國民政府內政部註冊二十五年四月一日執照警字第七一七四號
民國二十五年一月發行
民國三十年五月再版

微積分學初步（全一冊）

實價國幣一元
（郵運匯費另加）

著者 李儼
發行者 中華書局有限公司 代表人 路錫三
印刷者 上海澳門路 美商永寧有限公司
總發行處 昆明 中華書局發行所
分發行處 各埠 中華書局

微積分學初步

目　次

微　分　法

第一章　微分法公式及其解法

第二章　微分法之應用及其別解

第三章　微分法解義及極大極小問題

積　分　法

第四章　積分法公式及其解法

第五章 積分法之應用

第六章 重積分及其應用

微積分學初步

微分法

第一章

微分法公式及其解法

第一節　總論及微分公式

總論　研究微積分學之先,應知函數之意義,及其分類.

例如:　$y=3x^2+\frac{5}{x}+c$ 式,爲 x 之函數,可書爲:

$y=f(x)$, 而 y 之值,隨 x 之值,卽 x 所函之數而增減.

微分學之目的,卽求 $f(x)$ 中 x 值有增減,則 $f(x)$ 隨之如何變化而已.　如上式 $f(x)$ 中 x 之值增一極小之值 Δx,則變爲 $x+\Delta x$,而 $f(x)$ 式變爲:

$$y+\Delta y=3(x+\Delta x)^2+\frac{5}{x+\Delta x}+c.$$

由代數法計算得:

$$y+\Delta y=\{3x^2+3\cdot 2x.\Delta x+3(\Delta x)^2\}+\frac{5}{x+\Delta x}+c$$

或, $(3x^2+\frac{5}{x}+c)+\Delta y=3x^2+6x.\Delta x+3(\Delta x)^2$

$$+\frac{5}{x+\Delta x}+c.$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=6x+3\Delta x-\frac{5}{x(x+\Delta x)}.$$

如 $\Delta x\to o$, 卽 Δx 爲極小,而漸近於 o, 則 Δx 及其與他數所成之因數,可以不計,右式變爲 $6x-\frac{5}{x^2}$, 此時原式可書爲:

$\frac{dy}{dx}=6x-\frac{5}{x^2}$, 就中 $\frac{dy}{dx}$, 稱爲微分係數;此記號亦作 $\frac{d}{dx}y$, $\frac{d}{dx}f(x)$, y', $f'(x)$, 或 $\dot{y}$ 等.

微分法爲積分法之基礎,且最便於求某函數式 $f(x)$ 之極大極小值,其後當續論之. 普通人士,多視微積分學爲畏途,實則微積爲代數術之別徑,加以熟習,了無困難.本書更力避無謂之說述,并注重應用,多演習題,用助興趣.

微分公式 普通微分法,有次之各公式:

代函數微分法諸公式:——

1. $\frac{d(au)}{dx}=\frac{adu}{dx}$,

2. $\frac{d(u+v)}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}$,

3. $\frac{d(uv)}{dx}=v\cdot\frac{du}{dx}+u\cdot\frac{dv}{dx}$,　$\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

4. $\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx}=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$,　$y=f(u)\ u=f'(x)$

5. $\frac{d\,f(u)}{dx}=\frac{d\,f(u)}{du}\cdot\frac{du}{dx}$,

6. $\frac{d^2\,f(u)}{dx^2}=\frac{df}{du}\cdot\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2f}{du^2}\cdot\frac{du^2}{dx^2}$,

7. $\frac{dx^n}{dx}=nx^{n-1}$,

7a. $\frac{da}{dx}=0$.

指函數及對函數徵分法諸公式:——

8. $\frac{de^x}{dx}=e^x$,

8a. $\frac{de^{ax}}{dx}=ae^{ax}$.

9. $\frac{da^u}{dx}=a^u\cdot\frac{du}{dx}\cdot\log_e a$.

9a. $\frac{d(\log_e y)}{dx}=\log_e a\cdot\frac{du}{dx}$, 而 $y=a^u$.

9b. $\frac{d(\log_e x)}{dx}=\frac{1}{x}$,

9c. $\frac{d(\log_e y)}{dx}=\frac{\frac{dy}{dx}}{y}$.

9d. $\frac{da^x}{dx}=a^x\cdot\log_e a$.

10. $\dfrac{dx^x}{dx} = x^x(1+\log_e x)$,

11. $\dfrac{d(\log_a x)}{dx} = \dfrac{1}{x\log_e a} = \dfrac{\log_a e}{x}$.

三角函數微分法諸公式:——

12. $\dfrac{d\sin x}{dx} = \cos x$,

13. $\dfrac{d\cos x}{dx} = -\sin x$,

14. $\dfrac{d\tan x}{dx} = \sec^2 x$,

15. $\dfrac{d\,\mathrm{ctn}\,x}{dx} = -\csc^2 x$,

16. $\dfrac{d\sec x}{dx} = \tan x.\sec x$,

17. $\dfrac{d\csc x}{dx} = -\mathrm{ctn}\,x.\csc x$.

三角反函數微分法諸公式:

18. $\dfrac{d\sin^{-1}x}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, 但 $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \sin^{-1}x \leqq \dfrac{\pi}{2}$

19. $\dfrac{d\cos^{-1}x}{dx} = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, 但 $0 \leqq \cos^{-1}x \leqq \pi$

20. $\dfrac{d\tan^{-1}x}{dx} = \dfrac{1}{1+x^2}$, 但 $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \tan^{-1}x \leqq \dfrac{\pi}{2}$

21. $\dfrac{d\,\mathrm{ctn}^{-1}x}{dx} = \dfrac{-1}{1+x^2}$, 但 $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \mathrm{ctn}^{-1}x \leqq \dfrac{\pi}{2}$

22. $\dfrac{d\sec^{-1}x}{dx} = \pm\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$,

但　$o \leqq \sec^{-1}x \leqq \pi$,

23　$\dfrac{d\csc^{-1}x}{dx}=\dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$,

但　$-\dfrac{\pi}{2}\leqq \csc^{-1}x \leqq \dfrac{\pi}{2}$,

第二節　微分諸公式解證

1. $\dfrac{d(au)}{dx}=\dfrac{adu}{dx}$.

解　設 $y=au$, 則 $y+\triangle y=a(u+\triangle u)$,

或　$\triangle y=a\triangle u$.

兩邊同除以 $\triangle x$, 則 $\dfrac{\triangle y}{\triangle x}=a\dfrac{\triangle u}{\triangle x}$.

$\triangle x\to 0$, 得 $\dfrac{d(au)}{dx}=\dfrac{adu}{dx}$　　(1)證訖.

2. $\dfrac{d(u+v)}{dx}=\dfrac{du}{dx}+\dfrac{dv}{dx}$.

解　設 $y=u+v$, 則 $y+\triangle y=(u+\triangle u)+(v+\triangle v)$,

或　$\triangle y=\triangle u+\triangle v$.

兩邊同除以 $\triangle x$, 又 $\triangle x\to 0$, 得 $\dfrac{d(u+v)}{dx}=\dfrac{du}{dx}+\dfrac{dv}{dx}$.

(2)證訖.

3. $\dfrac{d(uv)}{dx}=v\cdot\dfrac{du}{dx}+u\cdot\dfrac{dv}{dx}$.

解　設 $y=uv$, 則 $y+\triangle y=(u+\triangle u)(v+\triangle v)$,

或　$\triangle y=v\cdot\triangle u+u\cdot\triangle v+\triangle u\cdot\triangle v$.

兩邊同除以$\triangle x$, 得 $\frac{\triangle y}{\triangle x}=v\frac{\triangle u}{\triangle x}+u\frac{\triangle v}{\triangle x}+\frac{\triangle u\cdot\triangle v}{\triangle x}$.

末項 $\frac{\triangle u\cdot\triangle v}{\triangle x}$ 與前二項較,其數極小. 又 $\triangle x\to 0$ 時,得

$$\frac{d(uv)}{dx}=v\cdot\frac{du}{dx}+u\cdot\frac{dv}{dx}$$ (3)證訖.

4. $$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx}=\frac{v\cdot\frac{du}{dx}-u\cdot\frac{dv}{dx}}{v^2},$$

解 設 $y=\frac{u}{v}$, 則 $y+\triangle y=(u+\triangle u)(v+\triangle v)^{-1}$;

按二項式展開, $$(v+\triangle v)^{-1}=v^{-1}-v^{-2}\cdot\triangle v+\frac{(-1)(-2)}{2}v^{-3}\triangle v^2-\cdots\cdots$$
$$=\frac{1}{v}-\frac{\triangle v}{v^2}+\frac{\triangle v^2}{v^3}-\cdots\cdots.$$

則 $$y+\triangle y=\frac{u}{v}+\frac{\triangle u}{v}-\frac{u\cdot\triangle v}{v^2}-\frac{\triangle u\cdot\triangle v}{v^2}+\frac{u\triangle v^2}{v^3}+\frac{\triangle u\cdot\triangle v^2}{v^3}-\cdots.$$

右式第三項以下,與前三項較,為數極小,可以略去,得

$$y+\triangle y=\frac{u}{v}+\frac{\triangle u}{v}-\frac{u\triangle v}{v^2},$$

$$\triangle y=\frac{v\cdot\triangle u}{v^2}-\frac{u\cdot\triangle v}{v^2},$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{v\cdot\frac{\triangle u}{\triangle x}-u\cdot\frac{\triangle v}{\triangle x}}{v^2}.$$

$\triangle x \to 0,\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{v \cdot \dfrac{du}{dx} - u \cdot \dfrac{dv}{dx}}{v^2}.$　　(4)證訖.

5. $\dfrac{df(u)}{dx} = \dfrac{df(u)}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}.$

$y = u \cdot v$

解　設 $y = f(u)$, 而 $u = f(x)$.

令 x 增爲 $(x + \triangle x)$, 則 u 變爲 $(u + \triangle u)$, y 變爲 $(y + \triangle y)$,

則　$y + \triangle y = f(u + \triangle u)$

$$\triangle y = f(u + \triangle u) - f(u).$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(u + \triangle u) - f(u)}{\triangle x}$$

$$= \frac{f(u + \triangle u) - f(u)}{\triangle u} \cdot \frac{\triangle u}{\triangle x}.$$

$\triangle x \to 0$, 又按定義,得

$$\frac{df(u)}{dx} = \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$　　(5)證訖.

6. $\dfrac{d^2 f(u)}{dx^2} = \dfrac{df}{du} \cdot \dfrac{d^2 u}{dx^2} + \dfrac{d^2 f}{du^2} \cdot \dfrac{du^2}{dx^2}.$

$v = \dfrac{y}{u} = \dfrac{f(u)}{\dfrac{du}{dx}} = \dfrac{f(u) \cdot dx}{du}.$

解　從(3) $\dfrac{d(uv)}{dx} = v \cdot \dfrac{du}{dx} + u \cdot \dfrac{dv}{dx}$, $\therefore$

$v = \dfrac{du}{dx} = \dfrac{d \cdot \dfrac{f(u) \cdot dx}{du}}{dx} = \dfrac{df(u)}{d(u)}$

及(5)　$\dfrac{df(u)}{dx} = \dfrac{df(u)}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$ 內

令　$u = \dfrac{du}{dx}$,　$v = \dfrac{df(u)}{du} = \dfrac{df}{du}$,

則　$\dfrac{d^2 f(u)}{dx^2} = \dfrac{d\left(\dfrac{du}{dx} \cdot \dfrac{df}{du}\right)}{dx}$,

$$= \frac{df}{du} \cdot \frac{d}{dx} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{du}{dx} \cdot \frac{d}{dx} \cdot \frac{df}{du},$$

? $v \cdot \dfrac{d}{dx} \cdot u$

$$=\frac{df}{du}\left(\frac{d}{dx}\cdot\frac{du}{dx}\right)+\frac{du}{dx}\cdot\frac{d}{dx}\cdot\frac{df}{du}\cdot\frac{du}{du}.$$

$$=\frac{df}{du}\left(\frac{d}{dx}\cdot\frac{du}{dx}\right)+\frac{d}{du}\cdot\frac{df}{du}\left(\frac{du}{dx}\right)^2$$

$$=\frac{df}{du}\cdot\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2f}{du^2}\cdot\frac{du^2}{dx^2}.$$ (6)證訖.

7 $\dfrac{dx^n}{dx}=nx^{n-1}$

解　設 $y=x^n$,

則　$y+\triangle y=(x+\triangle x)^n$

$$=x^n+nx^{n-1}\triangle x+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\triangle x^2+\cdots,$$

$\dfrac{\triangle y}{\triangle x}=nx^{n-1}$, 而餘項之含有 $\triangle x$ 項者棄去.

$\triangle x\to 0$, 則 $\dfrac{dy}{dx}=nx^{n-1}$. (7)證訖.

7^a. $\dfrac{da}{dx}=0.$

解　由(1)及(7)知　$\dfrac{da}{dx}=\dfrac{d(ax^0)}{dx}=0$ $(7)^a$ 證訖.

8. $\dfrac{de^x}{dx}=e^x.$

解　設 $y=e^x=1+x+\dfrac{x^2}{\lfloor 2}+\dfrac{x^3}{\lfloor 3}+\dfrac{x^4}{\lfloor 4}+\cdots\cdots,$

由(7)得 $\dfrac{de^x}{dx}=0+1+\dfrac{2x}{\lfloor 2}+\dfrac{3x^2}{\lfloor 3}+\dfrac{4x^3}{\lfloor 4}+\cdots\cdots,$

$$=1+x+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^3}{\lfloor 3}+\frac{x^4}{\lfloor 4}+\cdots$$

$$=e^x.$$ (8)證訖.

8^a. $\dfrac{de^{ax}}{dx}=ae^{ax}$.

解　同上理,得　$\dfrac{de^{ax}}{dx}=ae^{ax}$.　　$(8)^a$ 證訖.

9. $\dfrac{da^u}{dx}=a^u\cdot\dfrac{du}{dx}\cdot\log_e a$

解　設 $y=a^u$.

取各部之對數,則有 $\log_e y=u\log_e a$.

由(1)　$\dfrac{d(\log_e y)}{dx}=\log_e a\cdot\dfrac{du}{dx}$　　$(9)^a$

令　$z=\log_e y$.

按定義　$y=e^z$

由(8)　$\dfrac{dy}{dz}=e^z=y$,　或 $\dfrac{dz}{dy}=\dfrac{1}{y}$,

即 $\dfrac{d(\log_e x)}{dx}=\dfrac{1}{x}$,　　$(9)^b$

或 $\dfrac{d(\log_e y)}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dx}}{y}$,　　$(9)^c$

代入$(9)^a$式得　$\dfrac{\frac{dy}{dx}}{y}=\log_e a\cdot\dfrac{du}{dx}$,

或　$\dfrac{da^u}{dx}=a^u\cdot\dfrac{du}{dx}\cdot\log_e a$.　　(9)證訖.

以　$x=u$ 代入,得

$$\frac{da^x}{dx}=a^x\log_e a.\qquad (9)^d$$

10. $\dfrac{dx^x}{dx}=x^x(1+\log_e x)$

解　設 $y=x^x$.

取各部之對數,則有 $\log_e y=x\log_e x$.

左邊由(9)^{c}式,右邊由(3)式及(9)^{b}式得

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y}=x\cdot\frac{1}{x}+\log_e x,$$

即 $$\frac{dx^x}{dx}=x^x(1+\log_e x).$$ (10)證訖.

11. $\dfrac{d(\log_a x)}{dx}=\dfrac{1}{x\log_e a}=\dfrac{\log_a e}{x}$.

解　令 $u=\log_a x$, 則 $x=a^u$,

由(9)知 $\dfrac{da^u}{dx}=a^u\dfrac{du}{dx}\cdot\log_e a$.

代入得 $\dfrac{dx}{dx}=x\cdot\dfrac{d(\log_a x)}{dx}\cdot\log_e a$,

即 $\dfrac{d(\log_a x)}{dx}=\dfrac{1}{x.\log_e a}$.

因 $\log_e a.\log_a e=1$,

故 $\dfrac{d(\log_a x)}{dx}=\dfrac{\log_a e}{x}$ (11)證訖.

12. $\dfrac{d\sin x}{dx}=\cos x$.

解　因 $\sin x=x-\dfrac{x^3}{\lfloor 3}+\dfrac{x^5}{\lfloor 5}-\cdots\cdots$,

$\cos x=1-\dfrac{x^2}{\lfloor 2}+\dfrac{x^4}{\lfloor 4}-\cdots\cdots$,

設 $y=\sin x$,

$y+\triangle y=\sin(x+\triangle x)$

$$=(x+\triangle x)-\frac{(x+\triangle x)^3}{3!}+\frac{(x+\triangle x)^5}{5!}-\cdots\cdots,$$

將$(\triangle x)^2$以下之值略去,則

$$y+\triangle y=\sin(x+\triangle x)$$

$$=(x+\triangle x)-\frac{x^3}{3!}-\frac{3x^2.\triangle x}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{5x^4.\triangle x}{5!}-\cdots$$

$$=\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\right)+\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\right)\triangle x$$

$$=\sin x+\triangle x\cdot\cos x.$$

$\triangle x\to 0$,得　$\frac{d\sin x}{dx}=\cos x$。　　(12)證訖.

13. $\frac{d\cos x}{dx}=-\sin x$。

解　同理. 設　$y=\cos x$,

$$y+\triangle y=\cos(x+\triangle x)$$

$$=1-\frac{(x+\triangle x)^2}{2!}+\frac{(x+\triangle x)^4}{4!}-\frac{(x+\triangle x)^6}{6!}+\cdots\cdots,$$

將$(\triangle x)^2$以下之值略去,則

$$y+\triangle y=\cos(x+\triangle x)$$

$$=1-\frac{x^2}{2!}-x\cdot\triangle x+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^3.\triangle x}{3!}-\frac{x^6}{6!}$$

$$-\frac{x^5.\triangle x}{5!}+\cdots$$

$$=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\right)-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\right)$$

$$\triangle x$$

$\triangle x\to 0$,　得　$\frac{d\cos x}{dx}=-\sin x$.　　(13)證訖.

14. $\dfrac{d\tan x}{dx}=\sec^2 x$。

解 $y=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos x\dfrac{d}{dx}\sin x-\sin x\cdot\dfrac{d}{dx}\cdot\cos x}{(\cos x)^2}$$

$$=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x.$$

故 $\dfrac{d\tan x}{dx}=\sec^2 x$。 (14)證訖.

15. $\dfrac{d\,ctn x}{dx}=-\csc^2 x$。

解 $y=ctn x=\dfrac{1}{\tan x}$,

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{d}{dx}\tan x\cdot\frac{1}{\tan^2 x}$$

$$=-\sec^2 x\cdot\frac{1}{\tan^2 x}=-\csc^2 x,$$

故 $\dfrac{d\,ctn\,x}{dx}=-\csc^2 x$. (15)證訖.

16. $\dfrac{d\sec x}{dx}=\tan x.\sec x$.

解 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\tan x\sec x,$$

故 $\dfrac{d\sec x}{dx}=\tan x.\sec x$. (16)證訖.

17. $\frac{d\csc x}{dx}=-ctn\,x.\csc x$.

解　$y=\csc x=\frac{1}{\sin x}$,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\cos x}{\sin^2 x}=-ctn\,x.\csc x,$$

故　$\frac{d\csc x}{dx}=-ctn\,x.\csc x$.　(17)證訖.

[附註] 如(12)式至(17)式中 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $ctn x$, $\sec x$, $\csc x$ 改爲 $\sin u$, $\cos u$, $\tan u$, $ctn\,u$, $\sec u$, $\csc u$,則可應用(5)式,得

$$\frac{d\sin u}{dx}=\cos u\cdot\frac{du}{dx},$$

$$\frac{d\cos u}{dx}=-\sin u\cdot\frac{du}{dx},$$

$$\frac{d\tan u}{dx}=\sec^2 u\cdot\frac{du}{dx},$$

$$\frac{d\,ctn u}{dx}=-\csc^2 u\cdot\frac{du}{dx},$$

$$\frac{d\sec u}{dx}=\tan u.\sec u\cdot\frac{du}{dx},$$

$$\frac{d\csc u}{dx}=-ctn\,u.\csc u\cdot\frac{du}{dx}.$$

18. $\frac{d\sin^{-1}x}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, 但 $-\frac{\pi}{2}\leqq\sin^{-1}x\leqq\frac{\pi}{2}$.

解　$y=\sin^{-1}x$,　$\sin y=x$,　$\cos y=\sqrt{1-x^2}$.

$$\frac{dx}{dy}=\cos y=\sqrt{1-x^2},\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$