21世纪高职高专基础课教材

GAO DENG SHU XUE

高等数学 下

（习题解答）

主　编　耿悦敏
副主编　敖屹兰

华南理工大学出版社

21世纪高职高专基础课教材

GAO DENG SHU XUE

高等数学（下）

（习题解答）

主　编　耿悦敏
副主编　敖屹兰

华南理工大学出版社
·广州·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/耿悦敏主编. —广州:华南理工大学出版社,2009. 8
ISBN 978 - 7 - 5623 - 3143 - 8

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 耿…　Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材　Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 119538 号

总 发 行: 华南理工大学出版社(广州五山华南理工大学 17 号楼,邮编 510640)
营销部电话: 020 - 87113487　87110964　87111048(传真)
E-mail: z2cb@scut.edu.cn　　http://www.scutpress.com.cn

责任编辑: 吴兆强

印 刷 者: 广州市穗彩彩印厂

开　　本: 787 mm × 1092 mm　1/16　印张: 13.25　字数: 317 千

版　　次: 2009 年 8 月第 1 版　2009 年 8 月第 1 次印刷

印　　数: 1 ～ 3000 册

定　　价: 26.00 元(上下册)

前　言

为了适应高等职业技术学院培养高等技术应用型人才的需要，以及根据我院相应专业课程对数学课的要求而编写了本教材. 全书内容包括极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用等. 为有效地与初等数学衔接，本书特别增加了预备知识的章节.

在编写过程中，本着以应用为目的，力求满足专业发展的需要，以必需、够用为度的原则，侧重加强基础知识，减少理论证明，通过几何直观和具体实例来阐明理论，注重培养学生的分析问题和解决问题的能力. 本书重视理论联系实际，内容通俗易懂，有针对性和实用性，体现了高职高专数学课的特色.

本书每章都配有习题，同时编写了内容详尽的习题解答，以方便学生在学习过程中参考，提高学生的学习效率. 也节省了教学时间，缓解数学课时偏紧的矛盾.

本书带“ * ”的章节可供有关专业选用. 本课程的教学时数大约为 90 学时，打“ * ”号的内容要另加学时.

本书由广东交通职业技术学院耿悦敏担任主编，敖屹兰副教授担任副主编.

本书在编写过程中得到了华南理工大学出版社的热情支持，在此表示衷心的感谢.

由于编者的水平和经验有限，书中难免有错误和不妥之处，恳切希望读者批评指正.

编　者

2009 年 3 月

目　录

第1章 极限与连续

习题1.1

1. 观察下面各数列有无极限,若有极限,请指出其极限值.

(1)数列 $x_n=\frac{(-1)^n}{n+1}$; (2)数列 $x_n=\frac{n-1}{n+1}$;

(3)数列 $x_n=n\cdot\sin\frac{n\pi}{2}$; (4)数列 $x_n=\frac{1+2^n}{3^n}$.

解 (1)数列 $x_n=\frac{(-1)^n}{n+1}$,当 n 依次取 1,2,3,4,5,…等自然数时,x_n 的各项依次为

$$-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\frac{1}{5}-\frac{1}{6},\cdots$$

因为当 n 无限增大时,x_n 无限趋近于0,所以根据数列极限的定义可知

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=0.$$

(2)数列 $x_n=\frac{n-1}{n+1}$,当 n 依次取 1,2,3,4,5,…等自然数时,x_n 的各项依次为

$$0,\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\cdots,1-\frac{2}{n+1},\cdots$$

因为当 n 无限增大时,x_n 无限趋近于1,所以根据数列极限的定义可知

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+1}=1.$$

(3)数列 $x_n=n\cdot\sin\frac{n\pi}{2}$,当 n 依次取 1,2,3,4,5,…等自然数时,x_n 的各项依次为

$$1,0,-3,0,5,\cdots,n\cdot\sin\frac{n\pi}{2},\cdots$$

因为当 n 无限增大时,x_n 不趋于一个确定数,所以此数列是发散的.

(4)数列 $x_n=\frac{1+2^n}{3^n}$,当 n 依次取 1,2,3,4,5,…等自然数时,x_n 的各项依次为

$$1,\frac{5}{9},\frac{9}{27},\frac{17}{81},\frac{33}{243},\cdots,\frac{1}{3^n}+\left(\frac{2}{3}\right)^n,\cdots$$

因为当 n 无限增大时,x_n 无限趋近于0,所以根据数列极限的定义可知

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2^n}{3^n}=0.$$

2. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(5-\frac{1}{n}\right)$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n+3}{n}$; (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-4}{n^2+1}$; (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2-2n+1}{8-n^3}$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$; (6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)}$.

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(5-\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}5-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=5-0=5.$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n+3}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(6+\frac{3}{n}\right)=6.$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-4}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\frac{4}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=1.$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^3-2n+1}{8-n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{\frac{8}{n^3}-1}=-3.$

(5) $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left\{1+\frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(2-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=2.$$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{n^2+5n+6}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}}=1.$

习题 1.2

1. 观察并写出下列函数的极限值:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}$; (2) $\lim\limits_{x\to\infty}2^x$; (3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^x$ (4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0.$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}2^x=+\infty.$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^x=0.$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)=2$.

2. 观察并写出下列极限值：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\ln x$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan x$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to 1}\ln x=0$.

(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan x=1$.

3. 设函数 $f(x)=\dfrac{x}{x}$，画出它的图象，求当 $x\to 0$ 时函数的左右极限，从而说明在 $x\to 0$ 时函数的极限是否存在.

解　图象如图 1－1 所示. $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}=1$. 因此 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=1$. 极限存在 .

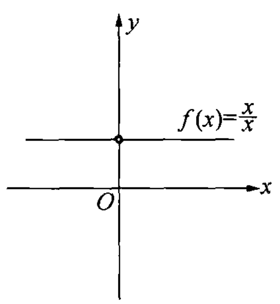

图 1－1

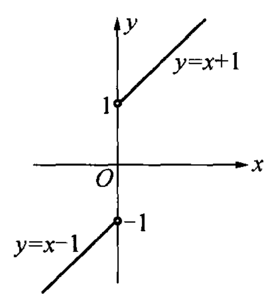

图 1－2

4. 设 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x\leqslant 0,\\ x+1, & x>0,\end{cases}$ 画出它的图象，并求当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 的左右极限，从而说明在 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 的极限是否存在.

解　图象如图 1－2 所示，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)=-1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1$. 由于 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在.

5. 证明函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x<1\\ 1, & x=1,\\ -1, & x>1\end{cases}$ 在 $x\to 1$ 时极限不存在.

证　因为 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+1)=2$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(-1)=-1$，即 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$，所以 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 不存在.

习题 1.3

1. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{x^2-3}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$；　(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$；

(4) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$；　(5) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$；　(6) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2}$；

(7) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3}{x^3+1}\right)$；　(8) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+1}{x^3+3x^2+4}$.

解　(1) 原式 $=\dfrac{\lim\limits_{x\to 2}(x^2+5)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3)}=\dfrac{(\lim\limits_{x\to 2}x)^2+\lim\limits_{x\to 2}5}{(\lim\limits_{x\to 2}x)^2-\lim\limits_{x\to 2}3}=\dfrac{2^2+5}{2^2-3}=9.$

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{(x+3)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{1}{6}.$

(3) 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{x(x^2-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2+x}$

$$=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(x-1)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x)}=\dfrac{1-1}{1^2+1}=0.$$

(4) 原式 $=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x(x^2+3x+2)}{(x-3)(x+2)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x(x+1)(x+2)}{(x-3)(x+2)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x}{x-3}$

$$=\dfrac{\lim\limits_{x\to -2}(x^2+x)}{\lim\limits_{x\to -2}(x-3)}=\dfrac{(-2)^2+(-2)}{-2-3}=-\dfrac{2}{5}.$$

(5) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(x-\sqrt{x})\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x\sqrt{x}-x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}(\sqrt{x}-1)=-1.$

(6) 原式 $=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(\sqrt{2x+1}-3)(\sqrt{2x+1}+3)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{2x+1}+3)}$

$$=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{2x+1}+3}$$

$$=\dfrac{2(\sqrt{4}+2)}{\sqrt{2\times 4+1}+3}=\dfrac{4}{3}.$$

(7) 原式 $=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x+1-3}{x^3+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x-2)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$

$$=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x-2}{x^2-x+1}=\dfrac{-1-2}{1+1+1}=-1.$$

(8) 因为分母 $\lim\limits_{x\to -3}(x^3+3x^2+4)\neq 0$

所以　原式 $=\dfrac{\lim\limits_{x\to-3}(x^2+1)}{\lim\limits_{x\to-3}(x^3+3x^2+4)}=\dfrac{(-3)^2+1}{(-3)^3+3(-3)^2+4}=\dfrac{5}{2}$.

2. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-x-x^3}{x+x^3}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x-1}{3x^3+1}$;　　(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$;

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$;　　(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$;　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7-4x^2}{3x^2+5}$.

解　(1) 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{x}{x^3}-\dfrac{x^3}{x^3}}{\dfrac{x}{x^3}+\dfrac{x^3}{x^3}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{x^2}-1}{\dfrac{1}{x^2}+1}=\dfrac{0-0-1}{0+1}=-1$.

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{x^2}{x^3}+\dfrac{x}{x^3}-\dfrac{1}{x^3}}{\dfrac{3x^3}{x^3}+\dfrac{1}{x^3}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}{3+\dfrac{1}{x^3}}=\dfrac{0+0-0}{3+0}=0$.

(3) 通分得：

原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3(2x+1)-x^2(2x^2-1)}{(2x^2-1)(2x+1)}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+x^2}{4x^3+2x^2-2x-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\dfrac{x^3+x^2}{x^3}}{\dfrac{4x^3+2x^2-2x-1}{x^3}}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\dfrac{1}{x}}{4+\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}\right)=\frac{1+0}{4+0-0-0}=\frac{1}{4}.$$

(4) 分子、分母同除 x 得：

原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}}{\dfrac{x+1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{1+\dfrac{1}{x}}=\dfrac{\sqrt{1+0}}{1+0}=1$.

(5) 分子有理化：

原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1-(x^2-1)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=0$.

(6) 分子、分母同除 x^2 得：

原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7\cdot\dfrac{1}{x^2}-4}{3+5\cdot\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{7\times0-4}{3+5\times0}=-\dfrac{4}{3}$.

3. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{3-x}}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$($m,n$ 为正整数).

解　(1)分母有理化得:

$$原式=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x})}{(\sqrt{1+x}-\sqrt{3-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x})}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x})}{(1+x)-(3-x)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x})}{2(x-1)}=\frac{\sqrt{1+1}+\sqrt{3-1}}{2}=\sqrt{2}.$$

(2) $$原式=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1)}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)}$$

$$=\frac{1+1+\cdots+1+1}{1+1+\cdots+1+1}=\frac{m\times1}{n\times1}=\frac{m}{n}.$$

习题 1.4

1. 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x}{x}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x}{\sin2x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan3x}{x}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to0}x\cot x$;

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos2x}{x\sin x}$;　　(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x^3}{(\sin x)^3}$;

(7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(x+3)}{\sin x}$;　　(8) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x}{x}=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x}{2x}=2.$

(2) $$\lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{\sin2x}=\frac{3}{2}\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin3x}{3x}}{\frac{\sin2x}{2x}}=\frac{3}{2}.$$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan3x}{x}=3\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan3x}{3x}=3.$

(4) $\lim\limits_{x\to0}x\cot x=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\tan x}=1.$

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos2x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2x}{x\sin x}=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=2.$

(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x^3}{(\sin x)^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x^3/x^3}{(\sin x)^3/x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x^3/x^3}{(\sin x/x)^3}=1.$

(7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(x+3)}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x}\cdot\lim\limits_{x\to0}(x+3)=3.$

$$(8)\lim_{h\to0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\lim_{h\to0}\frac{-2\cdot\sin\frac{2x+h}{2}\cdot\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$=-2\lim_{h\to0}\frac{\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$=-\lim_{h\to0}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\lim_{h\to0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=-\sin x.$$

2. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{x}\right)^{x-1}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{\frac{2}{x}}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x+2}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^{x}$.

解　(1) 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left[1+\left(-\frac{5}{x}\right)\right]^{-\frac{x}{5}\cdot(-5)}\cdot\left(1-\frac{5}{x}\right)^{-1}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[1+\left(-\frac{5}{x}\right)\right]^{-\frac{x}{5}\cdot(-5)}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{x}\right)^{-1}=e^{-5}.$$

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}[1+(-x)]^{\frac{1}{-x}\cdot(-2)}=e^{-2}=\frac{1}{e^2}.$

(3) 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+x-1}{1+x}\right)^{x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{1+x}\right)^{x+2}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[1+\left(-\frac{1}{1+x}\right)\right]^{-(x+1)(-1)+1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[1+\left(-\frac{1}{1+x}\right)\right]^{-(x+1)(-1)}\cdot\left(1-\frac{1}{1+x}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[1+\left(-\frac{1}{1+x}\right)\right]^{-(x+1)(-1)}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{1+x}\right)=e^{-1}.$$

(4) 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)^{x}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}}$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}\cdot3}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}}=\frac{e^3}{e}=e^2.$$

习题 1.5

1. 指出下列函数哪些是无穷小量？哪些是无穷大量？

(1)$f(x)=\frac{x-2}{x}$,当 $x\to 0$ 时；　　(2)$f(x)=\ln x$,当 $x\to 0^+$ 时；

(3)$f(x)=10^{\frac{1}{x}}$,当 $x\to 0^+$ 时；　　(4)$f(x)=10^{\frac{1}{x}}$,当 $x\to 0^-$ 时.

解 (1)当 $x\to 0$ 时,$(x-2)\to -2$. 显然 $f(x)=\frac{x-2}{x}$ 是无穷大量.

(2)当 $x\to 0^+$ 时,$f(x)=\ln x$ 无限地趋近于 $-\infty$. 显然 $f(x)=\ln x$ 是无穷大量.

(3)当 $x\to 0^+$ 时,$f(x)=10^{\frac{1}{x}}$ 无限地趋近于 $+\infty$. 显然 $f(x)=10^{\frac{1}{x}}$ 是无穷大量.

(4)当 $x\to 0^-$ 时,$\frac{1}{x}$ 无限地趋近于 $-\infty$. 显然 $f(x)=10^{\frac{1}{x}}$ 无限地趋近于0,所以 $f(x)=10^{\frac{1}{x}}$ 是无穷小量.

2. 结合函数图形,判断下列函数当自变量如何变化时是无穷大？是无穷小？

(1)$y=\frac{1}{x^3}$;　(2)$y=\frac{1}{t+1}$;　(3)$y=\cot x$;　(4)$y=\ln x$.

解 (1)函数 $y=\frac{1}{x^3}$ 当 $x\to\infty$ 时为无穷小;而当 $x\to 0$ 时为无穷大.

(2)函数 $y=\frac{1}{t+1}$ 当 $t\to\infty$ 时为无穷小;而当 $t\to -1$ 时为无穷大.

(3)函数 $y=\cot x$ 当 $x\to k\pi+\frac{\pi}{2}$ 时为无穷小;而当 $x\to k\pi$ 时为无穷大(k 为整数).

(4)函数 $y=\ln x$ 当 $x\to 1$ 时为无穷小;而当 $x\to +\infty$ 或 $x\to 0^+$ 时为无穷大.

3. 求下列极限:

(1)$\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\cos\frac{1}{x^2}$;　(2)$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{x}$;　(3)$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;

(4)$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{x^4-3x^2+1}$;　(5)$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4-4x+8}{x^3+2x^2-1}$;　(6)$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^3-1}{6x^3-5x^2+1}$.

解 (1)因为 $\lim\limits_{x\to 0}x=0$, $\left|\cos\frac{1}{x^2}\right|\leqslant 1$,所以根据无穷小的性质可知

$$\lim_{x\to 0}x\cos\frac{1}{x^2}=0.$$

(2)因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$, $|\arctan x|<\frac{\pi}{2}$,所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{x}=0$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\dfrac{1}{2}$.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^4-3x^2+1}=0$.

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-4x+8}{x^3+2x^2-1}=\infty$.

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3-1}{6x^3-5x^2+1}=\dfrac{8}{6}=\dfrac{4}{3}$.

4. 利用等价无穷小求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x}$;　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$;　(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{x-1}$;　(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{\sin 2x}$;　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x}$.

解　(1) 因为 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$

所以原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x=0$.

(2) 因为 $x\to 0$ 时，$\sin 3x\sim 3x$

所以原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{x}=3$.

(3) 因为 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$

所以原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$.

(4) 因为 $x\to 1$ 时，$\sin(x^2-1)\sim(x^2-1)$

所以原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$.

(5) 因为 $x\to 0$ 时，$1-\cos ax\sim\dfrac{1}{2}(ax)^2$

所以原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{2}(ax)^2}{x^2}=\dfrac{1}{2}a^2$.

(6) 因为 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x)\sim x$，$\ln(1-x)\sim(-x)$

所以原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x}{x}=1+1=2$.

习题 1.6

1. 设函数 $y=f(x)=x^2-2x+5$,求适合下列条件的自变量的增量和对应的函数的增量:

(1)当 x 由 2 变到 3;

(2)当 x 由 2 变到 1;

(3)当 x 由 2 变到 $2+\Delta x$.

解 (1)$\Delta x=3-2=1$,$\Delta y=f(3)-f(2)=3^2-2\times3+5-2^2+2\times2-5=3$.

(2)$\Delta x=1-2=-1$,$\Delta y=f(1)-f(2)=1^2-2\times1+5-2^2+2\times2-5=-1$.

(3)$\Delta x=2+\Delta x-2=\Delta x$,$\Delta y=f(2+\Delta x)-f(2)=(2+\Delta x)^2-2\times(2+\Delta x)+5-(2^2-2\times2+5)=4+4\Delta x+(\Delta x)^2-4-2\Delta x=2\Delta x+(\Delta x)^2$.

2. 讨论函数 $y=f(x)=3x-2$ 在 $x=0$ 的连续性.

解法一 当自变量在 $x=0$ 处有 Δx 时,有相应的增量:

$$\Delta y=f(0+\Delta x)-f(0)=3(0+\Delta x)-2+2=3\Delta x.$$

因为 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to0}3\Delta x=0$,所以,根据函数连续定义 1.13 可知,$f(x)=3x-2$ 在$x=0$ 处连续.

解法二 $f(x)=3x-2$ 在 $x=0$ 处有定义且 $\lim\limits_{x\to0}(3x-2)=-2=f(0)$,所以根据函数连续的定义 1.14 可知,$f(x)$在 $x=0$ 处连续.

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant1\\ 2-x, & 1<x\end{cases}$,试讨论 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的连续性.

解 函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处有定义,$f(1)=1$.

由于 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}x^2=1$,$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(2-x)=1$

所以 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1}f(x)=1=f(1)$

根据连续定义 1.14 可知,函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

4. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0\\ 2-x, & x\geqslant0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 的连续性.

解 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有定义 $f(0)=2$,但由于 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(x+1)=1$,$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(2-x)=2$,故 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在,所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

习题 1.7

求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2-2x+5}$；　(2) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+1}{x+1}$；　(3) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{e^t+1}{t}$；

(4) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin 2x}{2\cos(\pi-x)}$；　(5) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$；　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2-2x+5}=\sqrt{0^2-2\times 0+5}=\sqrt{5}$.

(2) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+1}{x+1}=\dfrac{2\times(-2)^2+1}{-1}=-9$.

(3) $\lim\limits_{t\to -2}\dfrac{e^t+1}{t}=\dfrac{e^{-2}+1}{-2}=-\dfrac{1}{2}e^{-2}-\dfrac{1}{2}$.

(4) $$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x}{2\cos(\pi-x)}=\frac{\sin 2\cdot\frac{\pi}{4}}{2\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(5) $$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}=\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{-1}{\cos x+\sin x}=\frac{-1}{\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{-1}{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(6) 因函数 $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ 在 $x=0$ 处无定义，故函数在 $x=0$ 处不连续，但由于当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x)\sim x$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$.

习题 1.8

1. 证明方程 $x^5-3x-1=0$ 在 1 与 2 之间至少有一个实根.

证　设 $f(x)=x^3-3x-1$，$f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续. 并且 $f(1)=-3<0$，$f(2)=25>0$. 根据推论 1.1 可知，在 $(1,2)$ 内至少有一点 $\xi(1<\xi<2)$，使得 $f(\xi)=0$，即 $\xi^3+3\xi^2-1=0$. 这个等式说明方程 $x^3+3x^2-1=0$ 在 $(1,2)$ 内至少有一个根 ξ.

2. 证明方程 $x\cdot 2^x-1=0$ 至少有一个小于 1 的正根.

证　设 $f(x)=x\cdot 2^x-1$，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，并且 $f(0)=-1<0$，$f(1)=1>0$. 根据推论 1.1 可知，在 $(0,1)$ 内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$，即 $\xi\cdot 2^{\xi}-1=0$，该等式说明方程 $x\cdot 2^x-1=0$ 至少有一个小于 1 的正根.