使成 60° 的角，則在中心能有幾個這樣的角？

17. 畫一個圓，在中心作兩條直線使成一直角，則在中心能有幾個直角？

18. 不用量角器任意畫一個小角而估計他的度數，再用量角器覆核之。

19. 不用量角器畫一約 30° 的角，然後再用量角器覆核，倘使相差，究差多少？

IV. 作 法

在平面幾何學中，作圖時祇能用尺（直線邊緣）和圓規，故祇能作二種線，即直線和圓或圓的一部分。

作圖時須要證明其作法。惟下述作法很是初淺，現在假定其為合式的。

21. 圓是在一個平面上的封閉曲線，其上的各點與其內部的一點距離相同，這一點叫做**中心**。

22. 從中心到圓的一線叫做**半徑**。

一個圓的半徑皆相等。

23. 過中心而兩端止於圓的一直線叫做**直徑**。

一個圓的直徑皆相等。

24. 弧是圓的一部分。

若以 A 和 B 為中心，用 AB 為半徑，畫二個圓，則 $\triangle ABC$ 是等邊的。（即三邊相等）何故？

