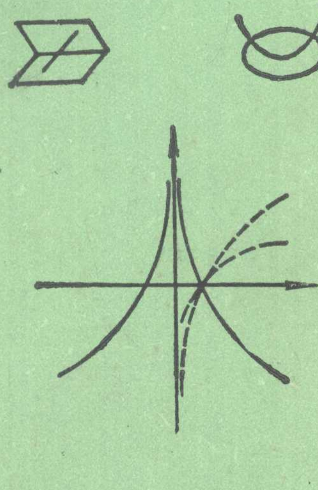
高中数学

自学指导

翟连林 苏文德 杨志刚 编



科学普及出版社

高中数学自学指导

翟连林　苏文德　杨志刚　编

科 学 普 及 出 版 社

（京）新登字 026号

高中数学自学指导

翟连林　苏文德　杨志刚　编

责任编辑：张亚光

科学普及出版社出版（北京海淀区白石桥路32号）
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
河北保定一中印刷厂印刷

开本：787×1092毫米　1/32印张：8.375　字数185千字
1991年8月第1版　1991年9月第1次印刷
印数：1—5000册　定价，3.00元
ISBN 7—110—01909—8／G·458

内 容 提 要

《高中数学自学指导》包括高中代数、平面三角、立体几何、平面解析几何四部分，共十三章。每章均有学习指导和解题导引，帮您深刻理解高中数学基础知识和作题。

本书积作者多年的教学经验：有对基础知识的归纳总结；有对学生学习高中数学时常见问题的指点；有对最新高考题的便捷解法；有经反复筛选的好题妙解；还有一部分是自编自解的例题；……

此书可供自学青年阅读，亦可作为高中学生的课外读物。

目　录

第一部分　代数

第二部分　平面三角

第三部分　立体几何

第四部分　平面解析几何

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.co

第一部分 代数

第一章 函 数

一、学习指导

1. 了解集合中元素的特征

（1）确定性：元素a是否在集合A中是确定的，要么在，要么不在，不能模棱两可。

（2）互异性：集合中的任意两个元素（如果有的话）应当是不相同的.如称$\{1, 1, 2, 3\}$是一个集合，则不正确。

（3）无序性：集合中元素的排列顺序是任意的。也就是说，只要两个集合中的元素完全一样，则视为同一集合。

以上三个特征可用来检验集合的写法是否正确，以及判断所给对象是否构成一个集合。例如，“跳得高的人”这组对象，由于没有一个标准来判别什么是“跳得高的人”，因此它不能构成一个集合.

2. 正确理解和使用集合的关系符号

元素与集合之间用$\in$、$\overline{\in}$（或$\notin$）连接；集合与集合之间是用$\subseteq$、$\subset$、$\not\subseteq$、$\not\subset$、$=$连接.如元素1与集合$\{2, 3, 5\}$之间用$1\not\subseteq\{2, 3, 5\}$表示则是错误的。注意0、$\{0\}$、$\varnothing$的关系别混淆，$0\in\{0\}$，$\varnothing\subset\{0\}$.

3. 注意特殊的子集

空集是任何集合的子集。任何一个集合是它本身的子集。即对空集$\varnothing$和任何一个集合A，均有$\varnothing\subseteq A$，$A\subseteq A$。

例1 求集合$A=\{a, b, c\}$的所有不同子集的个数。

解：由A中一个元素所组成的子集共有3个；

由A中两个元素所组成的子集共有3个；

而空集$\varnothing$、集合A均为A的子集。

故　A的所有不同子集个数为8个。

注：一般地，若集合A中含有n个元素，则A的不同的子集个数为2^n。

4. 结合图形，解决有关子、交、并、补的问题

子集、交集、并集、补集均可用韦恩图表示（如图1-1）

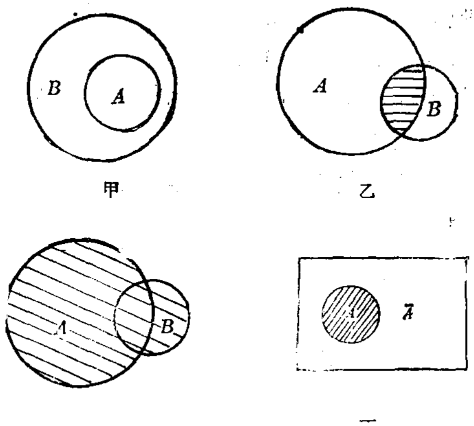


图 1-1

其中，$A\subseteq B$，如图1—1（甲）；$A\cap B$，如图1—1（乙）；$A\cup B$，如图1—1（丙）；$\overline{A}$如图1—1（丁）。

解题中如能充分利用这些图形，会使问题变得简单、明了。

例2　某班有45名学生，其中有20名学生有哥哥，有10名学生有姐姐，既有哥哥又有姐姐的学生只有1名。求：

（1）有哥哥没有姐姐的学生有多少名？

（2）有姐姐没有哥哥的学生有多少名？

（3）有哥哥或有姐姐的学生有多少名？

（4）既没有哥哥又没有姐姐的学生有多少名？

解：如图1-2。

易知，符合条件（1）的学生有19名；

符合条件（2）的学生有9名；

符合条件（3）的学生有29名；

符合条件（4）的学生有16名。

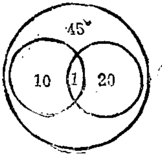


图 1-2

另外，借助数轴求不等式集合的交集与并集也很方便。

例3 若集合$A=\{x|x^2\leqslant 1\}$，集合$B=\{x|0\leqslant x\leqslant 3\}$，求$A\cap B$、$A\cup B$。

解：在数轴上先作出集合$A=\{x|x^2\leqslant 1\}=\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$（如图1-3中实线区间），再作出集合$B$（如图1-3中虚线区间）。

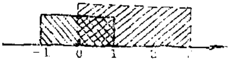


图 1-3

易知$A\cap B=\{x|0\leqslant x\leqslant 1\}$（图1-3中斜线相交部分），

$A\cup B=\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}$（图1-3中斜线部分）。

5. 要深刻理解集合运算符号的含意，提高解综合题的能力

例4 已知集合A和集合B各含有12个元素，$A\cap B$含有4个元素，试求同时满足下面两个条件的集合C的个数：

（1）$C\subset A\cup B$，且C中含有3个元素；

（2）$C\cap A\neq\varnothing$。

思路分析：解题关键在于正确理解条件（1）、（2）。条件(1)表示集合C由$A\cap B$中的三个元素构成；条件(2)表示C中的三个元素至少包含A中的一个元素。

由于 $A\cup B$中含有$12+12-4=20$个元素，所以满足条件（1）的集合C有C_{20}^{3}个。

而属于集合B但不属于集合$A\cap B$的元素有$12-4=8$个，即满足$C\cap A=\varnothing$的集合C有C_{8}^{3}个。

故同时满足条件（1）、（2）的集合C共有$C_{20}^{3}-C_{8}^{3}=1084$个。

解：（略）。

例5设集合$A=\{x\,|\,|x^2-2x|\leqslant x\}$，$B=\left\{x\,\middle|\,\left|\frac{x}{1-x}\right|\leqslant\frac{x}{1-x}\right\}$，$C=\{x\,|\,ax^2+x+b>0\}$。若$(A\cup B)\cap C=\varnothing$，且$(A\cup B)\cup C=R$($R$为实数集)。试确定$a$、$b$的值。

思路分析：为利用两个集合关系式，应首先化简A、B，

得 $A=\{x\,|\,1\leqslant x\leqslant 3\text{或}x=0\}$，$B=\{x\,|\,0\leqslant x<1\}$，

$\therefore$ $A\cup B=\{x\,|\,0\leqslant x\leqslant 3\}$。

等式$(A\cup B)\cap C=\varnothing$可理解为集合$A\cup B$与集合$C$无公共元素。

等式$(A\cup B)\cup C=R$可理解为：集合$A\cup B$与集合C的元素构成实数集。

将上述两个等式结合起来，便得 $A\cup B$与C互为补集。因此

$$C=\{x\,|\,x<0\text{或}x>3\}=\{x\,|\,x(x-3)<0\}$$
$$=\{x\,|\,x^2-3x<0\}=\{x\,|\,-\frac{1}{3}x^2+x>0\},$$

$$\therefore\quad \{x\,|\,ax^2+x+b>0\}=\{x\,|\,-\frac{1}{3}x^2+x>0\}.$$

比较 $ax^2+x+b<0$与$-\frac{1}{3}x^2+x<0$的系数，得

$a=-\frac{1}{3}$，$b=0$。

解：（略）。

6．正确理解映射的定义，注意以下几点

（1）要抓住“对应法则”、“任何”、“都有”、“唯一”、“从…到…的映射”等关键词语；

（2）在“f：$A\to B$”的表示中，f 表示对应法则，箭头“$\to$”表示映射的方向；

（3）在映射中，与原象所对应的象都是唯一的，而且集合A中每一个元素在集合B中都有对应的元素；

（4）由集合A到集合B的对应，可以是一对一对应，也可以是多对一对应，就是说，象要唯一，而原象可以不唯一；

（5）集合A中的元素都是原象，集合B中的元素不一定都是象；

（6）要注意映射的方向性，分清是由谁到谁的映射。若由A到B是映射，反过来，由B到A不一定是映射；

（7）由A到B的映射，从图形上看有下列四种情况（如图1-4）：

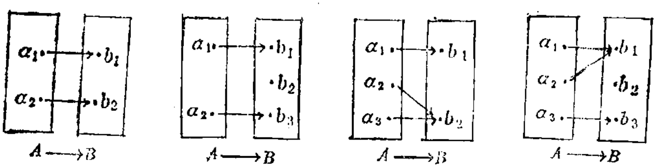


图 1-4

7．关于一一映射的定义，要注意以下几点

（1）一一映射是映射，但映射不一定是一一映射，一一映射只是映射的一种特殊情况；

（2）不同的元素对应不同的象，这就淘汰了图1-4中（3）、（4）两种情况；

（3）集合B中每一个元素必须都有原象，这就又淘汰了图1-4中（2）的情况，只有图1-4中的（1）满足一一映射定义的三点要求；

（4）在一一映射中，集合A的元素都是集合B的原象，集合B的元素都是集合A的象；

（5）如果由A到B是一一映射，反过来，让集合B中元素对应它的原象，则构成B到A的一一映射。

8. 深刻理解函数定义，注意以下几点

（1）对函数的传统定义，要抓住以下词语："范围"、"每一个"、"对应法则"、"都有"、"唯一"。

（2）对函数的近代定义，要知道函数为什么是一类特殊的映射，它的特殊性表现在值域集合中的每一个元素都是象，此外没有多余的元素，而且A、B都是非空的数的集合。

（3）函数的概念包括三部分：定义域(原象集合)；值域（象集合）以及对应法则。

9. 理解反函数概念，抓住以下几点

（1）反函数$y=f^{-1}(x)$实际上是函数$y=f(x)$的逆映射，由此不难看出只有当函数$y=f(x)$为一一映射时，才有反函数。这是判断一个函数是否具有反函数的重要方法。

一般地，若$y=f(x)$的定义域为D，则$y=f(x)$有反函数的充要条件是：

对任意x_1，$x_2\in D$，且$x_1\neq x_2$，则$y_1\neq y_2$。

例6 判断函数$y=x^2$是否具有反函数。

解： 取$y=1$，则由$x^2=1$，得$x=\pm 1$。

$\therefore$ $y=x^2$不具有反函数。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

（2）反函数的求法

求函数$y=f(x)$的反函数，可按以下步骤进行：

（i）视$y=f(x)$为x的方程，从中解出x（若遇到开偶次方运算时，应根据$y=f(x)$的定义域确定符号，不可正负号均取）得$x=f^{-1}(y)$；

（ii）分别将x、y换以y、x，得$y=f^{-1}(x)$；

（iii）写出$y=f^{-1}(x)$的定义域(若定义域是使$f^{-1}(x)$有意义的全体x，则可不必注明，否则应注明）。

例7 求函数$y=x^2+1$，$x\in(1, +\infty)$的反函数。

解：先解出x。由$y=x^2+1$，得$x=\pm\sqrt{y-1}$。

$\because$ $x\in(1, +\infty)$，$\therefore$ $x=\sqrt{y-1}$，

分别将x、y换以y、x，得$y=\sqrt{x-1}$。

$\because$ $x\in(1, +\infty)$，$\therefore$ $y\in(2, +\infty)$。

故函数$y=x^2+1$，$x\in(1, +\infty)$的反函数为

$$y=\sqrt{x-1},\ x\in(2, +\infty).$$

（3）函数$y=f(x)$与其反函数$y=f^{-1}(x)$的图象关于一、三象限的角平分线$y=x$对称。注意不能误认为$y=f(x)$与$x=f^{-1}(y)$的图象关于一、三象限分角线$y=x$对称，它们者的图象是完全重合的。

10．相同函数所具备的条件

根据函数三要素，只有当两个函数的解析式、定义域及值域都分别相同时，才能视为同一函数。

如，函数$y=x^2$与函数$y=x^2(x\geqslant0)$的定义域不同，是两个不同的函数。

11．函数定义域的求法

求函数的定义域是根据解析式有意义的条件列出不等式（或不等式组），最后归结为解不等式（或不等式组）。

使解析式有意义主要是指：

（1）分母不为零；

（2）对数的真数大于零；

（3）负数不能开偶次方；

（4）函数 $y=\operatorname{tg}x$ 中，$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in Z)$；

$y=\operatorname{ctg}x$ 中，$x\neq k\pi(k\in Z)$。

（5）函数 $y=\arcsin x$ 和 $y=\arccos x$ 中，$|x|\leqslant 1$。

例8 求函数

$$y=\frac{\arcsin(1-2x)+\sqrt{1-2x}}{\log_{\frac{1}{2}}\log_{\frac{1}{2}}3x}$$

的定义域。

解：要使函数 y 有意义，必须

$$\begin{cases}1-2x\geqslant 0 & ①\\ |1-2x|\leqslant 1 & ②\\ \log_{\frac{1}{2}}\log_{\frac{1}{2}}3x\neq 0 & ③\\ \log_{\frac{1}{2}}3x>0 & ④\\ 3x>0 & ⑤\end{cases}$$

由①，得 $x\leqslant\frac{1}{2}$。由②，得 $0\leqslant x\leqslant 1$。

由③，得 $x\neq\frac{1}{6}$。由④，得 $0<x<\frac{1}{3}$。

由⑤，得 $x>0$。

∴ 不等式组的解集是 $\{x|0<x<\frac{1}{3}$ 且 $x\neq\frac{1}{6}\}$。

此即为函数的定义域。

12. 求函数的值域，要考虑函数的定义域

例如，函数 $y=\arcsin\sqrt{x}$ 的定义域是〔0，1〕，则该

函数的值域是〔0, $\frac{\pi}{2}$〕，而不是〔$-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$〕。

13° 深刻理解函数的奇偶性定义，掌握判定方法

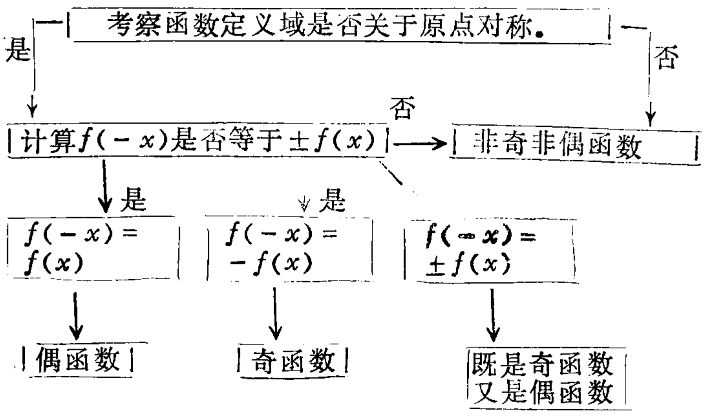
（1）奇偶性定义有如下两层含义：

（i）对于定义域内任意x，$-x$也一定在定义域内。也就是说，只有定义域关于原点对称的函数，才有可能具有奇偶性。

（ii）$f(-x)=f(x)$〔或$f(-x)=-f(x)$〕在定义域内恒成立，而不是对定义域内的部分x成立。

（2）奇偶性的判定方法

一般地，对于给定的函数可按如下步骤判定其奇偶性：



例9 判断下列函数的奇偶性：

（1）$f(x)=\dfrac{4x+1}{5-x}$；（2）$f(x)=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}$；

（3）$f(x)=\lg(\sqrt{x^2+1}+x)+\lg(\sqrt{x^2+1}-x)$。

解 （1）∵ 函数的定义域为$(-\infty,5)\cup(5,+\infty)$，不是关于原点对称的区间，

$\therefore \quad f(x)=\dfrac{4x+1}{5-x}$为非奇非偶函数。

（2）函数的定义域为$(-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$。

$\because \quad f(-x)=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{e^{-x}-e^{x}}$

$$=\frac{e^{x}+e^{-x}}{-(e^{x}-e^{-x})}=-f(x).$$

$\therefore$ 函数 $f(x)=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}$为奇函数。

（3）函数$f(x)$的定义域为R。

$\because \quad f(x)=\lg[(\sqrt{x^2+1})^2-x^2]=\lg 1=0$

$f(-x)=\lg[(\sqrt{(-x)^2+1})^2-(-x)^2]=\lg 1=0$，

即 $f(-x)=f(x)=-f(x)=0$，

$\therefore$ $f(x)$既是奇函数又是偶函数。

例10 已知$f(x)$的定义域是一个关于原点对称的区间，求证：$f(x)$总可以表示成定义在这个区间上的一个偶函数与一个奇函数之和。

思路分析：设$f(x)$的定义域为$(-a,\ a)$ $(a>0)$，欲证$f(x)$可以表示成一个偶函数$g(x)$和一个奇函数$s(x)$之和〔其中$x\in(-a,\ a)$〕，则只须找到$g(x)$和$s(x)$即可。为此

设$f(x)=g(x)+s(x)$ ①

其中$g(x)$、$s(x)$分别为偶函数和奇函数，且$x\in(-a,\ a)$，即$g(-x)=g(x)$，$s(-x)=-s(x)$。

于是 $f(-x)=g(-x)+s(-x)$，

即 $f(-x)=g(x)-s(x)$ ②

联立①、②，可求得

$$g(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)],\ s(x)=\frac{1}{2}[f(x)$$

$-f(-x)$〕，问题便不难证明。

证明：（略）。

14. 深刻理解函数单调性定义，掌握单调性的判断方法

（1）关于函数单调性定义

单调性是函数的一个重要属性，它刻划出函数在给定区间内的函数值的变化趋势。从定义中不难看出函数的增、减是相对于区间而言的。同一函数在不同的区间，其增、减性是不尽相同的。

（2）函数单调性的判断方法

函数的单调性定义为我们提供了判定函数增减性的重要方法。

例11 已知函数$y=f(x)$是奇函数，在$(0, +\infty)$内是减函数，且$f(x)<0$，那么$F(x)=\dfrac{1}{f(x)}$在$(-\infty, 0)$内是增函数还是减函数？并加以证明。

解：$F(x)$在$(-\infty, 0)$内是减函数。证明如下：

设$-\infty<x_1<x_2<0$，$\because$ $f(x)$为奇函数，

$\therefore$ $f(-x_1)=-f(x_1)$，$f(-x_2)=-f(x_2)$。

又 $y=f(x)$在$(0, +\infty)$内是减函数，且$-x_1>-x_2>0$，

$\therefore$ $f(-x_1)<f(-x_2)$，即$f(x_1)>f(x_2)$。

而 $F(x_1)-F(x_2)=\dfrac{1}{f(x_1)}-\dfrac{1}{f(x_2)}$

$$=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{f(x_2)\cdot f(x_1)},$$

由题意，知 $f(-x_1)<0$，$(-x_2)<0$，即 $f(x_1)>0$，$f(x_2)>0$，$\therefore$ $f(x_1)f(x_2)>0$。

于是$F(x_1)-F(x_2)<0$，即$F(x_1)<F(x_2)$，

故$F(x)$在$(-\infty,0)$内为减函数。

例12 试讨论函数$f(x)=a^x-a^{-x}(a>0, a\neq 1)$在定义域内的增减性。

解：在定义域内任取$x_1<x_2$，则

$$f(x_2)-f(x_1)=(a^{x_2}-a^{-x_2})-(a^{x_1}-a^{-x_1})$$
$$=(a^{x_2}-a^{x_1})+(a^{-x_1}-a^{-x_2})$$
$$=(a^{x_2}-a^{x_1})[1+a^{-(x_1+x_2)}]。$$

$\because$ $a^{-(x_1+x_2)}>0$，$\therefore$ $1+a^{-(x_1+x_2)}>0$。

(1)当$a>1$时，$a^{x_2}>a^{x_1}$，$a^{x_2}-a^{x_1}>0$，

即 $f(x_2)-f(x_1)>0$，故当$a>1$时，$f(x)$为增函数。

(2)当$0<a<1$时，由$x_1<x_2$，得 $a^{x_2}<a^{x_1}$，$a^{x_2}-a^{x_1}<0$，即 $f(x_2)-f(x_1)<0$，故当$0<a<1$时，$f(x)$为减函数。

15. 掌握复合函数的有关性质

复合函数是数学中常见的一种函数形式，有关它的一些概念、性质，应掌握如下几个主要问题：

(1)复合函数的解析式

包括由$f(x)$求$f[g(x)]$及由$f[g(x)]$求$f(x)$两类问题。

(i)由$f(x)$求$f[g(x)]$的主要方法是代入法，即将$g(x)$的表达代替$f(x)$中的x，化简、整理，即可。

例13 已知 $f(x)=3x^2+2x-7$，求：(1)$f(x-2)$；(2)$f(\sin x)$。

解：(1)令$g(x)=x-2$，

$\therefore$ $f(x-2)=f[g(x)]=3(x-2)^2+2(x-2)-7$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com