高考新理念“3+X+1”专题

山东考生高考必备

友谊版

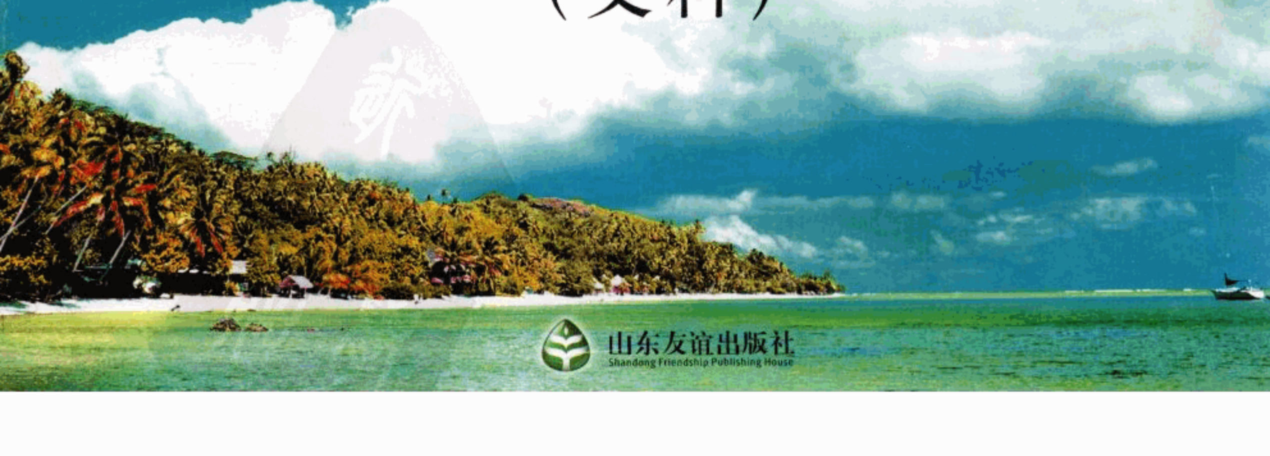
能力培养

日照市教学研究室　编写

供高三二轮复习使用

数学

（文科）



山东友谊出版社
Shandong Friendship Publishing House

高考新理念“3+X+1”专题能力培养

数学（文科）

（供高三二轮复习使用）

日照市教学研究室　编写

山东友谊出版社
Shandong Friendship Publishing House

《高考新理念"3＋X＋1"专题能力培养·数学》编写委员会

总 主 编　李斌宜　王宇江

本册主编　秦玉波

副 主 编　秦绪波　赵宝东　李成明　牟善彬

编　　者　陈为暖　史彦海　陈　杰　刘　赋　张玉峰　葛平星　接　迎　孙殿玲　李成明　陈祥国　秦绪波　郑召齐　牟善彬　许慎德　马绪明　吕有武　黄武昌　马永学　束德亮　王　旭　韩崇雪　史文武　魏　祥

高考新理念"3＋X＋1"专题能力培养

数　学(文科)

(供高三二轮复习使用)

日照市教学研究室　编写

出　版：山东友谊出版社

地　址：济南市胜利大街 39 号　邮编：250001

电　话：总编室(0531)82098756　82098142

发行部(0531)82098147(传真)

发　行：山东友谊出版社

印　刷：日照昆城印业有限公司

版　次：2009 年 12 月第 3 版

印　次：2009 年 12 月第 3 次印刷

规　格：880mm×1230mm　16 开本

印　张：15(含答案)

字　数：300 千字

书　号：ISBN 978－7－80737－262－2

定　价：16.50 元

编写说明

为了配合2010届高中毕业生进行高三二轮复习备考，我们根据《2010年普通高等学校招生全国统一考试（课程标准实验版）山东卷考试说明》和《普通高中数学课程标准（实验）》，在研修新教材和近年高考题的基础上，广泛吸收已取得的各项成果，结合自身多年来高三教学实际，编写了《高考新理念“3+X+1”专题能力培养·数学(文科)》一书，供高三师生在二轮复习时使用。

根据高考数学考查内容及能力要求，针对高三二轮复习的特点，本书分为上、下两篇，上篇用六个专题介绍了常用数学思想方法及客观题的解法，下篇将必修及选修系列1的内容分解整合成二十六个专题，并配有五套阶段测试题和八套模拟试题。上篇每个专题都分专题概述、方法指要、典型例题和巩固练习四部分，旨在培养学生的解题能力，便于师生系统基本方法；下篇各专题皆以训练形式呈现，旨在引导学生自主复习，便于师生先练后讲；题目的选择体现了思想方法的典型性、呈现方式的新颖性和应试的前瞻性；题目的难度适当，数量适中，便于师生使用。阶段测试题以试卷的形式呈现，用于学生定时训练，及时查漏补缺，训练应试能力。模拟试题体现了新课程高考的理念和要求，用于学生作适应性训练。“参考答案”部分既提供参考答案，又给出解题过程或提示，便于学生自评、自悟。

由于水平所限，编写时间短促，书中疏漏、错误在所难免，诚请师生在使用过程中及时予以修正。欢迎大家对本书提出宝贵意见，以便我们更好地改进工作。

编　者

2009年12月

目录

上　篇　方法策略篇

下　篇　能力训练篇

上篇　方法策略篇

专题一　函数与方程思想

专题概述

函数是中学数学的一个重要概念，它描述了量与量之间的对应关系，是对问题本身的数量特征和制约关系的一种刻画.变量是函数的基础，对应(映射)是函数的本质，函数一直是高考的热点、重点、难点内容，贯穿于高中数学的始终.

1.函数思想，就是用运动变化的观点，集合对应的思想，去分析研究数学问题中的数量关系，建立函数关系或构造函数，运用函数的图象和性质去分析问题、通过转化，使问题得到解决.

2.与函数思想相联系的就是方程思想，所谓方程思想，是分析数学问题中的变量间的等量关系，从而建立方程或方程组，或者运用方程的性质去分析、转化，使问题获得解决.

方程思想与函数思想密切相关，对于函数 $y=f(x)$，当 $y=0$ 时，就转化为方程 $f(x)=0$，也可以把函数式 $y=f(x)$ 看作二元方程 $y=f(x)$，函数与方程这种相互转化关系十分重要.

方法指要

1.函数思想在解题中的应用主要表现在两个方面：一是借助有关初等函数的性质，解有关求值，解(证)不等式、解方程以及讨论参数的取值范围等问题；二是在问题研究中通过建立函数关系式或构造中间函数，把所研究的问题转化为讨论函数的有关性质，达到化难为易、化繁为简的目的.

(1)深刻理解一般函数的图象和性质，熟练地掌握一次函数、二次函数和指数函数、对数函数等初等函数的特性，是应用函数的基础，善于挖掘隐含条件，构造出恰当的函数解析式，并能合理地运用函数的图象和性质，是实施应用函数思想解题的关键.

(2)在解答问题时，要注意对问题中各元素仔细地观察和分析，产生由此及彼的联想，构造出相关的函数模型，从而使问题获得巧妙地解决.

(3)解答实际问题，关键在于建立目标函数.首先要读懂文字说明，再将其翻译成数学语言，建立数学模型和函数关系式，利用函数的性质、重要不等式等有关知识进行解答.

(4)数列是特殊的函数，将其转化为自变量为 $n(n\in\mathbf{N}_+)$ 的函数.等差、等比数列通项公式，前 n 项和公式都可看成 n 的函数，因此，某些等差(比)数列问题常可用函数思想来分析或用函数方法来解决.

(5)立体几何中有关线段、角、面积、体积的计算，可通过建立函数表达式的方法加以解决.

2.方程思想在解题中的应用主要表现在四个方面：(1)解方程或不等式；(2)带参变数的方程或不等式的讨论，常涉及二次方程的判别式、韦达定理、区间根、区间上恒成立等知识应用；(3)需要转化为方程的讨论，如曲线的位置关系等；(4)构造方程或不等式求解问题.

典型例题

【例 1】(2000·上海)已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2+2x+a}{x}$，$x\in[1,+\infty)$.

(1)当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，求函数 $f(x)$ 的最小值；

(2)若对任意 $x\in[1,+\infty)$，$f(x)>0$ 恒成立，试求实数 a 的取值范围.

【解析】(1)当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)=x+\dfrac{1}{2x}+2$.

$\because f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上为增函数，$\therefore f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上的最小值为 $f(1)=\dfrac{7}{2}$.

(2) 法一：在区间$[1,+\infty)$上，$f(x)=\frac{x^2+2x+a}{x}>0$恒成立$\Leftrightarrow x^2+2x+a>0$恒成立.

设$y=x^2+2x+a$，$x\in[1,+\infty)$，$y=x^2+2x+a=(x+1)^2+a-1$递增，$\therefore$当$x=1$时，$y_{\min}=3+a$，于是当且仅当$y_{\min}=3+a>0$时，函数$f(x)$恒成立，故$a>-3$.

法二：$f(x)=x+\frac{a}{x}+2$，$x\in[1,+\infty)$，

当$a\geqslant 0$时，函数$f(x)$的值恒为正，当$a<0$时，函数$f(x)$在$[1,+\infty)$上递增，故当$x=1$时，$f(x)_{\min}=3+a$，于是当且仅当$f(x)_{\min}=3+a>0$时，函数$f(x)>0$恒成立，故$a>-3$.

法三：在区间$[1,+\infty)$上，$f(x)=\frac{x^2+2x+a}{x}>0$恒成立$\Leftrightarrow x^2+2x+a>0$恒成立$\Rightarrow a>-x^2-2x$恒成立.

又$\because x\in[1,+\infty)$，$a>-x^2-2x$恒成立，

$\therefore a$应大于$u=-x^2-2x$，$x\in[1,+\infty)$的最大值.

$\therefore a>-(x+1)^2+1$，$x=1$时u取得最大值，$\therefore a>-3$.

【例2】 若正数a、b满足$ab=a+b+3$，求ab的取值范围.

【解析】 法一：

$\because ab=a+b+3$，$\therefore b=\frac{a+3}{a-1}$（显然$a\neq 1$），

$$\therefore ab=a\cdot\frac{a+3}{a-1}=\frac{(a-1)^2+5(a-1)+4}{a-1}=(a-1)+\frac{4}{a-1}+5\geqslant 9,$$

当且仅当$a-1=\frac{4}{a-1}$，即$a=3$时取等号，又$\because a>3$时，$(a-1)+\frac{4}{a-1}+5$单调递增，$\therefore ab$的取值范围是$[9,+\infty)$.

法二：

$\because a$、b为正数，$\therefore a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$. 又$ab=a+b+3$，$\therefore ab\geqslant 2\sqrt{ab}+3$.

即$(\sqrt{ab})^2-2\sqrt{ab}-3\geqslant 0$. 解得$\sqrt{ab}\geqslant 3$，或$\sqrt{ab}\leqslant -1$（舍去），

$\therefore ab\geqslant 9$.

法三：若设$ab=t$，则$a+b=t-3$，

$\therefore a$、b可看成方程$x^2-(t-3)x+t=0$的两个正根，

从而：$\begin{cases}\Delta=(t-3)^2-4t\geqslant 0,\\ a+b=t-3>0,\\ ab=t>0.\end{cases}$

即$\begin{cases}t\leqslant 1\text{ 或 }t\geqslant 9,\\ t>3,\\ t>0.\end{cases}$

解得$t\geqslant 9$，即$ab\geqslant 9$.

注：从以上解法可以看出，对于同一个问题，用不同的观点去看，会产生不同的解法. 方法一用函数的观点，方法二、三是从题中和、积特征，联想到方程、均值不等式、根与函数的关系构造不等式、方程来求解，分别体现了函数思想、方程思想及用不等式解决问题的意识. 因此解题过程中，应多方位、多角度，去思考、去探索，选用合理的解题途径，以求得事半功倍之效.

变式练习：若例题中的条件不变，结论改为“求$a+b$的取值范围”应如何求解？

【例 3】已知 $S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}(n\in\mathbf{N}_+)$，设 $f(n)=S_{2n+1}-S_{n+1}$，试确定实数 m 的取值范围，使对于一切大于 1 的正整数 n，不等式 $f(n)>[\log_m(m-1)]^2-\frac{11}{20}[\log_{(m-1)}m]^2$ 恒成立.

【分析】依题意当写出 $f(n)$ 的表达式时，$f(n)$ 是一个不可求和的数列，直接求 $f(n)$ 的最小值是不可能的，进而研究 $f(n)$ 的单调性发现 $f(n)$ 单调递增，$f(2)$ 是所有 $f(n)(n\geqslant 2)$ 中最小的，这样问题得到解决.

解：由 $f(n)=S_{2n+1}-S_{n+1}$，得

$$f(n)=\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n+1},$$

$$\therefore f(n+1)=\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+4}+\cdots+\frac{1}{2n+3},$$

$$\therefore f(n+1)-f(n)=\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{n+2}$$

$$=\left(\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2n+4}\right)+\left(\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+4}\right)>0.$$

$\therefore f(n)>f(n-1)>\cdots>f(3)>f(2)(n\in\mathbf{N}_+,n\geqslant 2)$，

$$\therefore f(n)_{\min}=f(2)=\frac{1}{2+2}+\frac{1}{2+3}=\frac{9}{20}.$$

要使对于一切大于 1 的正整数 n，原不等式恒成立，只需不等式 $\frac{9}{20}>[\log_m(m-1)]^2-\frac{11}{20}[\log_{(m-1)}m]^2$ 成立.

设 $y=[\log_m(m-1)]^2$，则 $y>0$.

于是 $\begin{cases}\frac{9}{20}>y-\frac{11}{20y},\\ y>0.\end{cases}$ 解得 $0<y<1$.

从而 $\begin{cases}0<[\log_m(m-1)]^2<1,\\ m>0,m\neq 1,\\ m-1\neq 1,\\ m-1>0.\end{cases}$

解得 $m>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 且 $m\neq 2$.

$\therefore$ 实数 m 的取值范围为 $m>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 且 $m\neq 2$.

注：本题 $f(n)$ 无法求和，常规数列方法就不起作用了，而采用函数的思想，用研究函数单调性的方法研究数列的单调性，求函数 $f(n)_{\min}$ 值. 结合不等式恒成立，进一步用函数与方程思想使问题解决，这种用函数方法解决数学问题的意识，正是函数思想的核心.

变式练习：已知不等式 $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{12}\log_a(a-1)+\frac{2}{3}$ 对于一切大于 1 的自然数 n 都成立，求实数 a 的取值范围.

【例 4】直线 $m:y=kx+1$ 和双曲线 $x^2-y^2=1$ 的左支交于 A、B 两点，直线 l 过点 $P(-2,0)$ 和线段 AB 的中点 M，求 l 在 y 轴上的截距 b 的取值范围.

【分析】b 的变化是由 k 的变化而引起的，即对于 k 的某一确定的值，b 有确定的值与之对应，因此 b 是 k 的函数，本题即为求这个函数的值域.

解：由 $\begin{cases}y=kx+1,\\ x^2-y^2=1,\end{cases}(x\leqslant -1)$,

消去 y 得 $(k^2-1)x^2+2kx+2=0$，

①当 $k^2-1=0$ 时，直线平行渐近线与双曲线只有一点，不合题意.

②当 $k^2-1\neq 0$ 时，有

$\begin{cases}\Delta=4k^2+8(1-k^2)>0,\\ x_1+x_2=\frac{2k}{1-k^2}<0,\\ x_1x_2=\frac{-2}{1-k^2}>0,\end{cases}$ $\therefore 1<k<\sqrt{2}$.

设 $M(x_0,y_0)$，

则$\begin{cases} x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{k}{1-k^2}, \\ y_0=kx_0+1=\dfrac{1}{1-k^2}. \end{cases}$

由 $P(-2,0)$、$M(\dfrac{k}{1-k^2},\dfrac{1}{1-k^2})$、$Q(0,b)$三点共线，

得出 $b=\dfrac{2}{-2k^2+k+2}$.

设 $f(k)=-2k^2+k+2$，则 $f(k)$在$(1,\sqrt{2})$上为减函数，

$\therefore f(\sqrt{2})<f(k)<f(1)$，且 $f(k)\neq0$.

$\therefore -(2-\sqrt{2})<f(k)<1$，且 $f(k)\neq0$.

$\therefore b<-\sqrt{2}-2$ 或 $b>2$.

注：本题根据函数思想建立 b 与 k 的函数关系，根据方程思想运用二次方程的理论具体求出 b 的表达式，是解此题的两个关键点，许多解析几何题中某些元素处于运动变化之中，存在相互联系、制约关系，它们之间往往构成函数关系，对于直线与曲线交点的题经常转化为方程问题，用方程理论加以解决.

变式练习：已知函数 $f(x)=\log_2(x+1)$，当点(x,y)在 $y=f(x)$ 的图象上运动时，点 $P(\dfrac{x-t+1}{2},2y)$在函数 $y=g(x)$的图象上运动.

(1)求 $y=g(x)$的解析式；

(2)当 $t=4$，且 $x\in[0,1]$时，求 $g(x)-f(x)$的最小值.

【例 5】(2008·山东)已知曲线 C_1：$\dfrac{|x|}{a}+\dfrac{|y|}{b}=1(a>b>0)$所围成的封闭图形的面积为$4\sqrt{5}$，曲线 C_1 的内切圆半径为$\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$. 记 C_2 为以曲线 C_1 与坐标轴的交点为顶点的椭圆.

(Ⅰ)求椭圆 C_2 的标准方程；

(Ⅱ)设 AB 是过椭圆 C_2 中心的任意弦，l 是线段 AB 的垂直平分线. M 是 l 上异于椭圆中心的点.

(1)若$|MO|=\lambda|OA|$(O 为坐标原点)，当点 A 在椭圆 C_2 上运动时，求点 M 的轨迹方程；

(2)若 M 是 l 与椭圆 C_2 的交点，求$\triangle AMB$ 的面积的最小值.

【分析】据题中条件列出方程，用待定系数法求椭圆 C_2 的方程，点 M 的轨迹方程. 求面积最小值，把面积用函数表示出来求函数最小值.

解：(Ⅰ)由题意得$\begin{cases} 2ab=4\sqrt{5}, \\ \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{3}. \end{cases}$ 又 $a>b>0$，解得 $a^2=5,b^2=4$. 因此所求椭圆的标准方程为$\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

(Ⅱ)(1)假设 AB 所在的直线斜率存在且不为零，设 AB 所在直线方程为 $y=kx(k\neq0)$，$A(x_A,y_A)$. 解方程组$\begin{cases} \dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1, \\ y=kx, \end{cases}$ 得 $x_A^2=\dfrac{20}{4+5k^2}$，$y_A^2=\dfrac{20k^2}{4+5k^2}$，所以$|OA|^2=x_A^2+y_A^2=\dfrac{20}{4+5k^2}+\dfrac{20k^2}{4+5k^2}=\dfrac{20(1+k^2)}{4+5k^2}$.

设 $M(x,y)$，由题意知$|MO|=\lambda|OA|(\lambda\neq0)$，

所以$|MO|^2=\lambda^2|OA|^2$，即 $x^2+y^2=\lambda^2\dfrac{20(1+k^2)}{4+5k^2}$，

因为 l 是 AB 的垂直平分线，所以直线 l 的方程为 $y=-\dfrac{1}{k}x$，

即 $k=-\dfrac{x}{y}$，因此 $x^2+y^2=\lambda^2\dfrac{20(1+\dfrac{x^2}{y^2})}{4+5\cdot\dfrac{x^2}{y^2}}=\lambda^2\dfrac{20(x^2+y^2)}{4y^2+5x^2}$，

又 $x^2+y^2\neq 0$，所以 $5x^2+4y^2=20\lambda^2$，故 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=\lambda^2$. 又当 $k=0$ 或不存在时，上式仍然成立.

综上所述，M 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=\lambda^2(\lambda\neq 0)$.

(2) 当 k 存在且 $k\neq 0$ 时，由(1)得 $x_A^2=\frac{20}{4+5k^2}$，$y_A^2=\frac{20k^2}{4+5k^2}$，

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1,\\ y=-\frac{1}{k}x,\end{cases}$

解得 $x_M^2=\frac{20k^2}{5+4k^2}$，$y_M^2=\frac{20}{5+4k^2}$，

所以 $|OA|^2=x_A^2+y_A^2=\frac{20(1+k^2)}{4+5k^2}$，$|AB|^2=4|OA|^2=\frac{80(1+k^2)}{4+5k^2}$，$|OM|^2=\frac{20(1+k^2)}{5+4k^2}$.

解法一：由于 $S_{\triangle AMB}^2=\frac{1}{4}|AB|^2\cdot|OM|^2=\frac{1}{4}\times\frac{80(1+k^2)}{4+5k^2}\times\frac{20(1+k^2)}{5+4k^2}=\frac{400(1+k^2)^2}{(4+5k^2)(5+4k^2)}\geqslant\frac{400(1+k^2)^2}{\left(\frac{4+5k^2+5+4k^2}{2}\right)^2}=\frac{1600(1+k^2)^2}{81(1+k^2)^2}=(\frac{40}{9})^2$，当且仅当 $4+5k^2=5+4k^2$ 时等号成立，即 $k=\pm 1$ 时等号成立，此时△AMB 面积的最小值是 $S_{\triangle AMB}=\frac{40}{9}$.

当 $k=0$，$S_{\triangle AMB}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\times 2=2\sqrt{5}>\frac{40}{9}$.

当 k 不存在时，$S_{\triangle AMB}=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times 4=2\sqrt{5}>\frac{40}{9}$.

综上所述，△AMB 的面积的最小值为 $\frac{40}{9}$.

解法二：因为 $\frac{1}{|OA|^2}+\frac{1}{|OM|^2}=\frac{1}{\frac{20(1+k^2)}{4+5k^2}}+\frac{1}{\frac{20(1+k^2)}{5+4k^2}}=\frac{4+5k^2+5+4k^2}{20(1+k^2)}=\frac{9}{20}$，又 $\frac{1}{|OA|^2}+\frac{1}{|OM|^2}\geqslant\frac{2}{|OA|\cdot|OM|}$，$|OA|\cdot|OM|\geqslant\frac{40}{9}$，当且仅当 $4+5k^2=5+4k^2$ 时等号成立，即 $k=\pm 1$ 时等号成立，此时△AMB 面积的最小值是 $S_{\triangle AMB}=\frac{40}{9}$.

当 $k=0$，$S_{\triangle AMB}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\times 2=2\sqrt{5}>\frac{40}{9}$.

当 k 不存在时，$S_{\triangle AMB}=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times 4=2\sqrt{5}>\frac{40}{9}$.

综上所述，△AMB 的面积的最小值为 $\frac{40}{9}$.

注：运用函数与方程思想来解决解析几何题目，是最常用的数学思想，应注重多联想该种思想.

变式练习：已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$，短轴一个端点到右焦点的距离为 $\sqrt{3}$.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)设直线 l 与椭圆 C 交于 A、B 两点，坐标原点 O 到直线 l 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，求△AOB 面积的最大值.

【例6】用总长为14.8m的钢条制成一个长方体容器的框架，要求底面的一边比另一边长0.5m，那么高为多少时容器的容积最大？并求出它的最大容积.

【分析】这里有四个变量：底面的长、宽、长方体的体积和高. 设宽为 x(m)，则长、高可用 x 表示，容积 y 是 x 的函数. 运用长方体的体积公式，建立目标函数表达式，再求函数的最大值.

解：设容器底面宽为 x(m)，则长为(x

$+0.5)(\mathrm{m})$,

高为$\frac{14.8-4x-4(x+0.5)}{4}=3.2-2x$.

由 $3.2-2x>0$ 和 $x>0$,得 $0<x<1.6$.

设容器的容积为 $y(\mathrm{m}^3)$,则

$y=x(x+0.5)(3.2-2x)(0<x<1.6)$.

整理,得 $y=-2x^3+2.2x^2+1.6x$,

求导,得 $y'=-6x^2+4.4x+1.6$,

令 $y'=0$,有 $-6x^2+4.4x+1.6=0$,

即 $15x^2-11x-4=0$.

解得 $x_1=1,x_2=-\frac{4}{15}$(不合题意,舍去).

从而,在定义域$(0,1.6)$内只有在 $x=1$ 处使 $y'=0$.

因此,当 $x=1$ 时,y 取得最大值,

$y_{\max}=-2+2.2+1.6=1.8$.

这时,高为 $3.2-2\times1=1.2\ (\mathrm{m})$.

答:当容器的高为 1.2m 时,容积最大,最大容积是 $1.8\mathrm{m}^3$.

注:适当设出自变量,建立函数关系是解此类题的关键.但要注意自变量的取值范围,求最大值时,是用求导的方法先求函数极值点,再根据实际情况判断此时是最大值还是最小值.

【例 7】已知抛物线 $y=(m-1)x^2+(m-2)x-1(m\in\mathbf{R})$.

(1)当 m 为何值时,抛物线与 x 轴有两个交点?

(2)若关于 x 的方程$(m-1)x^2+(m-2)x-1=0$ 的两个不等实数根的倒数平方和不大于 2,求 m 的取值范围;

(3)如果抛物线与 x 轴相交于 A,B 两点,与 y 轴交于 C 点,且$\triangle ABC$ 的面积等于 2,试确定 m 的值.

【分析】(1)令函数 $y=0$,则转化为求方程有两个不等的实根时 m 的值;

(2)利用根与系数的关系转化成解不等式;

(3)建立面积的函数关系式,再求函数值为 2 时方程的解.

解:(1)令 $y=0$,则$(m-1)x^2+(m-2)x-1=0$.

据题意,需 $m\neq1$,且 $\Delta>0$,

即$(m-2)^2+4(m-1)>0$,得 $m^2>0$,

$\therefore m\neq1$ 且 $m\neq0$ 时,抛物线与 x 轴有两个交点.

(2)在 $m\neq0,1$ 的条件下,

$x_1+x_2=\frac{m-2}{1-m},x_1x_2=\frac{1}{1-m}$,

得$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=m-2$,

$\therefore\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=(m-2)^2+2(m-1)\leqslant2$,

得 $m^2-2m\leqslant0$,$\therefore0\leqslant m\leqslant2$,

$\therefore0<m<1$ 或 $1<m\leqslant2$.

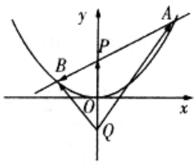
(3)由$\frac{1}{2}|x_1-x_2|\cdot|y_c|=2$,

得$\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{m}{m-1}\right|\cdot|-1|=2$,

即$|m|=4|m-1|$,

解得 $m=\frac{4}{3}$或$\frac{4}{5}$.

【例 8】如图所示,过抛物线 $x^2=4y$ 的对称轴上任一点 $P(0,m)(m>0)$作直线与抛物线交于 A、B 两点,点 Q 是点 P 关于原点的对称点.



(1)设点 P 分有向线段$\overrightarrow{AB}$所成的比为 λ,证明:$\overrightarrow{QP}\perp(\overrightarrow{QA}-\lambda\overrightarrow{QB})$;

(2)设直线 AB 的方程是 $x-2y+12=0$,过 A、B 两点的圆 C 与抛物线在点 A 处有共同的切线,求圆 C 的方程.

【分析】(1)先将直线方程与抛物线方程联立,求出 λ,再将两向量作数量积证其为 0,即可得证.

(2)设直线与抛物线联立求出 A、B 坐标,即可求圆的切线方程,再用待定系数法求解.

解:(1)依题意,可设直线 AB 的方程为 $y=kx+m$,代入抛物线方程 $x^2=4y$ 得 $x^2-4kx-4m=0$. ①

设 A、B 两点的坐标分别是(x_1,y_1)、(x_2,y_2),则 x_1、x_2 是方程①的两根,所以 $x_1x_2=-4m$.

点 $P(0,m)$分有向线段$\overrightarrow{AB}$所成的比为 λ,

得$\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=0$,即 $\lambda=-\frac{x_1}{x_2}$.

又点 Q 是点 P 关于原点的对称点,

故点 Q 的坐标是$(0,-m)$,

从而$\overrightarrow{QP}=(0,2m)$.

$\overrightarrow{QA}-\lambda\overrightarrow{QB}=(x_1,y_1+m)-\lambda(x_2,y_2+m)=(x_1-\lambda x_2,y_1-\lambda y_2+(1-\lambda)m)$,

$\overrightarrow{QP}\cdot(\overrightarrow{QA}-\lambda\overrightarrow{QB})=2m[y_1-\lambda y_2+(1-\lambda)m]$

$=2m[\frac{x_1^2}{4}+\frac{x_1}{x_2}\cdot\frac{x_2^2}{4}+(1+\frac{x_1}{x_2})m]$

$=2m(x_1+x_2)\cdot\frac{x_1x_2+4m}{4x_2}$

$=2m(x_1+x_2)\cdot\frac{-4m+4m}{4x^2}=0$,

所以$\overrightarrow{QP}\perp(\overrightarrow{QA}-\lambda\overrightarrow{QB})$.

(2)由$\begin{cases}x-2y+12=0,\\x^2=4y.\end{cases}$得点 A、B 的坐标分别是$(6,9)$、$(-4,4)$.

由 $x^2=4y$,得 $y=\frac{1}{4}x^2$,$y'=\frac{1}{2}x$,

所以抛物线 $x^2=4y$ 在点 A 处切线的斜率为 $y'|_{x=6}=3$.

设圆 C 的方程是$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$,

则$\begin{cases}\frac{b-9}{a-6}=-\frac{1}{3},\\(a-6)^2+(b-9)^2=(a+4)^2+(b-4)^2.\end{cases}$

解之,得 $a=-\frac{3}{2}$,$b=\frac{23}{2}$,$r^2=(a+4)^2+(b-4)^2=\frac{125}{2}$.

所以圆 C 的方程是$(x+\frac{3}{2})^2+(y-\frac{23}{2})^2=\frac{125}{2}$,

即 $x^2+y^2+3x-23y+72=0$.

巩固练习

一、选择题

1. 函数 $f(x)=-x^2-2mx-m+2$ 在区间$[-1,1]$上恒为正,则实数 m 的取值范围是　(　　)

A. $(-1,1)$　　B. $(-\frac{1}{3},1)$

C. $(-1,\frac{1}{3})$　　D. $(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$

2. 已知关于 x 的方程 $\sin^2x+\cos x+k=0$ 有实数解,则实数 k 的取值范围是　(　　)

A. $k\geqslant-\frac{5}{4}$　　B. $-\frac{5}{4}\leqslant k<1$

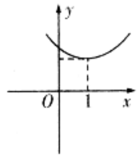
C. $-\frac{5}{4}\leqslant k\leqslant1$　　D. $-\frac{5}{4}<k<1$

3. 要使$(\log_2 3)^x-(\log_2 3)^y\geqslant(\log_3 5)^{-x}-(\log_3 5)^{-y}$成立,则应有　(　　)

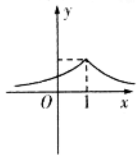
A. $x-y\leqslant0$　　B. $x+y\leqslant0$

C. $x-y\geqslant0$　　D. $x+y\geqslant0$

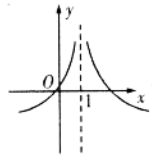
4. 若实数 x、y 满足$|x-1|-\ln\frac{1}{y}=0$,则 y 关于 x 的函数的图象形状大致是　(　　)



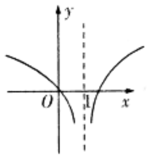
A.



B.



C.



D.

5. 函数 $f(x)=x^2-2ax+a$ 在区间$(-\infty,1)$内有极小值,则函数 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$在区间$(1,+\infty)$内一定　(　　)

A. 有最小值　　B. 有最大值

C. 是减函数　　D. 是增函数

6. 把长为 12cm 的细铁丝截成两段,各自围成一个正三角形,那么这两个正三角形面积之和的最小值是　(　　)

A. $\frac{3\sqrt{3}}{2}\text{cm}^2$　　B. 4cm^2

C. $3\sqrt{2}\text{cm}^2$　　D. $2\sqrt{3}\text{cm}^2$

二、填空题

7. 对于满足 $0\leqslant p\leqslant4$ 的所有实数 p,使不等式 $x^2+px>4x+p-3$ 成立的 x 的取值范围为________.

8. 已知等差数列的前 n 项和为 S_n,且 $S_p=S_q$($p\neq q$;$p,q\in\mathbf{N}_+$),则 $S_{p+q}=$________.

9. 双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为 F_1、F_2,线段 F_1F_2 被点$(\frac{b}{2},0)$分成 3∶2 两段,则此双曲线的离心率为________.

三、解答题

10. 已知集合 $P=[\frac{1}{2},2]$，函数 $y=\log_2(ax^2-2x+2)$ 的定义域为 Q.

(1)若 $P\cap Q\neq\varnothing$，求实数 a 的取值范围；

(2)若方程 $\log_2(ax^2-2x+2)=2$ 在 $[\frac{1}{2},2]$ 内有解，求实数 a 的取值范围.

11. 某厂家拟在 2009 年举行促销活动，经调查测算，该产品的年销售量(即该厂的年产量) x 万件与年促销费用 m 万元($m\geqslant 0$)满足 $x=3-\frac{k}{m+1}$(k 为常数)，如果不搞促销活动，则该产品的年销量只能是 1 万件. 已知 2009 年生产该产品的固定投入为 8 万元，每生产 1 万件产品需再投入 10 万元，厂家将每年产品的销售价格定为每件产品年平均成本的 1.5 倍(产品成本包括固定成本和投入成本两部分).

(1)将 2009 年该产品的利润 y 万元表示为年促销费用 m 万元的函数；

(2)该厂家 2009 年的促销费用投入多少万元时，厂家的利润最大？

12. 已知 $f(x)=\frac{2x-a}{x^2+2}(x\in\mathbf{R})$ 在区间 $[-1,1]$ 上是增函数.

(1)求实数 a 的值组成的集合 A;

(2)设关于 x 的方程 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的两个非零实根为 x_1,x_2,试问:是否存在实数 m,使得不等式 $m^2+tm+1\geqslant|x_1-x_2|$ 对任意 $a\in A$ 及 $t\in[-1,1]$ 恒成立?若存在,求出 m 的取值范围;若不存在,请说明理由.

专题二　转化与化归思想

专题概述

转化与化归就是在处理问题时，把待解决的问题或难解决的问题，通过某种转化过程，归结为一类已经解决或易解决的问题，最终求得问题的解答，转化与化归在数学中应用普遍.

转化有等价转化与非等价转化. 等价转化要求转化过程中前因后果是充分必要的，才保证转化后的结果仍为原问题的结果. 非等价转化其过程是充分或必要的，要对结论进行必要的修正，它能给人带来思维的闪光点，有利于问题的解决.

转化过程中应遵循的原则：

(1)熟悉化原则；(2)简单化原则；(3)直观性原则；(4)和谐化原则(变化问题的条件或结论，使其表现形式更符合数与形内部所表示和谐统一的形式，或者转化命题，使其推演有利于运用某种数学方法或符合人们的思维规律)；(5)正难则反原则.

方法指要

常用的转化方法：

(1)未知与已知转化；(2)函数与方程的转化；(3)空间与平面的转化；(4)数与形的相互转化；(5)高次与低次的转化；(6)多元与一元的转化；(7)主元与次元的转化；(8)等与不等的转化；(9)一般与特殊的转化；(10)整体与局部的转化；(11)静与动的转化；(12)正向与逆向的转化……

典型例题

【例 1】设三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 V，P、Q 分别是侧棱 AA_1、BB_1、CC_1 上的点，且 $PA=QC_1$，则四棱锥 $B-APQC$ 的体积为　(　　)

A. $\frac{1}{6}V$　　B. $\frac{1}{4}V$

C. $\frac{1}{3}V$　　D. $\frac{1}{2}V$

【解析】特殊化法. 取直棱柱，且 P、Q 为侧棱的中点，连接 AQ，则

$$V_{B-APQC}=2V_{B-AQC}=2V_{Q-ABC}$$
$$=2\times\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\times QC$$
$$=2\times\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\times\frac{1}{2}C_1C$$
$$=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\times C_1C=\frac{1}{3}V.$$

故选 C.

【例 2】若对于满足 $|p|\leqslant 2$ 的所有实数 p，不等式 $(\log_2 x)^2+p\log_2 x+1>2\log_2 x+p$ 恒成立，求实数 x 的取值范围.

【解析】令 $a=\log_2 x$，设 $f(p)=(a-1)p+a^2-2a+1$，则原不等式对任意 $|p|\leqslant 2$ 恒成立等价于对 $|p|\leqslant 2$，$f(p)>0$ 恒成立，等价于 $\begin{cases}f(2)>0,\\f(-2)>0.\end{cases}$

即 $\begin{cases}2(a-1)+a^2-2a+1>0,\\-2(a-1)+a^2-2a+1>0.\end{cases}$

即 $\begin{cases}a^2>1,\\a^2-4a+3>0.\end{cases}$

解得　$a>3$ 或 $a<-1$，所以 $\log_2 x>3$ 或 $\log_2 x<-1$，所以 $x>8$ 或 $0<x<\frac{1}{2}$.

故所求 x 的取值范围是 $\{x|0<x<\frac{1}{2}$ 或 $x>8\}$.

注：作换元 $a=\log_2 x$，使原不等式的特征体现得更明显，$a^2+pa+1>2a+p$ 有二次不等式的结构特征，但却把它看作是关于 p 的一次不等式，从而构造了一个一次函数 $f(p)$，这是该解法最能给人启发的地方.

【例 3】一个四面体所有棱长都是 $\sqrt{2}$，四个顶点在同一个球面上，则此球的表面积为　(　　)

A. 3π　　B. 4π

C. $3\sqrt{3}\pi$　　D. 6π

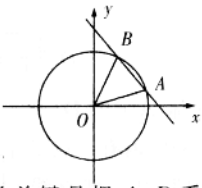
【解析】由题设可把正四面体补形成正方体，那么正四面体、正方体的中心与其外接球的球心

共点，因正四面体棱长为$\sqrt{2}$，则正方体棱长为 1，从而外接球半径 $R=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$S_{球}=3\pi$. 故选 A.

注：若利用正四面体外接球的性质，构造直角三角形去解，过程冗长，容易出错. 此解的巧妙之处在于从局部入手先补形后从整体入手，从系统上去分析，更加明确地揭示了球半径满足的关系.

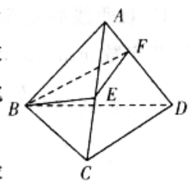
【例 4】 已知两点坐标为 $A(\cos17^\circ,\sin17^\circ)$，$B(\cos77^\circ,\sin77^\circ)$，求直线 AB 的倾斜角.

【解析】 由已知易得 A、B 两点在圆 $x^2+y^2=1$ 上，$\angle xOA=17^\circ$，$\angle xOB=77^\circ$，故 $\angle AOB=60^\circ$，$\triangle ABO$ 为正三角形. 所以直线 AB 的倾斜角为 $77^\circ+60^\circ=137^\circ$.

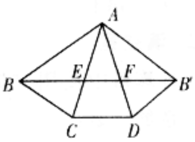


注：此解的关键是把 A、B 看成单位圆上的点，而且由图形得到答案，非常巧妙！如果由 $\tan\theta=\frac{\sin77^\circ-\sin17^\circ}{\cos77^\circ-\cos17^\circ}$，则需要用到和差化积公式.

【例 5】 如图，正三棱锥 $A-BCD$ 中，$AB=2a$，$BC=a$，试求当过 B 的截面周长最短时，此截面的面积.



【解析】 求空间折线段的最小值，常用侧面展开图，沿棱 AB 将三棱锥的侧面展开（如图），当 BE、EF、FB' 在同一直线上时，截面周长最短，由正三棱锥的性质及 $\triangle BCE\backsim\triangle ABC$，$\triangle AEF\backsim\triangle ACD$，$\triangle B'FD\backsim\triangle ADB'$ 不难得到 $BE=FB'=a$，$EF=\frac{3}{4}a$，周长的最小值是 $\frac{11}{4}a$，此时截面的面积是 $\frac{3\sqrt{55}}{64}a^2$.



【例 6】 已知抛物线 $y=x^2$ 的动弦 AB 所在直线与圆 $x^2+y^2=1$ 相切，分别过点 A、B 的抛物线的两条切线相交于点 M，求点 M 的轨迹方程.

【解析】 设 $M(m,n)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则两切线方程为：

$y-y_1=2x_1(x-x_1)$，$y-y_2=2x_2(x-x_2)$，

因为同时经过 $M(m,n)$，

所以 $2mx_1-y_1-n=0$，$2mx_2-y_2-n=0$，

则动弦 AB 的方程为 $2mx-y-n=0$，

$d=\frac{|n|}{\sqrt{4m^2+1}}=1\Rightarrow n^2-4m^2=1$.

$\begin{cases}2mx-y-n=0,\\ y=x^2.\end{cases}\Rightarrow x^2-2mx+n=0$，

$\Delta=4m^2-4n>0$.

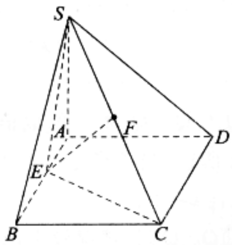
然后把定点 $M(m,n)$ 动点化就得到动点 $M(x,y)$ 的轨迹方程为 $y^2-4x^2=1$ 且满足 $y<x^2$，而 $y<x^2=\frac{y^2-1}{4}$ 且 $y^2-1\geqslant0\Rightarrow y\leqslant-1$ 或 $y>2+\sqrt{5}$，

∴动点 M 的轨迹方程为

$y^2-4x^2=1(y\leqslant-1$ 或 $y>2+\sqrt{5})$.

注：本题解答的思维要点是：①将动点 M 定点化；②变点 M 为两切线的交点为从点 M 作两切线；③确定动弦方程；④利用动弦与圆相切确定 $M(m,n)$ 中 m 与 n 的关系；⑤将定点 (m,n) 动点化. 另：在求切线方程时，利用了导数求斜率.

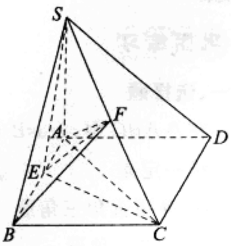
【例 7】 如图，在四棱锥 $S-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，$SA\perp$ 平面 $ABCD$，且 $SA=AB$，点 E 为 AB 的中点，点 F 为 SC 的中点.



(1)求证：$EF\perp CD$；

(2)求证：平面 $SCD\perp$ 平面 SCE.

【证明】 (1)连线 AC、AF、BF.



∵$SA\perp$ 平面 $ABCD$，

∴AF 为 $\mathrm{Rt}\triangle SAC$ 斜边 SC 上的中线，

∴$AF=\frac{1}{2}SC$.

又∵四边形 $ABCD$ 是正方形，∴$CB\perp AB$.

而由 $SA\perp$ 平面 $ABCD$，得 $CB\perp SA$，