

高等学校试用教材

弹性力学及有限元

张铁生 赵蓓茗 主编



武汉工业大学出版社

弹性力学及有限元

张铁生 赵蓓茗 编著

武汉工业大学出版社

(鄂)新登字 13 号

内 容 简 介

本书详细论述了弹性力学的基本理论、研究方法以及结构设计等方面若干弹性力学问题的解答。其中,包括弹性力学的平面问题、空间问题、非圆截面杆的扭转、薄板的弯曲以及在工程实践中行之有效的有限单元法的基本理论和计算步骤。书中结合工程实际附有实用计算实例,并在每章末都安排了一定数量的习题,附有答案和必要的提示供读者使用。

弹 性 力 学 及 有 限 元

© 张铁生 赵蓓茗 编著

责任编辑 张守志

责任校对 童南雄

*

武汉工业大学出版社出版发行

(武昌珞狮路 14 号 邮编:430070)

武汉工业大学出版社印刷厂印刷

*

开本:787×1092 1/16 印张:16.5 字数:359 千字

1994 年 10 月第 1 版 1994 年 10 月第 1 次印刷

印数:1—1000 册

ISBN 7-5629-0885-0/TB·7

定价:15.00 元

前 言

弹性力学是一门重要的技术基础课。它推理严谨,能够求解一般的弹性体受任意荷载作用时的普遍解答。它比材料力学的应用范围广泛,计算精度更接近于实际。特别是随着电子计算机的迅速发展,对弹性力学这门学科来说更是如虎添翼,这正是近几年来它越来越受到工科院校以及广大工程技术人员普遍重视的原因。

本书系统地讲述了弹性力学的基本理论,联系工程实际介绍了弹性力学的解题方法和步骤。全书共分八章,前四章是基础理论部分,主要包括弹性力学的基本假设和物理量、平面问题的直角坐标和极坐标的基本方程,按位移、应力、应力函数求解的方法;第五章介绍了弹性力学的数值解法——用有限单元法解平面问题;第六、七、八章则将二维的平面问题推广到三维空间。其中,除空间问题的基本理论和方程以外,还重点阐述了弹性薄板的弯曲、轴类构件的扭转以及若干经典问题的解答。这些内容对于建筑、机械、地质、采矿、冶金等专业或从事这些方面工作的工程技术人员都是不可缺少的。

本书的全部内容所需的学时数,可能略多于现行有关专业教学计划中所规定的学时数,各专业可根据不同情况对其中部分内容适当取舍。弹性力学的逻辑严谨、理论性较强。本书在编写过程中考虑到不同层次的需要,力求联系工程实际突出物理概念,在数学推演方面也力求做到深入浅出简明易懂,以利于读者自学的需要。

本书的第一、二、三、四、五、七、八章由张铁生编写,第六章由赵蓓茗编写,由武汉工业大学工程力学系蒋沧如副教授审阅,同时还得到了工程力学系吴代华教授、力学教研室顾德淦教授和有关同志的关心和帮助,编者在此一并表示感谢!

由于编者水平有限,虽经多次修改,仍难免有不妥或疏漏之处,恳请读者不吝指正。

编 者

1993. 5

目 录

第一章 绪论	1
§ 1-1 弹性力学的研究对象和任务	1
§ 1-2 弹性力学的基本假定	3
§ 1-3 力、应力、应变和位移的基本概念	5
第二章 平面问题的基本理论	11
§ 2-1 平面应力问题与平面应变问题	11
§ 2-2 平衡微分方程	14
§ 2-3 几何方程 相容方程	18
§ 2-4 物理方程	22
§ 2-5 平面问题基本方程汇录与讨论	27
§ 2-6 边界条件	29
§ 2-7 圣维南原理	33
习题	
第三章 平面问题的求解(一)——直角坐标解答	39
§ 3-1 按位移求解平面问题	39
§ 3-2 按应力求解平面问题	41
§ 3-3 按应力函数求解	45
§ 3-4 逆解法与半逆解法 多项式解答	49
§ 3-5 矩形截面梁的纯弯曲	55
§ 3-6 悬臂梁一端受集中力时的弯曲	60
§ 3-7 受均布载荷的简支梁的弯曲	66
§ 3-8 三角形截面水坝承受水压和重力作用的计算	73
§ 3-9 受力体内一点处的应力状态	77
§ 3-10 受力体内一点处的应变状态	83
习题	
第四章 平面问题的求解(二)——极坐标解答	93
§ 4-1 极坐标表示的应力分量和平衡微分方程	93
§ 4-2 用极坐标表示的几何方程	95
§ 4-3 用极坐标表示的物理方程	98
§ 4-4 极坐标中的应力函数和相容方程	99

§ 4-5 应力分量的极坐标变换	102
§ 4-6 轴对称问题基本方程的简化及一般解	104
§ 4-7 厚壁圆筒受均匀压力 压力隧洞	113
§ 4-8 平面曲杆受纯弯曲	118
§ 4-9 均匀应力场中圆孔的孔边应力集中问题	121
§ 4-10 非均匀应力场中圆孔的孔边应力集中问题	122
§ 4-11 半平面体在边界上受集中力和分布力	128
习题	

第五章 用有限元法解平面问题..... 139

§ 5-1 概述	139
§ 5-2 基本物理量及基本方程的矩阵表示	140
§ 5-3 结构的离散化	144
§ 5-4 位移函数	144
§ 5-5 单元的应变矩阵和应力矩阵	149
§ 5-6 单元的刚度矩阵	153
§ 5-7 载荷向结点的移置	158
§ 5-8 平面问题的整体分析	162
§ 5-9 平面问题的求解简例 整体刚度矩阵	164
§ 5-10 有限单元法解题的实施步骤	171
习题	

第六章 空间问题的基本方程式..... 176

§ 6-1 平衡微分方程	176
§ 6-2 几何方程 相容方程	177
§ 6-3 物理方程	179
§ 6-4 边界条件 一点的应力状态	181
§ 6-5 主应力和应力主向	184
§ 6-6 轴对称问题的基本方程及边界条件	188
习题	

第七章 空间问题的解法和几个基本解答..... 194

§ 7-1 按位移求解空间问题	194
§ 7-2 按位移求解的实例	197
§ 7-3 按应力求解空间问题	200
§ 7-4 最简单问题的实例	203
§ 7-5 等截面直杆的扭转	209
§ 7-6 薄膜比拟法	214
§ 7-7 椭圆截面杆的扭转	217
§ 7-8 矩形截面杆的扭转	220

习题

第八章 薄板的弯曲.....	228
§ 8-1 有关概念及弹性薄板的计算假定	228
§ 8-2 弹性薄板弯曲挠度的基本方程	229
§ 8-3 薄板横截面上的内力	234
§ 8-4 板的边界条件	239
§ 8-5 简单例题的解答	243
§ 8-6 圆形薄板的弯曲	248

习题

第一章 绪 论

§ 1-1 弹性力学的研究对象和任务

在蓬勃发展的社会主义建设事业中,我国将在土木建筑、机械制造、水利工程、道路桥梁等方面兴建大量的建筑物和各种各样的机械工程。任何一种建筑物或机械都是根据工程的需要,按照一定的规律,由许多不同的构件(或零件)组合而成的。通常,把它们统称为结构或结构物。例如,在房屋建筑中,由屋架、梁、柱和基础等构件组成的、承受和传递载荷方面起骨架作用的体系称为房屋结构,在道桥工程中把支承行车载荷的桥面、梁系、桥墩和基础组成的体系叫桥梁结构。至于组成结构的元件或机械的单个部分则叫做构件或零件。

构件在实际工程中可以具有各种不同的尺寸和形状,根据几何特征,大致可归纳为四类:

1. 杆 如图 1-1(a)所示,它们的特征是长度远远大于其它两个横向尺寸,即 $l \gg h, l \gg b$ 。

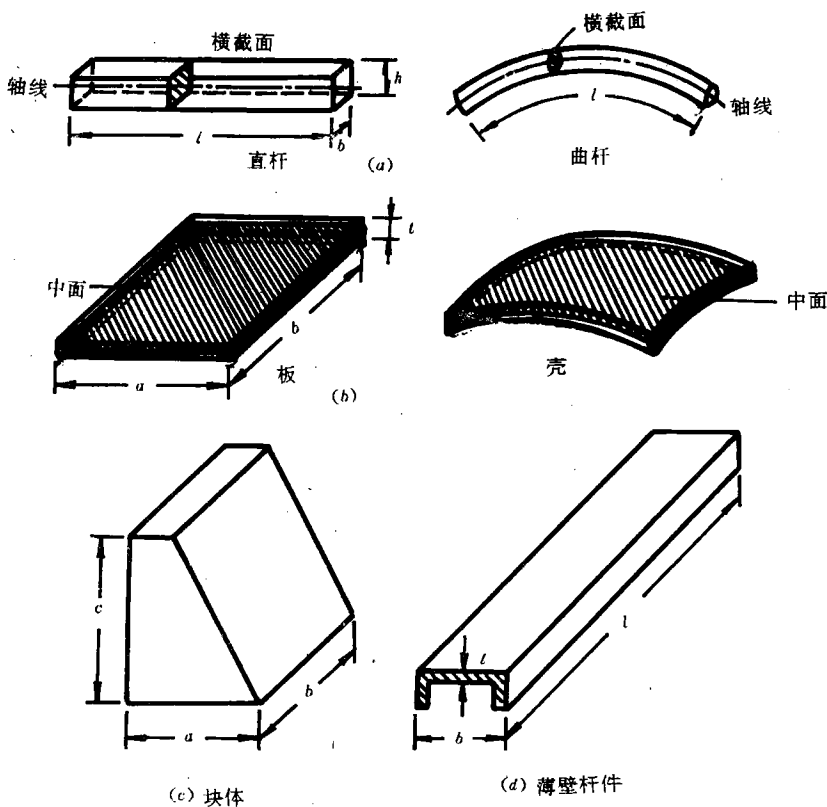


图 1-1

2. 板和壳 如图 1-1(b)所示,它们的几何特征是长度和宽度都远大于厚度,即 $a \gg t, b \gg t$ 。如果将平分厚度 t 的中间平面称为板的中面,则中面为平面的板称为平板,中面为曲面的板称为壳。

3. 块体 如图 1-1(c)所示,它们的几何特征是三个方向的尺寸都属于同阶(同量级)的大小,即 $a \approx b \approx c$,如基座、挡土墙、堤坝等实体结构属于此类。

4. 薄壁杆件 如图 1-1(d)所示,它们的几何特征是三个方向的尺寸相差甚大,属于不同量级的,即 $l \gg b \gg t$,例如型钢或管状杆件等。

为了保证整个建筑物和机械能够正常地工作,首先必须保证组成它们的每一个构件都能正常地工作。弹性力学就是研究各种形状的弹性体受外载因素(外力、温度、边界约束条件改变等)影响而产生的应力、形变和位移的学科。由此可见,弹性力学的任务与材料力学、结构力学一样,都是研究变形固体在弹性阶段的应力和位移,校核各种结构物及其构件是否有足够的强度和刚度的学科。但是,它们在研究对象和方法以及应用的范围方面都有所不同:在材料力学里,主要研究的是杆,即是研究长度远大于其它两个横向尺寸的杆件在拉伸、压缩、剪切、扭转、弯曲作用时的应力和变形;在结构力学里,主要是研究杆件系统,例如桁架、钢架、连续梁等组合结构的计算理论;而弹性力学并不限于杆状物体,前述板、壳以及挡土墙、水坝、块状地基等实体结构均在弹性力学的研究范围内。在研究方法上,材料力学采用了经简化的用初等理论可以描述的数学模型。例如:研究梁的弯曲变形时引用了平面假设,即,变形以前的横截面为平面截面,在变形之后仍然保持为平面,正应力被认为沿横截面按照直线规律变化的,如图 1-2(a)所示。

用弹性力学计算梁的弯曲时,就不需要平面假设。相反地,用弹性力学的方法还可以检查平面假设的正确性。事实上,由弹性力学的分析证明:只有梁的截面高度远小于跨度的情况下,平面假设才是令人满意的。如果梁的长度 h 和跨度 l 是同阶的(如图 1-2(b)所示的深梁),那么平面假设就不再适用,因为在这种情况下,应力沿截面并不按直线规律变化(图 1-2(b))。解决这类问题材料力学是无能为力的,这时只能靠弹性力学的方法求解。

在计算有铆钉孔的受拉平板时,材料力学通常按扣除小圆孔后的净面积来计算强度,并认为应力分布是均匀的,事实上在孔的附近将产生应力集中,这些应力并非均匀的(图 1-3)。近孔处的应力只能用弹性力学的方法求得。

计算变截面杆件的拉伸问题(图 1-4(a)),材料力学把任意横截面的应力按均匀拉应力处理(图 1-4(b)),这样对整段分离体的平衡条件可以满足,但是不能满足如图 1-4(c)所示的任意单元体的平衡。

从以上各例可知:材料力学的解答有时只是近似的,只是在一定的范围内与实际情况出入不大。但是,条件一旦改变,并超出一定范围后,由于误差太大在工程上就不能应用。而弹性力学在研究杆件时采用了较精确的数学模型,一般不引用那些假定,因而得出的结论就比较精确,可以用来校核材料力学得出的近似解答,并且给予精确度的评价。

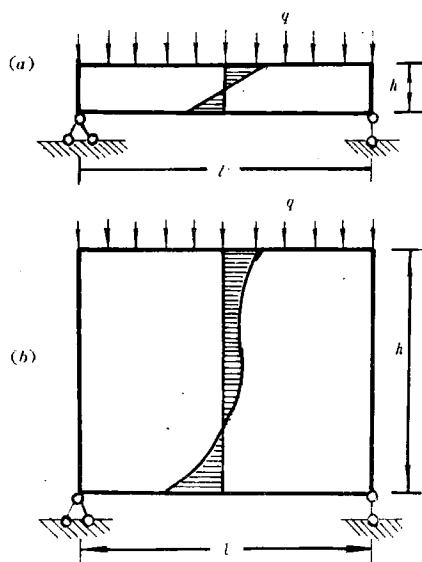


图 1-2

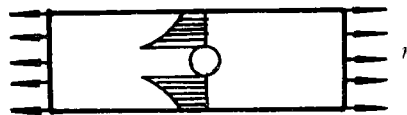


图 1-3

除此以外,还有更为复杂的工程问题,例如,在外荷载作用点附近的局部应力以及在无限大弹性体内的应力和变形的分析、非圆形截面棱柱体的扭转、板壳的计算等等,所有这些问题都必须用弹性力学的方法来解决。

由此可见,弹性力学为研究结构物或其构件开拓了新的领域,在研究方法上也提高到了一个新的高度。当今在工程技术的各个领域,例如在地质学、物理学等各个方面都广泛应用了弹性力学的知识和方法。随着科学技术的发展,作为工程技术人员对弹性力学基本知识的掌握更是必不可少的。

应该指出:虽然弹性力学、结构力学和材料力学所研究的对象和方法不尽相同,但是,随着科学技术的不断发展和相互借鉴,近几十年来不少学者曾致力于这三者的综合利用的研究,更加扩展了弹性力学的应用范围。例如有限元法就是如此。它把连续弹性体划分为有限多个有限大小的构件(单元),然后用结构力学的位移法、力法或混合法求解而取得成功。此外对同一结构物的各个构件,根据实际情况分别采用弹性力学或结构力学或材料力学的方法进行计算仍能得到满意的结果,而且节省了计算工作量。总之,弹性力学、结构力学和材料力学通常被称为建筑力学的分支学科,这三门学科之间不可能划分出明显的界限,更不是一成不变的。所以在工程设计和施工中要善于综合应用。

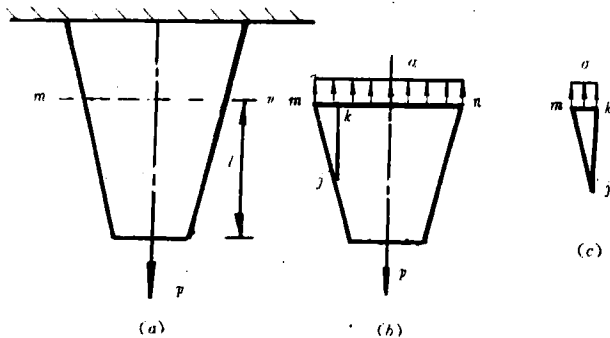


图 1-4

§ 1-2 弹性力学的基本假定

客观事物总是错综复杂的,因此,人们在研究问题的过程中必须抓住事物的主要矛盾,忽略某些可暂时不考虑的次要因素,将研究的对象简化为一种理想的、满足实用精度、便于分析和计算的数学模型。正如列宁所指出的那样:“从具体的东西上升为抽象的东西,思维不是离开——如果它是正确的——真理,而是接近真理。物质的抽象、自然规律的抽象、价值的抽象等等,一句话,一切科学的(正确的、郑重的、不是胡诌的)抽象,都更深刻、更正确、更完全地反映自然。”弹性力学的研究方法也是如此。为了便于研究弹性力学,提出如下的基本假定:

1. 物体是连续的

也就是假定在整个物体体积中完全充满组成该物体的介质,而不留下任何空隙。或者说,物体是绝对密实的。这样,物体内部的一些物理量,例如应力、应变、位移等等,才可能连续,并可能用坐标的连续函数来表示。实际上,一切物体都是有由许多微粒组成,它们有不同程度的空隙。严格地说与上述假定不相符合。但是,由于这些空隙与构件的尺寸相比都极其微小,以至在所取的微元中包含了大量微粒。弹性力学是从微观角度研究构件的强度,因而,物体连续性假定就不会引起显著的误差。

2. 物体是均匀的

也就是说整个物体是由同一材料组成的。这样从物体内部任意取出一部分来分析,不论其体积

大小如何,它们的力学性能都完全一致。或者说材料的力学性质不随位置坐标而改变。从而,可以从物体中任意部分截取一个微元进行研究;同时,也可以将从大尺寸的试件中测得材料的力学性质引用到任意微小的单元体中去。如果物体由两种以上的材料组成,例如混凝土,那么,只要每一种材料的颗粒尺寸远远小于物体的尺寸、而且在物体内部均匀分布,这种物体就可以看作是均匀的。

3. 物体是各向同性的

即认为在物体内部的任意一点,沿该点任意方向的力学性质相同。或者说,围绕该点沿不同方向截取的单元体,它在各个面上的物理性质不随截取的方向改变。由金属学得知,对于钢铁等金属材料,虽然晶体本身表现出明显的各向异性,但由于晶体很微小,而且是随机排列的,(通常,每立方吋钢材里包含有几百万个这样的晶粒。)所以从统计学的观点出发,在宏观上可以认为多晶体的金属材料是各向同性的。

工程上还有些材料,如木材、复合材料等,它们沿不同方向的力学性质显然是不同的,各向异性材料将在各向异性弹性力学中予以研究。

凡是符合以上三个假定的物体,称为理想变形固体。否则被称为非理想变形固体。

4. 物体是完全弹性的

弹性是物体在引起形变的外力撤除后,能够恢复原来形状的性质。所谓完全弹性指的是外力撤除后,物体能完全恢复原状,而没有任何残余形变。对于完全弹性体在任何一瞬间的变形,完全取决于它在该瞬间所受的外力,而与它过去的受力情况无关。这一假定保证了应力和应变的一一对应的关系,或者说应力与应变有单值对应的关系。

凡是符合以上四个物理假定的物体,被称为理想弹性体。

5. 位移和形变是微小的

即假定物体在受力变形以后,物体内部所有各点的位移远远小于物体原来的尺寸。根据此几何假定,在研究受力平衡时,可以忽略由于变形所引起的物体尺寸和位置的改变。用变形以前的尺寸代替变形以后的尺寸不致于产生明显的误差;在考察应变和位移时,由于应变和转角本身远小于1,所以,它们的二次幂、高次幂及交乘项都可以忽略不计。从而导致了弹性力学基本方程的线性化,因此可以应用叠加原理。

6. 物体在加载以前处于初应力为零的自然状态

通常,在物体内部总是有应力的,例如残余应力和原子间的相互作用力等。但是弹性力学所研究的应力指的是由于外载荷或温度变化等因素引起的物体内的附加应力。为方便起见,以后均简称为应力。

应当指出:在某些特殊情况下,例如,在土建工程中,有时为了节省原材料而采用了预应力工艺,这种初应力通常是不可忽略的,此时常应用叠加原理以求解。

上述的假定在所限定的范围内,已为长期的生产实践证实是正确的。但是,随着科学技术的不断发展,人们对事物的认识也在不断地深化,上面的假设也并非是一成不变的。因此要特别注意使用的条件而不能生搬硬套,否则很可能导致错误的结果。

建立在上述基本假定基础上的弹性力学,称为经典弹性力学,它是研究理想弹性体小变形问题的理论,在工程实践中的应用非常广泛,同时也是学习其它后续力学课程的重要基础。本书的前四章即属于此类。但是,为了求解的需要,对于某些问题,例如板、壳、薄壁构件等,也引入类似于弯曲梁中的几何变形假定或应力分布假定,它们称为应用弹性力学。

弹性力学的基本内容包括两大部分:建立方程和根据基本方程求解各类具体问题。

§ 1-3 力、应力、应变和位移的基本概念

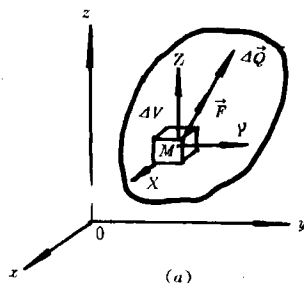
弹性力学里经常遇到的物理量有四个,即外力、应力、应变和位移,其中多数已在理论力学和材料力学中遇到,随着弹性力学研究范围的扩大,这里仍有再给予系统的定义和说明的必要。

1. 外力

解决任何一个力学问题,作受力分析并画出研究对象的受力图是十分重要的。通常被研究的构件由其它构件支撑或与其它构件以一定的方式联结着。被研究构件受到的与其联系的物体对它的作用力叫做外力。作用于物体上的外力按分布情况分为两类:体积力或表面力,在弹性力学中简称为体力或面力。

体力——指的是连续分布作用在物体体积内各质点上的外力。例如重力、惯性力、电磁力等。如果物体各点的体积力相同,称为常体积力,如果不同则称为变体积力,它是坐标位置的函数。表示物体某一点 M 所受体力的方法是:包含 M 点截取一个微元,在直角坐标系中,通常以 M 点为体心截取一正六面体,如图 1-5(a) 所示。设作用于体积 ΔV 上的体力为 $\Delta \vec{Q}$,则 $\Delta \vec{Q}$ 与 ΔV 的比值称为体力的平均集度。即

$$\vec{F}_{\text{平均}} = \frac{\Delta \vec{Q}}{\Delta V}$$



当微元的体积 ΔV 无限减小趋于 M 点时, $\Delta \vec{Q}$ 和 $\vec{F}_{\text{平均}}$ 将不断地改变大小、方向和作用点并趋于一定的极限 $\vec{F}$,即

$$\vec{F} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{Q}}{\Delta V} \quad (1-1)$$

$\vec{F}$ 称为物体在 M 点的体力集度。因为 $\Delta \vec{Q}$ 是力矢量, ΔV 为标量,所以体力集度 $\vec{F}$ 也是矢量,它的极限方向与 $\Delta \vec{Q}$ 的极限方向一致。矢量 $\vec{F}$ 在直角坐标轴 x, y, z 上的投影用 X, Y, Z 表示,称为该物体在 M 点的体力分量。并规定体力分量与坐标轴正向一致时为正,反之为负。它们的量纲是[力]/[长度]³。在工程单位制中常用的单位为公斤每立方厘米或吨每立方米($\text{kg}/\text{cm}^3, \text{t}/\text{m}^3$),在国际单位制中常用的单位为牛顿每立方米或千牛顿每立方米($\text{N}/\text{m}^3, \text{kN}/\text{m}^3$)。物体各点的体力在一般情况下是不相同的。

面力——指的是作用于物体表面上的外力。例如与该物体接触的水压力、风压力或固体的接触力等。一般来说,面力是物体表面各点位置坐标的函数。

为了表示物体表面上任意一点 M 的面力,类似体力的研究方法,包含 M 点在物体表面取微面积 ΔS (图 1-5(b)),设作用于 ΔS 上的面力为 $\Delta \vec{Q}'$,则 $\Delta \vec{Q}'$ 与 ΔS 的比值称为面力的平均集度,即

$$\vec{F}'_{\text{平均}} = \frac{\Delta \vec{Q}'}{\Delta S}$$

当微元面积 ΔS 无限减小趋近于 M 点时, $\Delta \vec{Q}'$ 和 $\vec{F}'_{\text{平均}}$ 也将不断地改变其大小、方向和作用点趋于一

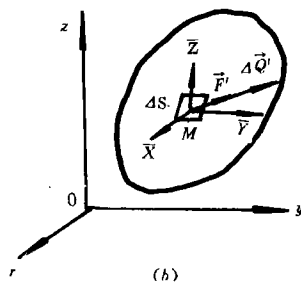


图 1-5

定的极限 $\vec{F}'$, 即

$$\vec{F}' = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{Q}}{\Delta S} \quad (1-2)$$

$\vec{F}'$ 称为物体表面 M 点的面力集度。因为 $\Delta \vec{Q}$ 是矢量, ΔS 是标量, 所以面力集度 $\vec{F}'$ 也是矢量, 它的极限方向与 $\Delta \vec{Q}$ 的极限方向一致。 $\vec{F}'$ 在坐标轴 x, y, z 上的投影 $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$, 称为 M 点的面力分量。并规定面力分量与坐标轴正方向一致时为正, 反之为负。它们的量纲是[力]/[长度]²。在工程单位制中常用的单位为公斤每平方厘米或吨每平方米($\text{kg}/\text{cm}^2, \text{t}/\text{m}^2$), 在国际单位制中的常用单位为牛顿每平方米或千牛顿每平方米($\text{N}/\text{m}^2, \text{kN}/\text{m}^2$)。

如果面力作用的面积远远小于整个物体表面的面积, 就可以近似的把该面力看作是集中地作用在一“点”上, 这样的外力称为集中力或集中载荷。火车车轮作用在钢轨上的压力, 面积较小的柱体传递到面积较大的基础上的压力, 都可以看作是集中力的作用。应当指出, 集中力作用于“点”, 这只是一种简化。不过, 使用了这种近似的概念, 一般不会对整体的应力产生显著的误差。集中力的量纲是[力], 在工程单位制中的单位是公斤或吨(kg, t), 在国际单位制中常用的单位是牛顿或千牛顿(N, kN)。

此外, 还可以按外力随时间的改变, 把载荷分成静载荷和动载荷。本课程主要是研究静载荷作用下弹性体内的应力和形变。

2. 应力

受外力作用的物体, 内部将产生抵抗形变的内力, 为了研究物体内部某点 M 处的内力, 通常采用截面法, 如图 1-6 所示。

假想用通过 M 点的截面 mn 将物体分成 A, B 两部分, 取 A 为研究对象, 撤开 B 部分将在截面 mn 上留下对 A 部分的作用力。由牛顿第三定律, A 部分也给 B 部分以大小相等、方向相反的力, 这种物体本身不同部分之间相互的作用力称为内力。内力表达了物体内部某截面 mn 上合力的总效应, 尚不能作为物体是否破坏的依据。例如: 有两根材料相同、截面积不同的等直杆件, 受相同大小的轴向拉力作用, 由截面法得知, 它们的内力相等, 随着轴向拉力的增加, 截面积小的杆件先破坏而截面积大的杆件不容易破坏, 其原因由材料力学得知, 是由于前者有较大的应力所致。因此, 为了解决构件的强度问题, 就必须研究截面上内力的分布状况。为此, 可以围绕 M 点取一微小面积 ΔA , 设作用在面积 ΔA 上的内应力为 $\Delta \vec{P}$, 把 $\Delta \vec{P}$ 与 ΔA 的比值称为面元 ΔA 上的平均应力, 即

$$\vec{P}_{\text{平均}} = \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta A}$$

令 ΔA 无限减小而趋近于 M 点时, 定义极限

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta A} = \frac{d\vec{P}}{dA} = \vec{P} \quad (1-3)$$

为物体内部过 M 点的全应力。因为 ΔA 是标量, 所以全应力 $\vec{P}$ 的极限方向与微内力 $\Delta \vec{P}$ 的极限方向一致。在一般情况下, 全应力 $\vec{P}$ 不垂直于 mn 截面。由材料力学得知, 物体的变形和材料的强度与作用在截面的法线和切线方向的应力分量直接相关, 为此, 将 $\Delta \vec{P}$ 分解为垂直于截面的法向分力 $\Delta \vec{N}$ 和

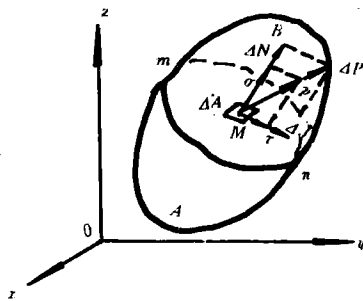


图 1-6

平行于截面的切向分力 $\Delta \vec{T}$ ，分别取极限，得到

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta A} &= \sigma \\ \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta A} &= \tau \end{aligned} \right\} \quad (1-4)$$

σ 称为点 M 的正应力， τ 称为点 M 处的剪应力。显然，通过 M 点可以截取无数个不同的截面，每一截面上都可以定义自己的正应力、剪应力，因此，描述一点的应力不仅取决于该点的位置，还取决于截面的方向。由图 1-6 可知，全应力 p 与应力分量之间具有如下关系

$$p^2 = \sigma^2 + \tau^2 \quad (1-5)$$

其中，正应力将力图使质点沿截面法线方向分开或接近；剪应力则使一些质点沿着截面的切线方向相对于另一些质点作相对运动。

应力的量纲为[力]/[长度]²。在工程单位制中常用单位是公斤/厘米²或吨/米²(kg/cm², t/m²)；在国际单位制中的常用单位为牛顿/米²，或称为帕斯卡(Pascal)，它的中文代号简称“帕”，国际代号简称“Pa”。

3. 一点的应力状态、应力分量的记法和符号规定

一点的应力状态，指的是受力物体通过一点处、沿不同方向截面上应力变化的情况。研究一点应力状态的目的在于：

- (1) 寻求最大应力发生的方位及大小，解决构件的强度计算问题；
- (2) 分析并解释构件和材料破坏的原因；
- (3) 为实验应力分析提供理论根据。

为了研究一点的应力状态，通常是以该点 $A(x, y, z)$ 为体心，用三对平行于坐标轴的平面截取出一个微小的正六面体，如图 1-7 所示，这个微小的正六面体叫做单元体。在外力作用下，单元体的各个微面将随之产生应力，一般说来，应力的大小和方向是位置坐标的函数。当截取的单元体极其微小时，可以近似地认为：作用在各种微面积上的应力均匀分布。（如果物体本身所处的应力状态就是均匀的，例如三向均匀受拉或三向均匀受压，在这种情况下，所取单元体的棱边则可以是有有限大小的。）取出单元体后，若能求得各面元上应力的分布，即可利用截面法和静力平衡条件，求出通过 A 点的任意斜截面上的应力以及最大正应力、最大剪应力，这就是研究一点处应力状态的基本方法或途径。

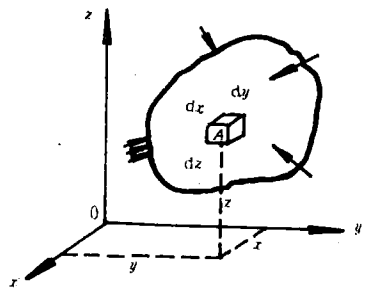


图 1-7

为了便于以后的讨论，下面对应力表示方法做出如下统一的规定：设微小六面体的棱边分别为 dx, dy, dz ，将每一微面上的全应力分解为一个正应力和两个剪应力，分别与三个坐标轴平行（如图 1-8 所示）。这里暂时不讨论这些应力之间有什么关系，而只规定表示它们的符号。先看正应力：由于正应力总是沿着所在面的法线方向，因此，只需要一个坐标脚码就足以表明它所在的面及其方位，它们分别是 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 。正负号规定如下：在外法线的指向与坐标轴正方向一致的面上（称为正面），正应力与坐标轴的正向一致为正，在外法线的指向与坐标轴负方向一致的面上（称为负面），正应力以沿坐标轴负方向为正，沿坐标轴正方向为负。或者说，正面上的正应力与坐标轴正方向一致者为正，反之为负。负面上的正应力与坐标轴的负方向一致者为正，反之为负。它与材料力学中所习惯使用的拉伸为正、压缩为负的规定是一致的。对于某微面上的剪应力，就其总量来说，它可能不

平行于任何一个坐标轴,但是可以把它分解为平行于坐标轴的两个剪应力分量。并用两个坐标脚码表示,前一个脚码代表所在面的法线方向,后一个脚码代表剪应力本身的指向。例如,在法线与 X 轴平行的面上,可将剪应力分解为平行于 Y 轴和 Z 轴的两个分量,分别用 τ_{xy} 及 τ_{xz} 表示。对于剪应力的正负号规定与正应力一样:凡正面上的剪应力以沿坐标轴正方向为正,沿负方向为负。反之,负面上的剪应力以沿坐标轴负方向为正,沿正方向为负。对于剪应力来说与材料力学的规定不完全相同。图 1-8 所示的全部应力分量均为正的。

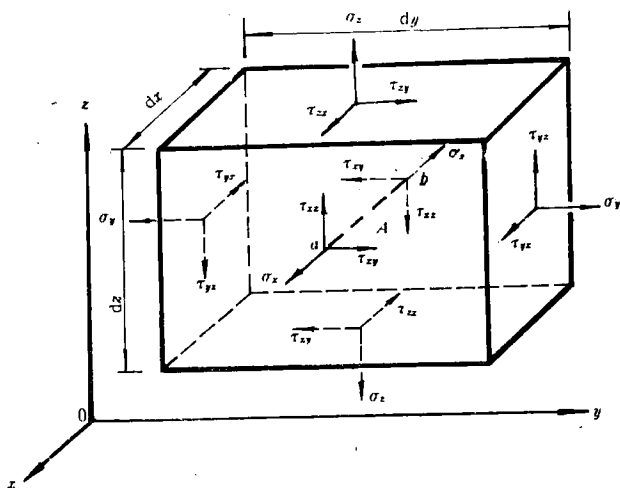


图 1-8

按此符号规定,为表示过一点(例如 A 点)的三对相互垂直的应力,如果暂不考虑应力随坐标的改变(也就是把微小六面体的应力当作均匀应力)以及体力的作用,总共将有 18 个应力分量,其中,两两对应面上同名的应力相等,故在单元体的 6 个面上共有 9 个应力分量。它们是: $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \sigma_y, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy}$, 为简明起见,用矩阵形式表示为

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (1-6)$$

六个剪应力之间还有一定的相互关系。例如,以连接六面体前后两个面中心的直线 ab 为轴,列出力矩平衡方程 $\sum M_{ab} = 0$, 有

$$2\tau_{yz}dx dz \frac{dy}{2} - 2\tau_{xy}dx dy \frac{dz}{2} = 0$$

化简得

$$\tau_{yz} = \tau_{xy}$$

同理,可以列出其余两个类似的方程,化简得

$$\tau_{xz} = \tau_{yx} \quad \tau_{xy} = \tau_{yz} \quad (1-7)$$

这就是大家所熟悉的剪应力互等定理。即作用于两个互相垂直的面上并且垂直于该两面交线的剪应力互等(大小相等,正负号相同)。因此,剪应力记号的两个坐标脚码可以互换。于是,受力体内一点处的单元体上,9 个应力分量只有 6 个是独立的。以后将要证明,物体任一点处这 6 个独立的应力分量被确定以后,该点处任意方位的截面上的应力均可用它们来表示,即该点处的应力状态就完全确定了。

[例 1-1] 在图示单元体上按规定指向分别画出应力状态

(a)

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 100 & -40 & 80 \\ -40 & -50 & 60 \\ 80 & 60 & 120 \end{bmatrix},$$

(b)

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 13 & 5 & -10 \\ 5 & 20 & -8 \\ -10 & -8 & -50 \end{bmatrix}$$

的应力分量(单位:MPa)。

解:由前一个矩阵已知:正应力 $\sigma_x = 100\text{MPa}$ 、 $\sigma_y = -50\text{MPa}$ 、 $\sigma_z = 120\text{MPa}$,剪应力 $\tau_{xy} = \tau_{yx} = -40\text{MPa}$ 、 $\tau_{xz} = \tau_{zx} = 80\text{MPa}$ 、 $\tau_{yz} = \tau_{zy} = 60\text{MPa}$ 。选取适当比例尺,应力状态(a)的应力分量如图 1-9 所示。

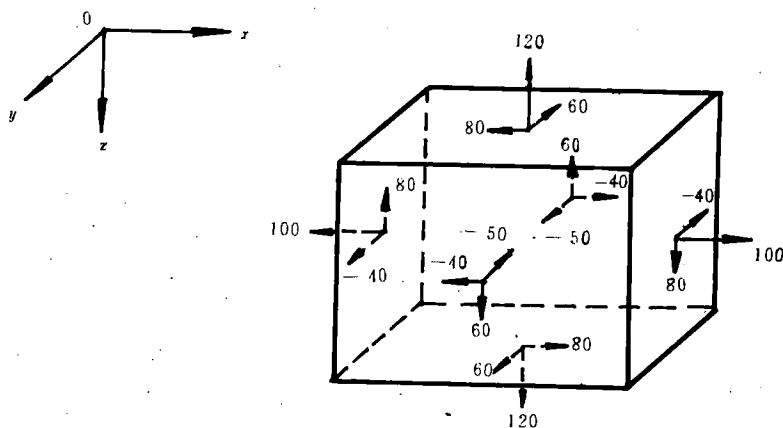


图 1-9

同理,可以绘出应力状态(b)的单元体应力分量图。留给读者作练习完成。

4. 位移

物体内各点位置的改变称位移。一般可以认为它是由两种性质的位移所组成:

(1) 整个物体随同刚体运动所引起的位移。这种位移并不使受力体的形状与质点间的相对距离发生变化。要想使物体不作刚体运动,则需要给物体以足够的约束。

(2) 物体受到外力作用或其它因素影响时,由于发生变形,各质点间产生相对位移。

弹性力学研究的位移,是指具有足够约束的弹性体内质点的位移,即整个弹性体没有刚体位移。

在变形过程中,物体中的各点都可能向任意方向产生位移,设某一点 A 在物体变形后移到 A' 处(图 1-10),则 $\overrightarrow{AA'}$ 称为全位移矢量,就一般而言, $\overrightarrow{AA'}$ 是一个空间的三维矢量。习惯上常将全位移矢量 $\overrightarrow{AA'}$ 沿坐标轴 x, y, z 分解为 3 个位移分量,分别用 u, v, w 表示。显然,位移分量 u, v, w 也必定是 x, y, z 的位置坐标函数。并规定沿坐标轴正向的位移分量为正,反之为负。它们的量纲为[长度]。

5. 应变

弹性体的整体变形可能是很复杂的,但是,我们假想地把该弹性体分割成无数个微小的平行六面体,它们的 6 个面分别和 3 个坐标平面平行,就其中的每个单元体来说,情况却比较简单,无非是这样两类变形:即棱边长度的改变和两正交面之间夹角的改变(图 1-11)。棱边长度的相对改变量称为线应变,用 ϵ 表示。规定伸长为正,缩短为负;两相交面之间的夹角(直角)的改变量(用弧度表示)称为剪应变,用 γ 表示。剪应变以微单元体上与正向坐标面平行的两个正交面的夹角减小为正,反之

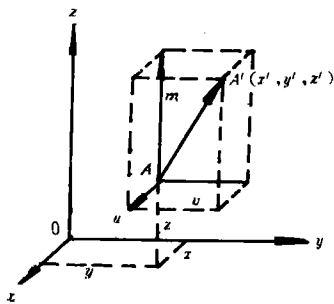


图 1-10

为负。由此得出该微单元体的三个线应变(或正应变)

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\Delta dx}{dx} \\ \varepsilon_y &= \frac{\Delta dy}{dy} \\ \varepsilon_z &= \frac{\Delta dz}{dz} \end{aligned} \right\} \quad (1-8)$$

和三对两两相等的 6 个剪应变

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{xy} &= \gamma_{yx} = \alpha + \beta \\ \gamma_{yz} &= \gamma_{zy} \\ \gamma_{zx} &= \gamma_{xz} \end{aligned} \right\} \quad (1-9)$$

共 9 个应变分量。应当指出,此处 γ_{xy} 与 γ_{yx} 系代表完全相同的量,称为在 xy 平面中的剪应变。它与应力分量 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ 的含义有所不同,因为 τ_{xy} 与 τ_{yx} 并不是同一个剪应力,只不过它们是相等而已。

9 个应变分量用矩阵表示为

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (1-10)$$

根据定义,正应变和剪应变都是无量纲的量。

以后可以证明,如果已知物体任意一点的 6 个应变分量 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$, 就可以求得经过该点的任意方向线段的线应变,也可以求得过该点的任意两线段之间夹角的改变,此点的应变状态为已知。

作为本章的结束语,最后应当指出两点:

其一,前述弹性体内任意一点的体力分量、面力分量、应力分量、位移分量、应变分量均随该点所在的位置改变,是位置坐标的函数。

其二,工程中提出的弹性力学问题,形式可能是多种多样的,但就其本质而言,可归纳为在给定物体的形状、尺寸、材料的弹性模量、体力以及边界约束情况和面力的前提下,求解弹性体内的应力场或位移场。前者指的是弹性体内各点的应力分布规律及位移分量值,后者指的是弹性体内各点的位移分量值。当位移分量确定后,依几何关系,应变分量也就唯一地确定了,这就是弹性力学的命题。

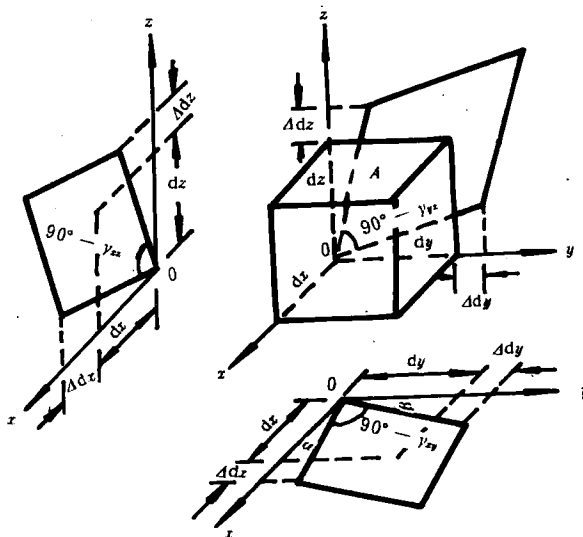


图 1-11