为你的重点班冲刺之路导航

中考
冲刺重点班
系列丛书

杨霞芬／丛书主编

冲刺重点班

初中数学

刘少伟　张利琴　沈晓蕾◎主编

知识导航

直击考点

经典回放

模拟训练

全国百佳图书出版单位
百佳

中国时代经济出版社

冲刺重点班

初中数学

本书主编 刘少伟 张利琴 沈晓蕾

中国时代经济出版社

图书在版编目（CIP）数据

冲刺重点班．初中数学/刘少伟，张利琴，沈晓蕾主编．—北京：中国时代经济出版社，2010．1

ISBN 978－7－80221－925－0

（中考冲刺重点班系列丛书/杨霞芬主编）

Ⅰ．冲…　Ⅱ．刘…　Ⅲ．数学课—初中—教学参考资料　Ⅳ．G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 115406 号

冲刺重点班·初中数学

刘少伟　张利琴　沈晓蕾　主编

出　　版	中国时代经济出版社
地　　址	北京市西城区车公庄大街乙 5 号鸿儒大厦 B 座
邮政编码	100044
电　　话	（010）68320825（发行部） （010）88361317（邮购）
传　　真	（010）68320634
发　　行	各地新华书店
印　　刷	北京鑫海达印刷有限公司
开　　本	787×1092　1/16
版　　次	2010 年 1 月第 1 版
印　　次	2010 年 1 月第 1 次印刷
印　　张	17.5
印　　数	1～5000 册
字　　数	390 千字
定　　价	27.00 元
书　　号	ISBN 978－7－80221－925－0

前　言

推进素质教育，提高综合能力、创新能力，是当前我国教育改革的一个重要方向，并受到教育界的高度重视和社会的广泛关注。在这样的背景下，我们也想尽自己的微薄之力，把自己的经验写出来与人分享，以期学生能有所受益，于是编写了这本《冲刺重点班》。本书有以下几个特点。

1. 基础性、综合性

本书在编写上，所选内容基本覆盖了初中学段的全部基础知识、基本方法、基本技能与常用的数学思想，这些内容均是初中学段的核心知识以及这些知识的综合运用。每一讲都是抓住初中数学学段中的主要内容给予突出讲解与训练，抓住难点给予突破，把示范、模仿、训练有机地结合起来。这样做，可以使学生的综合能力、创新能力在不知不觉中得到提高。

2. 讲练结合，利于辅导

本书囊括了初中数学全部解题思路，所用例题经典，每道例题代表的不仅仅是一个知识点，而是一个类型。只要把握好每一个例题，就能很好地掌握相关的知识点。体例合理，每道例题，解题时都有思路突破，解后有反思。这样做不仅仅是告诉你"是什么"，更是传达给你"所以然"。而且每一单元后均有一定量的训练题，旨在巩固提高同学们的解题能力。

3. 目的明确，培养创新能力

本书目的是旨在告诉学生学习的方向与达到的目的地。联系就是综合，因此，本书始终把提升学生的综合能力放到最重要的位置上。本书最后给出的三套模拟题以及 2009 年部分省市中考试题，利于学生了解考试概况检验自己。通过训练，相信学生的综合能力会提高到一个自己都感到满意的高度。

耕耘者总盼望丰收的金秋。本书如能为参加重点班考试的学生们送去一叶小舟，一副双桨，使他们能顺利地到达理想的彼岸，能为开启他们的智慧带来一点裨益，编者将感到极大的欣慰。由于时间仓促，水平有限，书中缺点错误在所难免，敬请广大读者批评指正。

编　者

2009 年 12 月

目　　录

1 第一讲　实　数

【知识导航】

1. 理解实数的意义，能用数轴上的点表示实数，了解实数与数轴上的点是一一对应的.

2. 了解近似数与有效数字的概念；在解决实际问题中，能用计算器进行近似计算，并按问题的要求对结果取近似值.

3. 能用有理数估计一个无理数的大致范围，会比较两个实数的大小.

4. 借助于数轴理解实数相反数和绝对值的意义，会求实数的相反数和绝对值(绝对值内不含字母).

5. 掌握实数的加、减、乘、除、乘方、开方及简单的混合运算(以三步为主).

6. 理解实数的运算律，并能运用运算律简化运算.

7. 能运用实数的运算解决一些简单的问题.

8. 能对含有较大数字的信息作出合理的解释和推断.

【直击考点】

中考时主要从相反数、绝对值、有理数的乘方、近似数及有效数字等这几个方面出题. 竞赛时主要从实数的一些性质出发进行考查. 比如从任何一个有理数都可以写成既约分数$\frac{q}{p}$的形式，而任何一个无理数都不能写成这种形式. 再如有理数对加、减、乘、除四则运算是封闭的，即任何两个有理数的和、差、积、商还是有理数；无理数对四则运算是不封闭的，即两个无理数的和、差、积、商不一定是无理数，等等.

【经典回放】

例 1　在下列实数：$-\frac{\pi}{2}$，$-\frac{1}{3}$，$\sqrt{16}$，$|-0.2|$，0，1.414，$\sqrt[3]{81}$，$\cos45°$，$2.\dot{1}0\dot{3}$，$(1-\sqrt{8})^0$，$(-\sqrt{2})^{-2}$，0.1010010001…(两个 1 之间依次增加一个 0)中，有理数的个数为________.

精析：$-\frac{\pi}{2}$尽管从外表上看写成了“分数”的形式，但它不是一个有理数，因为它骨子里是一个无理数：π 是一个无限不循环小数，除以 2 以后，仍然是一个无限不循环小数. 因为$\sqrt{16}=4$，所以$\sqrt{16}$是一个有理数. 因为$(1-\sqrt{8})^0=1$，所以$(1-\sqrt{8})^0$是一个有理数. 因为$(-\sqrt{2})^{-2}=\frac{1}{2}$，所以$(-\sqrt{2})^{-2}$是一个有理数. 尽管 0.1010010001…很有规律，但它毕竟不是一个循环小数，所以它是一个无理数.

解：$-\frac{1}{3}$，$\sqrt{16}$，$|-0.2|$，0，1.414，$2.\dot{1}0\dot{3}$，$(1-\sqrt{8})^0$，$(-\sqrt{2})^{-2}$是有理数，所以有理数的个数为 8 个.

反思：判断一个数是有理数还是无理数，不能从外表上看，被假象迷惑，要从本质上去看，也就是一个数能不能写成既约分数$\frac{q}{p}$的形式. 若一个数能写成既约分数$\frac{q}{p}$的形式，那么它就是一个有理数；否则就是一个无理数.

例 2　计算：

(1) $\left[47-\left(18.75-1\div\frac{8}{15}\right)\times\frac{56}{25}\right]\div0.46$；

(2) $\dfrac{(-2)^3\times(-1)^{1998}-|-12|\div\left[-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2\right]}{(-1)\div\dfrac{4}{5}\times\left(-1\dfrac{1}{4}\right)}$；

(3) $(\sqrt{1.21}-\sqrt{0.0196})\div\left[\sqrt{\dfrac{9}{625}}+\sqrt[3]{\left(-\dfrac{1}{12.5}\right)^3}\right]$.

精析：在代数运算中，可以根据运算法则和运算律，去掉或者添上适当的括号，改变原来的运算顺序，使得复杂的计算变得相对简单. 比如和为零或整数的数先加，乘积为零或整数的数先进行运算等等. 在进行这样的计算变形时，统一运算(加减统一成加法、乘除统一成乘法)较好，它为运用运算律提供了平台.

解：(1) $\left[47-\left(18.75-1\div\dfrac{8}{15}\right)\times\dfrac{56}{25}\right]\div0.46$

$=\left[47-\left(\dfrac{75}{4}-\dfrac{15}{8}\right)\times\dfrac{56}{25}\right]\times\dfrac{50}{23}$

$=\left[47-\dfrac{75}{4}\times\dfrac{56}{25}+\dfrac{15}{8}\times\dfrac{56}{25}\right]\times\dfrac{50}{23}$

$=\left[47-42+\dfrac{21}{5}\right]\times\dfrac{50}{23}$

$=\dfrac{46}{5}\times\dfrac{50}{23}$

$=20.$

(2) $\dfrac{(-2)^3\times(-1)^{1998}-|-12|\div\left[-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2\right]}{(-1)\div\dfrac{4}{5}\times\left(-1\dfrac{1}{4}\right)}$

$=\dfrac{(-8)\times1-12\div\left(-\dfrac{1}{4}\right)}{(-1)\times\dfrac{5}{4}\times\left(-\dfrac{5}{4}\right)}$

$=\dfrac{-8+48}{\dfrac{25}{16}}$

$=40\div\dfrac{25}{16}$

$=\dfrac{128}{5}.$

(3) $(\sqrt{1.21}-\sqrt{0.0196})\div\left[\sqrt{\dfrac{9}{625}}+\sqrt[3]{(-\dfrac{1}{12.5})^3}\right]$

$=(1.1-0.14)\div\left[\dfrac{3}{25}-\dfrac{2}{25}\right]$

$=\dfrac{24}{25}\div\dfrac{1}{25}$

$=24.$

反思：初等数学中，由于负数的引入，符号“+”、“−”具有了双重意义，它既是表示加法与减法的运算符号，也是表示正数与负数的性质符号. 因此进行实数运算时，一定要正确运用实数的运算法则及运算律，尤其要注意去括号时符号的变化. 在进行这样的计算变形时，统一运算(加减统一成加法、乘除统一成乘法)是一个不错的选择，因为它为运用运算律提供了用武之地.

例 3 已知 3 个数 89，12，3，进行如下运算：取其中任意两个数，求其和再除以$\sqrt{2}$，同时求其差再除以$\sqrt{2}$，我们称它为一次操作，试问：能否经过若干次操作，得到三个数 90，14，10？试说明理由.

精析：我们可以作一次操作，看看得到的三个数与给出的三个数之间有何数量关系. 为了更加清楚地认识问题，我们可以设题中所给的三个数分别为 a，b，c，则经过一次操作后三个数变为 $\dfrac{a+b}{\sqrt{2}}$，$\dfrac{a-b}{\sqrt{2}}$，c(这里取的是前两个数). 经过计算发现 $\left(\dfrac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\dfrac{a-b}{\sqrt{2}}\right)^2=a^2+b^2$，有了这个发现，问题就不难解决了.

解：设题中所给的三个数分别为 a，b，c，不妨取前两个数进行计算，这样经过一次操作后得到的三个数为：$\dfrac{a+b}{\sqrt{2}}$，$\dfrac{a-b}{\sqrt{2}}$，c.

因为 $\left(\dfrac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\dfrac{a-b}{\sqrt{2}}\right)^2+c^2=\dfrac{a^2+2ab+b^2}{2}+\dfrac{a^2-2ab+b^2}{2}+c^2=a^2+b^2+c^2$，所以题设的三个数经过一次操作后，它们的平方和不变.

因为 $89^2+12^2+3^2=8074$，而 $90^2+14^2+10^2=8396>8074$，所以经过题中规定的操作不可能由题设所给的三个数得到 90，14，10.

反思：这类问题的解决一般是观察变化前后的各个量之间的数量关系，或变化前后各个量所具有的特征.

例 4 已知 $\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2}=\frac{1}{2}(x+y+z)$，求 x,y,z 的值.

精析：利用完全平方公式及非负数的性质解题.

解：由题意可得：$x+y+z-2\sqrt{x}-2\sqrt{y-1}-2\sqrt{z-2}=0$，

即 $(x-2\sqrt{x}+1)+[(y-1)-2\sqrt{y-1}+1]+[z-2-2\sqrt{z-2}+1]=0$.

因为 $x=(\sqrt{x})^2$，$y-1=(\sqrt{y-1})^2$，$z-2=(\sqrt{z-2})^2$，

所以，$(\sqrt{x}-1)^2+(\sqrt{y-1}-1)^2+(\sqrt{z-2}-1)^2=0$.

根据非负数的性质，有

$\sqrt{x}-1=0$，$\sqrt{y-1}-1=0$，$\sqrt{z-2}-1=0$.

所以，$x=1$，$y=2$，$z=3$.

反思：一个等式中含有多于一个未知数的情况下，一般很难求得其精确解，除非在一些特殊情况下能够求得其解，本题就是如此.

例 5 已知 x，y 是有理数，且满足 $\left(\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x+\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{12}\right)y-\frac{9}{4}-\frac{29}{20}\sqrt{3}=0$. 求 x，y 的值.

精析：可利用结论：若 a,b 为有理数，i 为无理数，当且仅当 $a=b=0$ 时，$a+bi=0$.

解：由 $\left(\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x+\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{12}\right)y-\frac{9}{4}-\frac{29}{20}\sqrt{3}=0$

可变形为：$\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y-\frac{9}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}y-\frac{29}{20}\right)\sqrt{3}=0$.

因为 x,y 是有理数，

所以 $\begin{cases}\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y-\frac{9}{4}=0,\\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{12}y-\frac{29}{20}=0.\end{cases}$

解之得：$\begin{cases}x=3.6,\\ y=4.2.\end{cases}$

答：x、y 的值分别为 3.6，4.2

反思：有理数永远不可能与无理数相等，利用这个事实也可以解决一个等式中含有多于一个未知数的情况.

例 6 已知 x,y 是两个任意有理数，且 $x<y$. 试说明 x 与 y 之间存在着无穷多个有理数.

精析：只要我们找出符合条件的有理数，题目即可被证明.

解：因为 $x<y$，所以 $2x<x+y<2y$，所以 $x<\frac{x+y}{2}<y$.

设 $x_1=\frac{x+y}{2}$，显然 x_1 是有理数(因为 x,y 是两个任意有理数).

因为 $x_1<y$，所以同理可证 $x_1<\frac{x_1+y}{2}<y$.

设 $x_2=\frac{x_1+y}{2}$，显然 x_2 也是有理数. 依次类推，设 $x_n=\frac{x_{n-1}+y}{2}$，n 为正整数，这里 $x_0=x$.

则有 $x<x_1<x_2<\cdots<x_n<\cdots<y$. 且 x_n 为有理数.

所以，在 x 与 y 之间存在着无穷多个有理数.

反思：构造具有某种性质的一个数或一个式子，以达到解题和证明的目的，是经常运用的一种数学建模的思想方法.

例 7 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数，如 $[3.01]=3$，$[-2.1]=-3$，$[1]=1$.

求

$$\frac{[\sqrt{1\times2}]+[\sqrt{2\times3}]+\cdots+[\sqrt{2009\times2010}]}{1005}$$

的值.

精析：我们可以先观察几个具体的式子：$[\sqrt{1\times2}]=[\sqrt{2}]=1$，$[\sqrt{2\times3}]=[\sqrt{6}]=2$，

$[\sqrt{3\times4}]=[\sqrt{12}]=3$，…，由此我们猜想：$[\sqrt{n\times(n+1)}]=n$.

解：因为 $n^2<n(n+1)<(n+1)^2$，n 为正整数. 所以$\sqrt{n^2}<\sqrt{n(n+1)}<\sqrt{(n+1)^2}$，

即：$n<\sqrt{n(n+1)}<n+1$. 所以$[\sqrt{n(n+1)}]=n$.

所以$[\sqrt{1\times2}]=1$，$[\sqrt{2\times3}]=2$，$[\sqrt{3\times4}]=3$，…，$[\sqrt{2009\times2010}]=2009$.

所以$\dfrac{[\sqrt{1\times2}]+[\sqrt{2\times3}]+\cdots+[\sqrt{2009\times2010}]}{1005}$

$=\dfrac{1+2+3+\cdots+2009}{1005}=\dfrac{2009(1+2009)}{2\times1005}=2009$.

反思：对于较陌生的题，除了深刻理解所给的规则外，我们还可以从特殊情况入手来解决. 然后得出猜想，从而解决问题.

例 8　已知$\sqrt{14}$的小数部分是 b，求 $b^4+12b^3+37b^2+6b-20$ 的值.

精析：因为无理数是无限不循环小数，所以不可能把一个无理数的小数部分一位一位地确定下来，这类涉及无理数小数部分的计算题，往往是先估计它的整数部分（这很容易），然后再寻求其小数部分的表示方法.

解：因为 $9<14<16$，所以 $3<\sqrt{14}<4$，所以$\sqrt{14}$的整数部分为 3. 所以 $b=\sqrt{14}-3$.

即：$b+3=\sqrt{14}$. 两边平方得：

$b^2+6b+9=14$，所以 $b^2+6b-5=0$.

至此我们可以有三种途径计算 $b^4+12b^3+37b^2+6b-20$ 的值.

途径一：由 $b^2+6b-5=0$ 可得：$b^2=-6b+5$.

所以 $b^4+12b^3+37b^2+6b-20$

$=(b^2)^2+12b\cdot b^2+37b^2+6b-20$

$=(-6b+5)^2+12b(-6b+5)$

$\quad+37(-6b+5)+6b-20$

$=36b^2-60b+25-72b^2+60b-222b+185$

$\quad+6b-20$

$=-36b^2-216b+190$

$=-36(-6b+5)-216b+190$

$=216b-180-216b+190$

$=10$.

途径二：由 $b^2+6b-5=0$ 可得：$b^2+6b=5$.

所以 $b^4+12b^3+37b^2+6b-20$

$=(b^4+2\cdot b^2\cdot 6b+36b^2)+(b^2+6b)-20$

$=(b^2+6b)^2+5-20$

$=5^2-15$

$=10$.

途径三：$b^4+12b^3+37b^2+6b-20$

$=b^2(b^2+6b-5)+6b(b^2+6b-5)$

$\quad+6(b^2+6b-5)+30-20$

$=b^2\times0+6b\times0+6\times0+30-20$

$=10$.

反思：这三种途径的想法是从易到难. 可分步代入，也可整体代入. 目的是使得待求式子的次数一直在降低，也就是用“降次”的想法解题.

例 9　求式子$|x+1|+|x-1|+|x-3|$的最小值.

精析一：我们可以采用“零点分段法”把绝对值去掉，然后在各个取值范围内求出式子的最小值，再加以比较，从中选出最小值.

解法一：分界点为：$-1,1,3$.

(1)当 $x\leqslant-1$ 时，

$|x+1|+|x-1|+|x-3|=-(x+1)-(x-1)-(x-3)=-3x+3$，

由于 $x\leqslant-1$，所以 $-3x+3\geqslant6$，所以$|x+1|+|x-1|+|x-3|$的最小值是 6.

(2)当$-1<x\leqslant1$ 时，

$|x+1|+|x-1|+|x-3|=(x+1)-(x-1)-(x-3)=-x+5$，

由于$-1<x\leqslant1$，所以$-x+5\geqslant4$，所以$|x+1|+|x-1|+|x-3|$的最小值是 4.

(3)当 $1<x\leqslant3$ 时，

$|x+1|+|x-1|+|x-3|=(x+1)+(x-1)-(x-3)=x+3$，

由于 $1<x\leqslant3$，所以 $x+3>4$，所以$|x+1|+|x-1|+|x-3|$的最小值大于 4.

(4)当 $x>3$ 时，

$|x+1|+|x-1|+|x-3|=(x+1)+(x-1)+(x-3)=3x-3$，

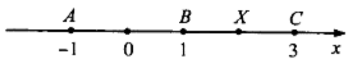
由于 $x>3$，所以 $3x-3>6$，所以 $|x+1|+|x-1|+|x-3|$ 的最小值大于 6.

综上可知：式子 $|x+1|+|x-1|+|x-3|$ 的最小值为 4.

精析二：我们可以利用 $|x+1|$，$|x-1|$，$|x-3|$ 的几何意义去观察得到结论.

解法二：设 $-1,1,3,x$ 在数轴上的对应点分别为 A,B,C,X，则 $|x+1|$ 表示线段 AX 之长，同理，$|x-1|$，$|x-3|$ 分别表示线段 BX,CX 之长. 现在要求 $|x+1|$，$|x-1|$，$|x-3|$ 三者之和最小，其实就是要在数轴上找一点 X，使该点到 A,B,C 三点的距离之和最小.

因为 $-1<1<3$，所以 A,B,C 的排列如图示：



所以当 X 与 B 点重合时，AX,BX,CX 三者之和最小. 这个最小值为 $AX+BX+CX=AX+XC=2+0+2=4$.

反思："数形结合"是一种很重要的解题方法. 对于本题还可以推广到多个点时的情况：

已知：$a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n$，求 $|x-a_1|+|x-a_2|+|x-a_3|+\cdots+|x-a_n|$ 的最小值.

例 10 证明：$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{99}{100}<\frac{1}{10}$.

精析：若把 $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{99}{100}$ 计算出来，有些麻烦. 我们可以考虑"放缩法"，适当地将分数放大，使得放大后容易计算.

证明：由于 $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}<\frac{4}{5}$，$\frac{5}{6}<\frac{6}{7}$，…，$\frac{99}{100}<\frac{100}{101}$，所以 $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{99}{100}<\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\cdots\times\frac{100}{101}$.

设 $M=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{99}{100}$，$N=\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\cdots\times\frac{100}{101}$，显然 $M<N$.

又 $M\cdot N=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{99}{100}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\cdots\times\frac{100}{101}=\frac{1}{101}<\frac{1}{100}$，所以 $M^2<M\cdot N<\frac{1}{100}$，

所以 $M<\frac{1}{10}$，

即 $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{99}{100}<\frac{1}{10}$.

反思：证明不等式，"放缩法"是一种常用的方法. 经常采取的方式是把分子或分母适当地放大或缩小，或整体放大或缩小，然后利用有关的条件再加以证明.

例 11 某人驾驶汽车从甲地出发到乙地需要 1h，继续行驶 1h45min 分钟到达丙地. 汽车速度一定，甲、乙两地路程是 $\overline{ab}$km，乙、丙两地路程是 $\overline{ba}$km. 现在知道从甲地经乙地到丙地路程不少于 100km，试问从甲地到乙地的路程是多少 km？

精析：由于汽车的速度一定，所以汽车行驶的时间之比就等于行驶路程之比. 由此得到一个关于 a,b 的等式，然后根据条件讨论可解决.

解：因为汽车的速度一定，所以行驶路程之比就等于行驶时间之比. 由题意可知，汽车行驶 $\overline{ab}$ km 时，所用时间为 1 小时；行驶 $\overline{ba}$km 时，所用时间为 1h45min，即 $1\frac{3}{4}$h. 所以得到等式 $\frac{\overline{ab}}{\overline{ba}}=\frac{1}{1\frac{3}{4}}$，即 $7\,\overline{ab}=4\,\overline{ba}$. 所以，$7(10a+b)=4(10b+a)$. 整理得 $b=2a$.

又 $\overline{ab}+\overline{ba}$

$=(10a+b)+(10b+a)$

$=11a+11b$

$=11(a+b)$

$=11(a+2a)$

$=33a\geqslant100$，

所以，$a\geqslant4$.

又 $b=2a<10$，所以 $a<5$.

所以 $a=4$，$b=8$.

所以 $\overline{ab}=48$.

答：从甲地到乙地的路程是 48km.

反思：灵活运用行程问题的公式是解决此类

问题的关键.

例 12 一批旅游者决定分乘几辆汽车，要使每车有同样的人数，每辆汽车至多乘 32 人，起先每车乘 22 人，这时有一人坐不上车；开走一辆空车，那么所有的旅游者刚好均分乘余下的汽车. 问原有多少辆汽车？这批旅游者有多少人？

精析一：我们可以利用“每辆车乘 22 人时，余一人”得到汽车辆数与人数的关系；然后再利用剩下的条件“开走一辆空车，那么所有的旅游者刚好均分乘余下的汽车”列一个等式，注意到人数与车辆数都为正整数，那么问题就迎刃而解了.

解法一：设原有汽车 x 辆，则这批旅游者有 $(22x+1)$ 人，而且开走一辆车后，剩下的车每辆车上有 y 人.

根据题意可得 $22x+1=y(x-1)$.

整理得：$x=\dfrac{y+1}{y-22}=1+\dfrac{23}{y-22}$.

因为 x 是汽车的数量，所以为正整数.

所以 $y-22$ 是 23 的约数，为 1 或 23.

当 $y-22=1$，$y=22+1=23$ 时，$x=1+\dfrac{23}{y-22}=1+23=24$. 此时符合题意.

当 $y-22=23$，即 $y=22+23=45$ 时，$x=1+\dfrac{23}{y-22}=1+1=2$. 此时每辆车的人数为 45 人，大于每辆汽车至多乘 32 人的规定，不符合题意，舍去.

所以 $22x+1=22\times24+1=529$.

答：原有汽车 24 辆，这批旅游者有 529 人.

精析二：题中有两个等量关系：一个是每辆车乘 22 人时，余一人；另一个是开走一辆空车，那么所有的旅游者刚好都坐上车. 由这两个等量关系，我们可以得到两个等式，再注意到每辆车上的人数与车辆数都是正整数，问题可解.

解法二：设原有汽车 x 辆，这批旅游者有 y 人，而且，开走一辆空车后，留下的每车上乘 k 人.

根据题意得：$\begin{cases}22x+1=y, & ①\\ \dfrac{y}{x-1}=k. & ②\end{cases}$

把①代入②得，$\dfrac{22x+1}{x-1}=k$， ③

即：$k=\dfrac{22x-22+23}{x-1}=22+\dfrac{23}{x-1}$.

因为 k 是人数，所以 k 是正整数.

所以，$x-1$ 是 23 的约数，为 1 或 23.

当 $x-1=1$ 时，$k=22+23=45>32$，不合题意，舍去.

当 $x-1=23$，$k=22+1=23$，符合题意.

把 $k=23$ 代入③得 $x=24$. ④

把④代入①得 $y=529$.

答：原有汽车 24 辆，这批旅游者有 529 人.

反思：设出未知数，表示出题意中的数量关系，利用等式或等式组的有关知识是解决这类问题的关键. 从本题的解答过程可以看出，设的未知数少的话，要求列等式的技巧就较高，但是解起来较简单；如果设的未知数多的话，要求列等式的技巧相对较低，但是解起来麻烦.

【模拟训练(一)】

一、选择题

1.（2008 北京）若 $|x+2|+\sqrt{y-3}=0$，则 xy 的值为 （ ）

A. -8 B. -6 C. 5 D. 6

2.（2008 天津）纳米是非常小的长度单位，已知 1 纳米 $=10^{-6}$ 毫米，某种病毒的直径为 100 纳米，若将这种病毒排成 1 毫米长，则病毒的个数是 （ ）

A. 10^2 个 B. 10^4 个 C. 10^6 个 D. 10^8 个

3. 一个自然数的算术平方根为 $a(a>1)$，则与这个自然数相邻的两个自然数的算术平方根分别为 （ ）

A. $a-1, a+1$ B. $\sqrt{a-1}, \sqrt{a+1}$

C. $\sqrt{a^2-1}, \sqrt{a^2+1}$ D. a^2-1, a^2+1

4.（2008 广州）若实数 a, b 互为相反数，则下列等式中恒成立的是 （ ）

A. $a-b=0$ B. $a+b=0$

C. $ab=1$ D. $ab=-1$

5.（2008 吉林）若 $a+b=3$，则 $2a^2+4ab+2b^2-6$

的值为 ( )

A. 12 B. 6 C. 3 D. 0

6. 三个不相等的实数 a,b,c 在数轴上对应的点分别为 A,B,C,如果 $|a-b|+|b-c|=|a-c|$,那么 B 点 ( )

A. 在 A,C 点的右边

B. 在 A,C 点的左边

C. 在 A,C 点之间

D. 以上三种情况都有可能

7. a,b,c 为有理数,且满足等式 $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}=\sqrt{5+2\sqrt{6}}$,则 $2a+999b+1001c$ 的值是 ( )

A. 1999 B. 2000

C. 2001 D. 无法确定

8. 若 a,b,c 为非零实数,则 $\frac{a}{|a|}+\frac{|b|}{b}+\frac{c}{|c|}+\frac{|ab|}{ab}+\frac{bc}{|bc|}+\frac{|ac|}{ac}+\frac{abc}{|abc|}$ 的值是 ( )

A. 7 B. -1

C. 7 或 -1 D. 无法确定

9. 在数学上,关于数集有多种表示方法,比如用 **R** 表示实数集,用 **Z** 表示整数集等. 现在我们介绍区间表示法来表示数集,在区间表示法中规定:$[a,b]$表示所有大于或等于 a,且小于或等于 b 的数的集合,其中 $a<b$. 例如满足关系式 $1\leqslant x\leqslant 4$ 的所有数 x 组成的集合可以用$[1,4]$来表示.

如果 $5\leqslant m\leqslant 15$,$20\leqslant n\leqslant 30$,那么$\frac{m}{n}$的一切值包含在下列哪个区间内? ( )

A. $[5,30]$ B. $\left[\frac{1}{6},\frac{3}{4}\right]$

C. $\left[\frac{1}{6},\frac{2}{3}\right]$ D. $\left[\frac{1}{6},\frac{7}{8}\right]$

10. 若 $a<b<0$,且 $a^2+b^2=4ab$,则$\frac{a+b}{a-b}$的值为 ( )

A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{6}$ C. 2 D. 3

二、填空题

1. 一个数的平方根是 a^2+b^2 和 $4a-6b+13$,那么这个数是________.

2. 若 a 是一个完全平方数,则比 a 大的最小完全平方数是________.

3. 如果$\sqrt{a}$的整数部分是 4,则 a 的取值范围是________.

4. (2008 · 南通)苹果的进价是每千克 3.8 元,销售中估计有 5%的苹果正常损耗. 为避免亏本,商家把售价应该至少定为每千克________元.

5. 若$(x-y)^2$ 与 $\sqrt{5x-3y-16}$互为相反数,则 $\sqrt{x^2+y^2}=$________.

6. 用四则运算的加、减、乘、除定义一种新的运算"$*$":对于任意两个实数 x,y,有 $x*y=\frac{x+y}{x-y}$,则$(11*12)*(19*31)=$________.

7. 计算:$\frac{2010}{23456^2-23455\times 23457}=$________.

8. $\sin 50°\cdot\cos 40°-\frac{1}{2}$________ 0(用"<"或">"填空).

9. 设 a 是一个无理数,且 $ab-b+a=1$,则 $b=$________.

10. 计算:$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1999}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{1998}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{1999}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1998}\right)=$________.

三、解答题

1. 计算:

(1)$1+5+5^2+5^3+\cdots+5^{100}$;

(2)$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{10^2}\right)$;

(3) $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{1999\times2000}$;

(4) $1\frac{1}{3}-\frac{7}{12}+\frac{9}{20}-\frac{11}{30}+\frac{13}{42}-\frac{15}{56}$;

(5) $1-2+3-4+\cdots+(-1)^{n+1}\cdot n$.

2. 一个正整数,它的首位数字是 6,去掉这个 6 以后,得到一个新的整数,它恰好是原来整数的 $\frac{1}{25}$. 求所有这样的正整数.

3. 实数 a,b 在数轴上的位置如图所示. 试将 a,b, $|a|,\sqrt[3]{a},\sqrt[3]{b},\sqrt{|a|},\sqrt{b}$ 按从小到大的顺序排列起来.

4. 把四位数 x 先四舍五入到十位,得到数 y,再把 y 四舍五入到百位,得到数 z,再把 z 四舍五入到千位,恰好是 2000,则 x 的最小值和最大值分别是多少?

5. 在算式 $a\times b\times c\times d=1998$ 中,已知 a、b、c、d 是四个不同的自然数,试求 $a+b+c+d$ 的最大值.

6. 已知 $2^a\times5^b=2^c\times5^d=10$,求证:$(a-1)(d-1)=(b-1)(c-1)$.

【模拟训练(二)】

1. 计算：

(1) $\underbrace{11\cdots1}_{2000个1}\underbrace{55\cdots5}_{2000个5}\div\underbrace{33\cdots3}_{1999个3}5$；

(2) $\sqrt{(\underbrace{99\cdots9}_{1999个9})^2+1\underbrace{99\cdots9}_{1999个9}}$；

(3) $\left(\dfrac{7}{3}\right)^{999}\sqrt{\dfrac{3^{1998}+15^{1998}}{7^{1998}+35^{1998}}}$.

2. 实数 a 是由 b 经四舍五入得到的近似值，试比较 a 与 b 的大小.

3. 已知实数 a,b，使得 $a+b,a-b,ab,\dfrac{a}{b}$ 四个数中的三个有相同的数值. 求出所有具有这样性质的数对 (a,b).

4. 设 a 与 b 是两个不相等的有理数，试判断实数 $\dfrac{a+\sqrt{3}}{b+\sqrt{3}}$ 是有理数还是无理数，并说明理由.

5. 已知 a,b,c 为实数，且满足下列等式：

$a^2+b^2+c^2=1$，　①

$a\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)+b\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right)+c\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)=-3$，　②

求 $a+b+c$ 的值.

2 第二讲　整式与分式

【知识导航】

1. 了解整数指数幂的意义和基本性质，会用科学记数法表示数.

2. 了解整式的概念，会进行简单的整式的加、减运算；会进行简单的整式的乘法运算.

3. 会推导乘法公式：$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

4. 会用提取公因式法、公式法进行因式分解.

5. 了解分式概念，会利用分式的基本性质进行约分和通分，会进行简单的分式加、减、乘、除运算.

【直击考点】

中考中，这部分着重考查基础知识，所以应提高基础运算能力. 另外这部分有代数式变形问题，这也是考查重点.

【经典回放】

例 1　设 a,b,c 的平均数为 m；a,b 平均数为 n；n,c 的平均数为 p，若 $a>b>c$，则 m 与 p 的大小关系是________.

精析：比较两数大小，常用“作差法”.

解：a,b,c 的平均数为 m，

即 $m=\frac{a+b+c}{3}$；a,b 的平均数为 n，

即 $n=\frac{a+b}{2}$；n,c 的平均数为 p，

即 $p=\frac{n+c}{2}=\frac{a+b+2c}{4}$.

$m-p=\frac{a+b+c}{3}-\frac{a+b+2c}{4}$

$=\frac{a+b-2c}{12}$.

$\because a>b>c$，$\therefore \frac{a+b-2c}{12}>\frac{c+c-2c}{12}=0$，

即 $m-p>0$，$\therefore m>p$

反思：在比较大小时，可适当放缩达到解决问题的目的.

例 2　已知 x,y,z 为自然数，且 $x<y$.

当 $x+y=2007$，$z-x=2008$ 时，则 $x+y+z$ 的所有值中，最大的一个是________.

精析：由题可知 $x+y+z$ 是不定值，而 $x+y$ 是定值，故 $x+y+z$ 的最大值可由 z 确定，只需 z 取最大值，而 $z=2008+x$，故 z 取最大值只需 x 取最大值即可.

解：$\because x+y=2007$，且 $x<y$，

$\therefore x<\frac{1}{2}\times 2007=1003.5$.

又$\because x$ 为自然数，

$\therefore x$ 的最大值是 1003.

又$\because z-x=2008$，

$\therefore z=x+2008$.

$\therefore z$ 的最大值为 $1003+2008=3011$.

又$\because x+y=2007$，

$\therefore x+y+z$ 的最大值是 $2007+3011=5018$.

反思：此题还可从已知 $x+y=2007$ 及 $z-x=2008$ 中先找到 $x+y+z$，再考虑 $x+y+z$ 之外的其他量的取值情况.

即：$x+y+z+y=2007+4015=6022$，

$y_{min}=1004$，

$\therefore x+y+z$ 最大值为 $6022-1004=5018$.

另外做此题过程中很容易走入求 $x+y+z$ 的值的不回路，要注意这点.

例 3　已知 $m^2+m-1=0$，求 m^3+2m^2+

2008 的值.

精析:此题若求出 m 的值再代入求值太繁难,也容易出错,故不妨采用整体代入法.

解法一:赋值零代入法

$\because m^2+m-1=0$,

$\therefore m^3+2m^2+2008$

$=(m^3+m^2-m)+(m^2+m-1)+2009$

$=m(m^2+m-1)+(m^2+m-1)+2009$

$=2009$.

解法二:赋值代入法

$\because m^2+m-1=0$,

$\therefore m^2+m=1$,

$\therefore m^3+2m^2+2008$

$=(m^3+m^2)+(m^2+m)-m+2008$

$=m(m^2+m)+(m^2+m)-m+2008$

$=2009$.

解法三:降次代入法,

$\because m^2+m-1=0$,

$\therefore m^2=1-m$,

$\therefore m^3+2m^2+2008$

$=m\cdot m^2+2m^2+2008$

$=m(1-m)+2(1-m)+2008$

$=m-m^2+2-2m+2008$

$=-(1-m)-m+2010$

$=-1+m-m+2010$

$=2009$.

解法四:升次代入法

$\because m^2+m-1=0$,

$\therefore m^3+m^2-m=0$,

$\therefore m^3+2m^2+2008$

$=m^3+m^2-m+m^2+m-1+2009$

$=0+0+2009$

$=2009$.

解法五:循环代入法

$\because m^2+m-1=0$,

$\therefore m^2+m=1$.

原式$=m(m^2+2m)+2008$

$=m(m^2+m+m)+2008$

$=m(1+m)+2008$

$=m+m^2+2008$

$=2009$.

反思:注意到整体代入的重要性及多样性.

例 4　分解因式 $x^2-xy-2y^2-x+5y-2$.

精析:此类题目一般可用待定系数法或双十字相乘法分解.

解法一:$\because x^2-xy-2y^2=(x+y)(x-2y)$,

$\therefore$可设原式$=(x+y+m)(x-2y+n)$,(m,n 都是常数)

从而 $x^2-xy-2y^2-x+5y-2$

$=x^2-xy-2y^2+(m+n)x+(n-2m)y+mn$.

比较上式两端的系数得

$$\begin{cases} m+n=-1, \\ n-2m=5, \\ mn=-2, \end{cases}$$

$\therefore m=-2, n=1$,

$\therefore$原式$=(x+y-2)(x-2y+1)$.

解法二:

原式$=x^2-(y+1)x-(2y^2-5y+2)$

$=x^2-(y+1)x-(y-2)(2y-1)$

$=[x+(y-2)][x-(2y-1)]$

$=(x+y-2)(x-2y+1)$.

$$\begin{array}{ccc} 1 & \times & y-2 \\ 1 & & -(2y-1) \\ \hline & -(y+1) & \end{array}$$

反思:此题还可把原式看成是关于 x(或 y)的一元二次方程,则可用求根公式分解,即

$x^2-xy-2y^2-x+5y-2=0$,

即 $x^2-(y+1)x-(2y^2-5y+2)=0$

$\because a=1, b=-(y+1), c=-(2y^2-5y+2)$,

$\therefore \Delta=[-(y+1)]^2-4\times1\times[-(2y^2-5y+2)]$

$=y^2+2y+1+8y^2-20y+8$

$=9y^2-18y+9$

$=9(y-1)^2$,

$\therefore x=\dfrac{(y+1)\pm\sqrt{9(y-1)^2}}{2}$,

$x_1=2y-1, x_2=-y+2$,

$\therefore$原式$=(x-2y+1)(x+y-2)$.

例 5 已知$\frac{2x-3}{x^2+x}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x}$,其中 A,B 为常数,则 A,B 的值为________.

精析:这是部分分式问题,应用恒等式的思想去求出 A、B 的值,然后求 $A-B$.

解:右边$=\frac{Ax+B(x+1)}{(x+1)x}=\frac{(A+B)x+B}{x^2+x}=$左边$=\frac{2x-3}{x^2+x}$,

$\therefore A+B=2$,$B=-3$ 得 $A=5$,$\therefore A-B=8$.

例 6 多项式 $f(x)$ 除以一次式 $(x-a)$ 所得余数等于 $f(a)$ 为余数定理.

(1)求多项式 $4x^3-5x^2+4x-7$ 除以 $(x-2)$ 所得的余数.

解:设 $f(x)=4x^3-5x^2+4x-7$,当 $x=2$ 时,$f(2)=4\times2^3-5\times2^2+4\times2-7=13$,所以余数为 13.

求证:(2)多项式 $f(x)$ 除以 $(x-a)(x-b)$ 所得的余式是$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}x+\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}$ $(a\neq b)$.

证明:多项式 $f(x)$ 除以 $(x-a)(x-b)$ 所得的余式应低于二次,设余式为 $px+q$,商式为 $Q(x)$,所以 $f(x)=(x-a)(x-b)Q(x)+(px+q)$,当 $x=a$,$x=b$ 时,有

$$f(a)=ap+q, \qquad ①$$
$$f(b)=bp+q. \qquad ②$$

解①②组成的方程组,得 $p=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}$,

$q=\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}(a\neq b)$,

所以余式 $=px+q=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}x+\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}$.

当 $f(a)=f(b)$ 时,即$\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}$为余数.

例 7 已知 $xyz=1$,$x+y+z=2$,$x^2+y^2+z^2=16$,求$\frac{1}{xy+2z}+\frac{1}{yz+2x}+\frac{1}{zx+2y}$的值.

精析:此题具有对称性.

解:$\because x+y+z=2$,

$\therefore xy+2z=xy+2(2-x-y)$
$=(x-2)(y-2)$,

同理可得:

$yz+2x=(y-2)(z-2)$,

$zx+2y=(z-2)(x-2)$,

又 $xy+yz+zx=\frac{1}{2}(x+y+z)^2-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)=\frac{1}{2}\times2^2-\frac{1}{2}\times16=-6$,

$\therefore$ 原式 $=\frac{1}{(x-2)(y-2)}+\frac{1}{(y-2)(z-2)}+\frac{1}{(z-2)(x-2)}$

$=\frac{z-2+x-2+y-2}{(x-2)(y-2)(z-2)}$

$=\frac{x+y+z-6}{xyz-2(xy+yz+zx)+4(x+y+z)-8}$

$=-\frac{4}{13}$.

反思:此题难点是直接通分后再设法分解出条件式子.

例 8 求证:$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}$

$=\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}$.

精析:观察各个分式分母的特点,可用左右两边分别通分后变成一个分式,即可得证,但这样计算繁琐,以下用部分分式证之.

证明:$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}=\frac{(a-c)-(a-b)}{(a-b)(a-c)}$

$=\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a-c}$

$=\frac{1}{a-b}+\frac{1}{c-a}$, ①

同理$\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}=\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}$, ②

$\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}=\frac{1}{c-a}+\frac{1}{b-c}$, ③

①②③式左边之和等于右边之和,

$\therefore$原式得证.

例 9 已知$\frac{1}{4}(b-c)^2=(a-b)(c-a)$且 $a\neq$