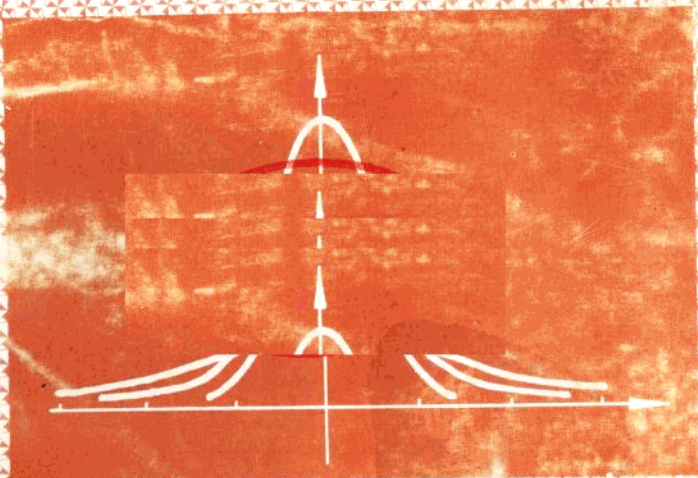
应用数学学习指导

徐光迎 夏国斌
刘玉泽 颜世宽 主编



南京大学出版社

应用数学学习指导

徐光迎　夏国斌
刘玉泽　颜世宽　主编

[redacted]

1992·南京

（苏）新登字第011号

应用数学学习指导

徐光迎　夏国斌
刘玉涤　顾世宽　主编

南京大学出版社出版发行
（南京大学校内）
蚌埠坦克学院印刷厂印刷

*

开本787×1092　1/32　印张7.25　字数163千
1992年1月第1版　1992年1月第1次印刷
印数1—6500
ISBN 7-305-01451-6/O·77
定价 2.95元

前 言

与其他数学课程比较，“应用数学”具有许多不易掌握的特点，初学者在解题时常常无从下手，而解完后又往往感觉把握不大。为了帮助初学者克服学习中的困难，较好地掌握应用数学课程的基本内容，我们编写了这本书。

本书共分八章，每章按四个部分编排：一、基本内容 对课程内容进行整理与提炼，使之更加条理化、系统化；二、学习指导 围绕重点和难点，辅导学生正确理解基本概念，熟练掌握基本方法；三、典型例题 分析各种类型习题的求解思路，展示解题方法与技巧；四、综合练习 标准化题型与传统题型兼收并蓄，书末附有练习答案。

本书具有叙述简明、重点突出、选例典型、题型多样等特点，可供非师范类高等院校（包括“五大”）、中专学校的学生用作学习辅导，亦可供有关教师参考。

本书主要由徐光迎、刘玉泽、夏国斌、丛山、颜世宽编写。参加初稿编写的还有：王志广、李美贞、辛颖、王少环、刘明远、宇永静、周玉霞、张北花。书稿由安徽省中专数学教研会组织审定，担任主审的有周春泉、甘立根、杨永蕙、马志猛。施宗莱、李鸿儒审阅了部分书稿。在定稿过程中，安徽省芜湖机械学校等单位给予了大力支持，在此谨致谢忱。

由于我们水平所限，书中难免有不足之处，请读者不吝指正。

编 者

1991年10月

目　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章　事件及其概率

一、基本内容

（一）事件

1. 随机事件

在一定条件下，必然发生或必然不发生的现象称为必然现象。

在一定条件下，可能发生、也可能不发生的现象称为随机现象。

对随机现象进行观察的过程叫做随机试验（简称试验），它具有下列特点：

（1）可以在相同的条件下重复进行；

（2）已知所有可能的结果；

（3）试验前不能确定出现哪一个结果。

在随机试验中，每一个可能发生的结果称为一个随机事件（简称事件），通常用A、B、C等表示。不能分解成其它事件组合的最简单的随机事件称为基本事件。全体基本事件组成的集合称为基本事件全集，记为Ω。任何随机事件都可看作Ω的某个子集。

2. 事件间的关系

表1－1

关系	意义	记法
包含	A发生则B发生	$A\subseteq B$
相等	$A\subseteq B$且$B\subseteq A$	$A=B$
并（和）	A发生或B发生	$A\cup B$（或$A+B$）
交（积）	A发生且B发生	$A\cap B$（或AB）
差	A发生但B不发生	$A-B$
逆	A不发生	$\overline{A}=\Omega-A$
互不相容	A、B不能同时发生	$A\cap B=\phi$

3. 事件的运算律

交换律：$A\cup B=B\cup A$，　$A\cap B=B\cap A$

结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

反演律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，　$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

（二）事件的概率

1. 概率的统计定义

设在n次重复试验中，事件A发生的次数为n_A，则称比值$\frac{n_A}{n}$为A发生的频率，记作$f_n(A)$，即$f_n(A)=\frac{n_A}{n}$。

在大量重复试验中，事件A发生的频率总是稳定于一个确定的常数附近，这个数可用来度量A发生的可能性大小，我们称之为A的概率，记作$P(A)$。

2.概率的古典定义

具有下列两个特征的随机试验模型称为古典概型：

（1）全部基本事件的个数是有限的；

（2）每个基本事件的发生是等可能的。

在古典概型中，事件A的概率

$$P(A)=\frac{A\text{中包含的基本事件数}(N_A)}{\text{基本事件总数}(N)}$$

3.概率的基本性质

（1） $0\leqslant P(A)\leqslant 1$

（2） $P(\Omega)=1$，$P(\phi)=0$

（3） 若$A\cap B=\phi$，则$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

其中（3）叫做概率的可加性，对于有限个两两互不相容的事件，它仍然成立。

（三）概率的运算公式

1.逆事件的概率公式，加法公式

$P(\overline{A})=1-P(A)$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)\\-P(AB)-P(BC)-P(CA)+P(ABC)$$

2.条件概率，乘法公式

在“事件B已发生”的条件下，事件A发生的概率称为条件概率，记作$P(A/B)$。根据概率的古典定义，得

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}，\text{同理}\quad P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

由此可得概率的乘法公式

$$P(AB)=P(B)\cdot P(A/B)=P(A)\cdot P(B/A)。$$

这个公式可推广到有限个事件积的情形。如:

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)。$$

3. 全概率公式

若一组事件$H_1,H_2,\cdots,H_n$两两互不相容，并且

$$H_1+H_2+\cdots+H_n=\Omega$$

则称它们是一个完备事件组。

因为对于任何事件A，都有

$$A=A\Omega=A(H_1+H_2+\cdots+H_n)=\sum_{i=1}^{n}AH_i$$

所以有全概率公式:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(AH_i)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A/H_i)$$

（四）独立性与贝努利概型

1. 事件的独立性

如果事件A发生的概率不受事件B发生与否的影响，即$P(A/B)=P(A)$，则称事件A对于事件B是独立的，否则称为不独立的。

显然，若事件A对于事件B独立，则B对于A也一定独立。因此，A与B相互独立。

事件A与B相互独立$\Leftarrow\Rightarrow P(AB)=P(A)\cdot P(B)$

如果在事件A_1，A_2，$\cdots$，A_n中，任一事件发生的概率都

不受其它一个或几个事件发生与否的影响，则称事件A_1，A_2，…，A_n相互独立，并且有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$$

2. 贝努利概型

只有两种可能结果（A和$\overline{A}$）的试验，称为贝努利试验。在贝努利试验中，通常记

$$P(A)=p, \quad P(\overline{A})=q$$

显然，$q=1-p$，即 $p+q=1$。

进行若干次贝努利试验，如果在每次试验中，事件A发生的概率都等于p，则称这样的试验模型为贝努利概型(或独立试验概型)

在n次贝努利概型中，事件A恰好发生k次的概率为

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k} \quad (k=0, 1, \cdots, n)$$

二、学习指导

本章主要内容为事件与概率的概念、两种概型的概率计算和概率的运算公式。本章重点是概率的概念和性质、古典概型的概率计算方法、独立性概念。理解事件间的各种关系、应用全概率公式以及识别贝努利概型是学习本章的难点。

（一）正确理解随机事件及事件间的关系

1. 必然现象与随机现象

必然现象只有一种结果，它发生是必然事件，不发生是不可能事件，人们可以根据已知的事实和经验推算或预言它的结果。

随机现象具有多种可能的结果，而究竟发生哪一种结果事先不能肯定，它具有二重性——偶然性和统计规律性.

为了获得随机现象的统计规律，必须研究随机试验，不仅要研究它所有可能的结果（即事件）以及这些结果的相互关系，而且要研究每种结果发生的可能性大小（即概率）.

2. 随机事件

在随机试验中，可能发生的最简单的结果就是基本事件.对于同一随机现象，观察（试验）的目的不同，所得基本事件一般也不同. 例如打靶，如果关心击中与否，那么它只有两个基本事件："命中"和"未命中"；如果关心击中的环数，那么它就有十一个基本事件："未命中"，"命中1环"，…，"命中10环".

试验的基本事件具有两点性质：

（1）基本事件全集Ω是必然事件，即一次试验必发生一个基本事件；

（2）基本事件两两互不相容，即一次试验不可能发生两个基本事件.

这表明，在一次试验中，发生且只发生一个基本事件.

基本事件是最简单的随机事件，较复杂的随机事件都是由若干个基本事件组合而成的. 如在打靶试验中，"至少命中8环"包含三个基本事件，即"命中8环"、"命中9环"，"命中10环"。

为了方便起见，我们把必然事件Ω、不可能事件ϕ也看作随机事件.

3. 事件间的各种关系

明确事件间的各种关系，是进行概率运算的前提. 由于

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

事件可以看作基本事件全集Ω的子集，所以事件间的关系相当于集合间的关系，二者从符号到意义都是相似的（见表1—2）。

表1－2

符 号	概率论意义	集合论意义
Ω	必然事件	全集
ϕ	不可能事件	空集
A	事件	Ω的子集
$A\subseteq B$	事件A包含于事件B	集合A包含于集合B
$\overline{A}$	A的逆事件（对立事件）	A的补集
$AB=\phi$	事件A与B互不相容	集合A与B互不包含

“对立事件”和“互不相容事件”是事件间的两种重要关系，读者应能正确理解和掌握。

A与B互为逆事件，是指在一次试验中，要么A发生，要么B发生，且二者不同时发生，即

$$A\cup B=\Omega,\quad A\cap B=\phi$$

换句话说，满足上式的两个事件是互逆事件。根据这一点，不难给出指定事件的逆事件。如在打靶试验中，若

$A=$｛至少命中5环｝，$B=$｛至多命中8环｝，

$C=$｛未命中｝，　$D=$｛命中奇数环｝。

则　$\overline{A}=$｛至多命中4环｝，$\overline{B}=$｛至少命中9环｝，

$\overline{C}=$｛至少命中1环｝，$\overline{D}=$｛命中偶数环｝。

事件A与B互不相容，是指A与B不能同时发生，即$A\cap B=\phi$。

因为$A\cap\overline{A}=\phi$，所以，互逆事件一定互不相容，但反过来不一定成立。如在上例中

$$A\cap C=\phi,\qquad 而A\cup C\neq\Omega$$

这表明，事件A与C互不相容，但不互逆。

（二）理解概率的概念，掌握古典概型的概率计算方法

1.频率和概率的概念

频率的稳定性是被大量实践所证明了的。例如，在人口统计中，不论哪个国家、何种民族，也不论是什么时期的统计资料，都发现一个同样的规律：男婴出生的频率摆动于$\frac{22}{43}$（而不是$\frac{1}{2}$！）这个数值左右。频率是个试验值，$f_n(A)$具有随机性（可取多个不同值），只有当n充分大时，它才能近似地反映事件发生的可能性大小。作为频率的抽象，概率是个理论值，$P(A)$决定于事件的本质（取值唯一），它能精确地反映事件发生的可能性大小。

由于精确的概率值往往无法求得，所以在实际工作中，常用频率近似代替概率。如合格率、次品率、出生率等等，都是如此。

2.古典概型的概率计算方法

古典概型的两个特点可以概括成“有限”、“等可能”五个字。“有限”是指试验的基本事件的总数为有限个；“等可能”是指试验中每个基本事件发生的可能性都相等。根据

“有限”和“等可能”的要求，在很多场合都不难识别古典概型。

在古典概型中，确定事件A的概率$P(A)=\frac{N_A}{N}$，只需计算：

（1）基本事件的总数N；

（2）事件A所包含的基本事件的个数N_A。

而为了计算N和N_A，必须弄清试验中的基本事件是指什么。换言之，只有明确什么是一个基本事件，才能进行计算。这就要求我们正确区分排列与组合。

例 一盒产品有8只正品，2只次品，试分析下列试验中，每一基本事件的具体含义：

（1）从中任意取4只产品；

（2）从中取产品4次，每次取一只，取后不放回；

（3）从中取产品4次，每次取一只，取后放回。

分析 （1）一次取，则取出的4只产品是无序的。因此，4只产品的每一组合就是一个基本事件。其总数等于从10只不同产品中，任意取4只的组合种数，即$N=C_{10}^4$；

（2）逐个取，取后不放回，则取出的4只产品是有序的，且不得重复。因此，4只产品的每一无重复排列就是一个基本事件。其总数等于从10只不同产品中，不重复地任取4只的排列数，即$N=P_{10}^4$；

（3）逐个取，取后放回，则取出的4只产品是有序的，且可以重复。因此，4只产品的每一可重复排列就是一个基本事件。其总数等于从10只不同产品中，允许重复地任取4只的排列数，即$N=10^4$。

一般说来，如果是“一次取”，则取出的元素是无序的，每一基本事件是组合。如果是“逐个取”，则取出的元素是有序的，放回抽取，每一基本事件是可重复排列；不放回抽取，每一基本事件是不重复排列。

总之，计算古典概型的概率，关键在于分析每一基本事件的具体含义，以及正确计算有关事件所包含的基本事件的个数。

（三）了解条件概率，掌握概率的运算公式

1. 条件概率

可以验证，条件概率也是一种概率，它具备概率的三个基本性质。

计算条件概率，常用下面的公式：

$$P(A/B)=\frac{N_{AB}}{N_B} \quad \text{或} \quad P(B/A)=\frac{N_{AB}}{N_A}$$

式中N_{AB}、N_B、N_A分别表示相应事件所包含的基本事件的个数。事实上，根据概率的古典定义，若设基本事件总数为N，则

$$P(AB)=\frac{N_{AB}}{N}, \quad P(B)=\frac{N_B}{N}, \quad P(A)=\frac{N_A}{N}$$

于是

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{N_{AB}}{N_B}, P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{N_{AB}}{N_A}$$

例如：在掷骰子试验中，设A=｛出现4点｝，B=｛出现偶数点｝，则AB=｛出现4点｝，由$N_{AB}=1$，$N_B=3$可得

$$P(A/B)=\frac{N_{AB}}{N_B}=\frac{1}{3}$$

在实际问题中，条件概率往往可由题意直接得到。现举两例如下：

（1）“甲厂产品的合格率是95%，乙厂产品的合格率是80%”。若用事件A、B分别表示甲、乙两厂的产品，C表示合格品，则

$$P(C/A)=95\%，P(C/B)=80\%$$

进一步可得：

$$P(\overline{C}/A)=5\%，P(\overline{C}/B)=20\%$$

（2）“袋中有6只红球，4只白球，不放回地从中取球2次，每次取一只”。如果设事件$A_i=\{$第i次取到红球$\}$（$i=1, 2$），则

$$P(A_2/A_1)=\frac{5}{9}, \quad P(A_2/\overline{A_1})=\frac{6}{9}$$

进一步可得：

$$P(\overline{A_2}/A_1)=\frac{4}{9}, \quad P(\overline{A_2}/\overline{A_1})=\frac{3}{9}$$

2. 概率的运算公式

概率的几种运算公式之间的联系见表1－3。

（1）当已知事件比较复杂，而它的逆事件较为简单时，常使用逆事件的概率公式。此时，熟练地给出已知事件的逆事件，是计算概率的关键。

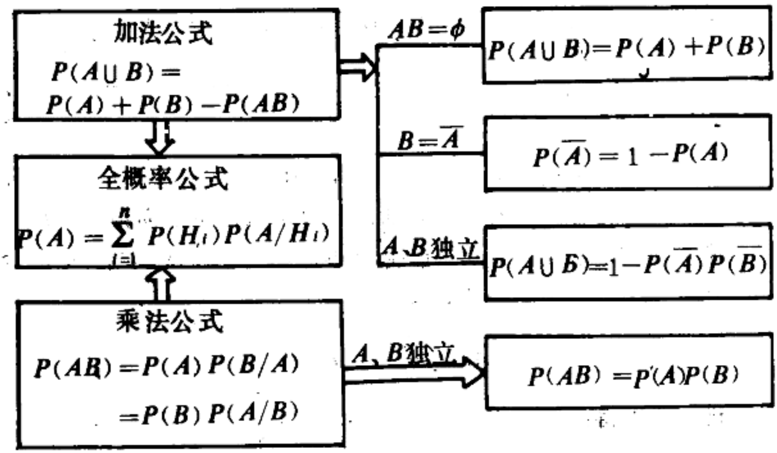
（2）概率的加法公式和乘法公式分别确定了事件和与积的概率。它们可分别推广到有限多个事件和与积的情形。当事件A_1，A_2，…，A_n相互独立时，它们的和与积的概率，

依下式计算比较简便：

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\cdots P(\overline{A_n})$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$$

表1－3



（3）全概率公式是加法公式与乘法公式的综合．利用它可以由简单事件的概率计算复杂事件的概率。运用全概率公式解决实际问题，难点在于如何设定完备事件组，将所考察的事件分解为若干个互不相容的事件的并。

一般说来，如果所考察的事件总是伴随着互不相容的几个事件（比如H_1，H_2，…，H_n）之一发生，那么通常把这几个事件设为完备事件组。

例如，检查库存的产品质量时，若仓库里混放着甲、乙、丙三个车间的产品，那么抽取到的正品或次品，必是某个车

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com