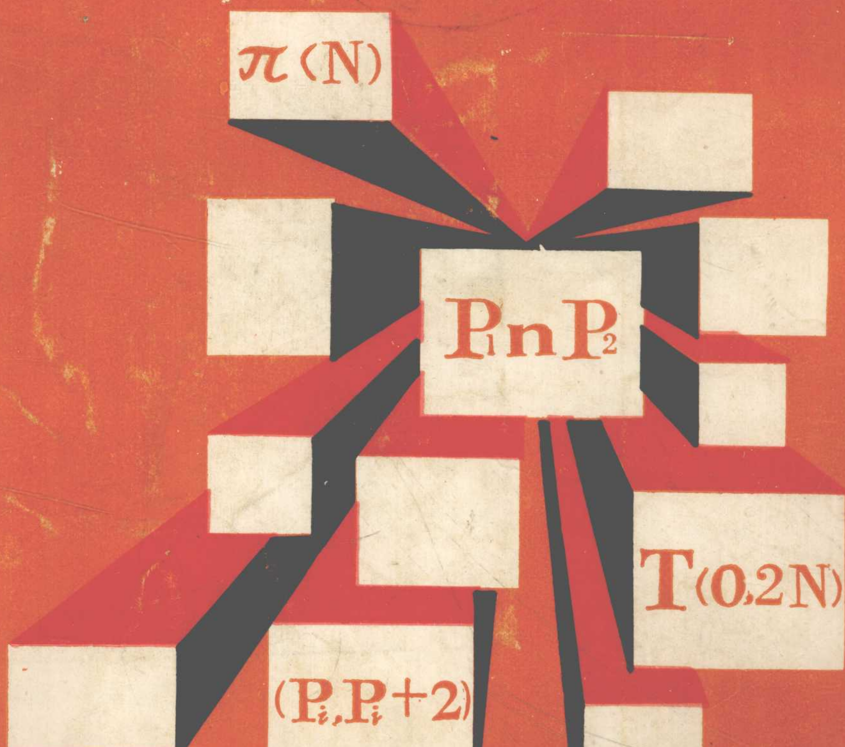
合数标识论

王长策 著

HESHU BIAOSHILUN



贵州人民出版社

合 数 标 识 论

王长策 著

贵州人民出版社

合 数 标 识 论

王 长 策 著

贵州人民出版社出版、发行

（贵阳市延安中路9号）

中国科学技术情报研究所重庆分所印刷厂印刷

787×1092毫米 16开本 20印张 486千字 插页4

1989年10第1版 1989年10月第1次印刷

印数1-5,000

ISBN 7—221—00882—5/G·372 定价：5.90元

责任编辑之序

梦幻中，我曾受恶魔的驱使，在数论的王国里旅游过数不清的日日夜夜……

且不说满怀痴情，为了追求一个新的素数，艰难地奔走在相当长相当长的一段自然数列轴上，对其荒丘野地的暗无天日的恐慌；也不必说不厌其烦，把一个合数分解为众多大小悬殊的素因子之乘积后，对其深沟高垒的神工鬼斧的惊叹；更不消说费尽心机，用数学归纳或无穷下推法证明一个命题，竟然陷入了变幻莫测、无边无际的迷魂阵时，对其大海汪洋的烟波浩森的惝恍；以及对业余数学家之王费马的大定理，本世纪贡献最大的数学家之一希尔伯特提出的23个尚待解决的问题，诸如线性丢番图方程，黎曼、哥德巴赫、孪生素数猜想等这些名山胜迹和风土人情的似见非见的陶醉与神往！

就连那不起眼的一草一木，都极易勾起我心中的万千遐想和无穷感概——"合数是素数的若干倍数"。因此，如果说素数好比是天，那么合数好比是天外之天的天外之天……"素数的个数是无限的"。因此，如果说已被人类确认的素数好比在晴朗的秋夜里人类所能看到的满天繁星那样的多，那么尚未被人类确认的素数远比这满天繁星还要多得多得多……"若干个素数的积是合数"。因此，如果说发现了一个新的素数就好比在黑暗中给人类带来了一线光明和希望，那么要到何年何月才可能创造出一个给人类带来无限的光明和希望的以任意多有序的（哪怕是无序的）素数为其因子的合数太阳？

大概旅游者都会有个选择，或偏重于游山，或偏重于玩水，或二者兼而有之。于是乎对旅游点分类的问题也就提出来了。我以为，自然数有如下两种分类法：

1.自然数
- 奇数（用2除余数都是1）
  - 单位1
  - 奇素数
  - 奇合数
- 偶数（用2除余数都是0）
  - 偶素数
  - 偶合数

2.自然数
- 单位1（约数只有1个）
- 素数（约数只有2个）
  - 奇素数
  - 偶素数
- 合数（约数多于2个）
  - 奇合数
  - 偶合数

由此观之，可知合数集合与素数集合中的一切元素，构成了大于1的全体自然数的集合。因此，除了1以外的任何一个自然数，绝不会既是合数又是素数，只能或是合数或是素数，二者只居其一且二者必居其一。因为，一个合数与一个素数是绝不会相等的。这跟偶数与奇数的关系比较相似。然而，合数与素数的关系远比偶数与奇数的关系要复杂得多了。人们很早就知道它们在一定条件下可以相互转化。如一个合数可以分解为两个或两个以上的相等的或不相等的素数的乘积，反过来两个或两个以上的相等的或不相等的素数的积必然是一个合数；又如两个奇素数的和一定是偶数，反过来是否为真呢？也就是说，是不是每一个大于4的偶数都可表为两个奇素数的和呢？哥德巴赫猜想就是一座试图把自然数的两种分类联系起来的桥梁。我国著名的数学家陈景润的精心解析和科学推算的结果，距哥德巴赫猜想的解仅有"一步之遥"了，从而赢得了国际声誉。然而为完成最后的这一步所面临的困难，将比人们一般想象的还要大得很多很多。因为至今我们尚未找到一种能够判断任意的一个自然数是合数或是素数的简单可行的方法，甚至对有的相当之大的自然数，我们还根本无法知道它们是

素数或是合数。

啊，合数？素数！汝等究竟是何数?！意欲弄清你们各自的本质属性和相互间的关系，经过了多少时代的多少拼搏、多少失败和多少忍耐……在苦斗、煎熬与执著，或痴迷、悬念、渴望乃至发狂中，有多少眼泪憋不住滚下来，有多少情怀早已毁坏，有多少生命不复存在……可是你们却象日月星辰一样无时无刻不与我们同在。而且，我深信既然人类已成为你们的知己，人类也就将永远拥有你们的爱！

可是，鉴于在旅游中随时觉察到的自身的浅薄及精力不济，我也只得常常抛开那些不切实际的问题和不着边际的情怀，而回到数论王国之所以发祥的本源——自然数集合中去。

且说这一日，我竟然独自恍恍惚惚地来到了金碧辉煌的自然数集合的中心圣殿之前，正不知从何而入，只见迎面走来一位断了双臂的妙龄女郎。从她的庄重、典雅与维纳斯别无二致的神态可以看出，她或许就是这座圣殿的主人而绝不会是一般的导游。突然，我发现她那深邃、甜美的眼光正照射着我并使我的心里顿时涌起一种自惭形秽的感觉，又听见她用一种悲怆、哀怨的声调向我问道："径自来访的先生，你是否明白我的双臂是怎么断掉了的？你是否觉得象我这样一个断了双臂的小女子，还存在着对称、和谐的自然美呢?！"我一下子被懵得手足无措，深深地埋着头诚惶诚恐地应道："在下学浅才疏，虽竟自学会了些东西，但实在不知该怎样回答您刚才的提问。请小姐指点！"可能是因我坦诚的缘故，只听她如歌如诉地道："本来，我并非是没有双臂的，而且可以毫无愧色地说，胜过黄河向南北两岸伸出的千万条铁的臂膀……可是，因为长期以来人们大都一直只注意到我的眼中所显现的基数特征（想要多少个就要多少个）和序数特征（想要第几个就要第几个），而对我的手臂所呈现的完美、和谐的对称性却始终视而不见，更谈不上什么赏识与重用，所以我一气之下就让我的手臂全都消失了！不信的话，我现在就可以显示给你看看。"于是，我勇敢地抬起头来观看她的神通：开始，我发现她的两只瞳孔忽然收缩变细得跟正午时的猫眼那样，都眯成了个①；接着，她伸出了她的第1双手臂(1，3)，而此时她的瞳孔中闪烁着的都是②；紧接着，她同时伸出了她的第2、3双手臂（1，5和2，4），而此时她的瞳孔中闪烁着的都是③……随着她的手臂的越伸越多，我眼前的"断臂维纳斯"竟变成了神话中的"千手观音"……我情不自禁地举起随身携带的相机，拍下了这令人惊诧的珍贵镜头……

殊不知嗣后显影出来，得到的却是下面这幅照片：

① ①

1 ② ② 3

1 2 ③ ③ 4 5

1 2 3 ④ ④ 5 6 7

1 2 3 4 ⑤ ⑤ 6 7 8 9

1 2 3 4 5 ⑥ ⑥ 7 8 9 10 11

1 2 3 4 5 6 ⑦ ⑦ 8 9 10 11 12 13

1 2 3 4 5 6 7 ⑧ ⑧ 9 10 11 12 13 14 15

1 2 3 4 5 6 7 8 ⑨ ⑨ 10 11 12 13 14 15 16 17

1 2 3 4 5 6 7 8 9 ⑩ ⑩ 11 12 13 14 15 16 17 18 19

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 ⑪ ⑪ 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 ⑫ ⑫ 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 ⑬ ⑬ 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 ⑭ ⑭ 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27

……………………………………………………………………

1………………………………… n−1 ⓝ ⓝ n+1…………………………………2n−1

……………………………………………………………………

我惊讶不已，对恍惚之中的那些闻所未闻和见所未见想了老半天，决意命其名曰“千手观音图”。正如希尔伯特指出的：“……追求一个难题的解决往往使人闯入新的领域里去。”（梁宗巨《世界数学史简编》第494页）现在，我不妨坦然地告诉读者，正是为了追求哥德巴赫猜想的解，才使得我闯入了自然数呈对称性分布的新天地。我以为，自然数呈对称性分布的性质是：任何一个大于1的自然数的2倍，都既可表为两个偶数之和，又可表为两个奇数之和。其中显然，2的2倍还可表为两个偶素数之和；大于2的自然数的2倍还可表为一个偶素数与一个偶合数之和，亦可表为两个奇素数之和（这就是哥德巴赫猜想）；大于3的自然数的2倍，还可表为两个偶合数之和；大于5的自然数的2倍，还可表为一个奇素数与一个奇合数之和；大于8的自然数的2倍，还可表为两个奇合数之和或两个互素的数之和。当然，以上这些看来好象极为显然的性质，都必须经过严格的证明之后，才能够得到人们的确认。不过，这可是非常非常之困难的。但是，即便只讨论一下在什么条件之下具备这些性质，也是饶有风趣的。

针对“千手观音图”的通式：

$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n-1\ ⓝⓝ\ n+1,\ \cdots\cdots,\ 2n-3,\ 2n-2,\ 2n-1$$

而言，设有自然数a，那么易确认

$$a \mid 2n \Longleftrightarrow a \mid 2n-a \text{ 和}$$

$$2 \leqslant a \leqslant n \Longleftrightarrow n \leqslant 2n-a \leqslant 2n-2。$$

这表明若a为偶素数，或为奇素数，或为偶合数，或为奇合数且整除2n时，则2n可表为a与一个合数2n－a之和，且2n－a在期间〔n，2n－2〕上。

显然，当n不是素数时，若设有小于n的奇素数p，且$p \nmid n$，则p与2n－p是互素的。然而，2n－p却不一定就是素数。如$7 \nmid 8$，7与9互素，可9并非是素数而是合数。而哥德巴赫猜想也可以这样说：当n大于2且不是素数时，一定存在着一个小于n且不整除n的素数p，并在期间〔n，2n－3〕上一定存在着一个素数2n－p。

而且，只要把“千手观音图”的通式的左边翻转，改为

$$n-1,\ \cdots\cdots,\ 3,\ 2,\ 1\ ⓝⓝ\ n+1,\ \cdots\cdots,\ 2n-3,\ 2n-2,\ 2n-1$$

之后，就会发现自然数呈对称性分布的更加饶有风趣的玄机：

任一大于2的偶数都可表为两个奇素数的差！

这一命题的提出及对其证明的强度，我想绝不会亚于哥德巴赫猜想。我认为，哥德巴赫猜想指的是自然数呈对称分布的和性问题，而我所提出的猜想指的是自然数呈对称分布的差性问题。这两个问题的长期的悬而未决曾使得我苦不堪言！我亦自知因公务的繁忙及私事的困扰，此生是不可能得到这两个问题的解的。于是就给孩子取名为何数，意旨持续不断地上下求索！

本书《合数标识论》的问世，并不等于全部治愈了我的心病，但至少从探索、创造与启发的意义上讲，我是非常之恭维的。王长策先生在他所首创的素数分布的对称性理论的背景下，把哥德巴赫猜想的证明自然而然地收入了合数标识论的眼底。是他首先发现了哥德巴赫猜想现象形成的规律，推出与之等价的猜想的理论证明公式，且在指出其无穷收敛级数的主项和误差次项的性质、大小后，证明哥德巴赫猜想的充分成立。这是历史上首次直接从（1＋1）高峰正面突破所爆出的大冷门！著者所创的素数分布呈对称性的理论，开拓出数论研究的新内容和新形式，为数论研究注入了新的生机和活力。著者还就对称性问题提出独到精深的见解，把对称性和哲学基本范畴（物质、运动、静止等）融为一烟，使对称性概念成为哲学基本概念当中的一员，而达到新的哲学高度。他指出，对称性是客观世界的本质属性，对它作出更

加精微的研究，将会使人类在认识客观世界的更深层次面前，获得更多主动和更大自由……

作为本书的责任编辑，我有必要向读者谈些希望能够得到谅解的话：这就是我一再声明的，我不过是一个旅游者。本书当然好比是我游览的一个胜地。虽然，我曾对本书的编撰方式提出过一些建议，如当第一次阅过本书的原稿后，我曾向长策先生讲述过：由于欧几里得的《原本》是最早的一部内容丰富的数学巨著，并且被后代人尊崇为严格性的典范，所以一直被使用至今，因此它对数学发展的影响之深远，超过了任何别的书。而整部书的陈述方式——开篇便摆出所有的头等重要的公理、定义和有条不紊地编排的从简单到愈来愈复杂的一系列定理——这是欧几里得所独创的。这也是我希望你能够注意借鉴的。但是，我毕竟不是这个胜地的发现者、探索者，或设计者、营造者和开辟者。因此，虽然现在著者已经过数年的呕心沥血撰就了《合数标识论》这部数论新作，但我却好比由一个爱品头论足的旅游者变成了一个蹩脚的导游员。我之蹩脚就蹩脚在不是深谙数论此道的行家，而仅仅是一个爱好者。不过，记得〔美〕Morris Kline教授曾在他的《古今数学思想》中评论过《原本》的优缺点。他指出《原本》的严重缺点：第一是有些定义含糊其词而另一些无关宏旨。第二是用了没有逻辑依据的运动概念，默认图形从一处移动到另一处后所有的性质保持不变。第三是只用特例或所给数据（图形）的特定位置证明一般性的定理。并且，他指出欧几里得和后代上百个最优秀的数学家所犯的错误，是利用了从图形看来是显然的事实，或在直观上是那么显然因而无意中用上了的事实……一部由举世公认的数学巨匠写的书况且都会有这么多缺点，因而摆在我们面前的这部出自名不见经传的著者的书会有差错也是难免的了。所以，我希望读者们在“旅游”的途中，既要尊重著者的劳动，又要格外小心，以免在悬崖峭壁之上，一失足成千古恨！因为从任何一位导游员的话中所表现出来的学识水平、文学色彩和艺术想象，都不可能完全等于用严谨求实的治学精神得到的有关研究对象的科学结论。

为了获得存在的情趣与生命的真谛，尽管天高地远不可言壮也不可思议，然而有道是“一把弦子话乾坤”，又有云：“花开千树，本在一处”，因此，我坚信有志者将奋力扯起两脚的泥巴，跨上四蹄腾飞的千里马，踏平千难万险的黄泉路，闯过九死一生的鬼门关！

何伊德

1989. 6. 13.

前　　言

本专著的前身是作者1983年撰写的初稿《关于合数标识论及其几个应用》以及1986年2、3月份分别以提要、论文形式写就的《合数标识论》等。这些文稿的主要思想则发端于1978年4月至8、9月间，当时有随记的草稿对此记录备忘。

形成本理论的过程大致如此：当初作者只拿着合数、素数两个确切的定义，就投入杂乱纷纭、寥廓浩茫的素数宇宙，进行时间虽短却又艰苦异常的探索。一旦找到合数的矩阵表示，可以求出任意多个素数后，又不停息地向哥德巴赫（C. Goldbach）猜想（A）命题的高峰飞奔。经过多少个日日夜夜的废寝忘食，直觉竟神奇地让哥德巴赫猜想证明的梗概和结果，如海市蜃楼般浮现脑海。

大海的蔚蓝已经在望，却还要溯江河而西上。隐藏在证明路线和结果后面的概念经类比、整理，已一一抽象、概括出来。几十条定理得到构造和证明，最后又总结了方法和技巧。只是到那时合数标识论才拔地而起、屹立眼前。

直觉在于发现，逻辑在于证明，这在整本《合数标识论》里表现俱足。作者要在书中反复指出这极为重要的思想：虽然公理化是理想的形式，但在直觉指引下的构造性思想却是数学发现动力的真正源泉。虽然还可从本书提供的基础上演绎出新的东西，但它和由归纳推理，经直觉构造出的发现却具有不同的性质。

原来的研究只有一个中心：哥德巴赫猜想。（又简称为G氏猜想或(1+1)）。但当作者一旦意识到支撑G氏猜想的几个主要依据，也具有相对独立性和自身发展的要求，就给以它们相应的生存空间。人们还可据此去开拓新的研究课题，去获取新的成果。这也就是书里除有第六章，还有其余五章的来由。

可以沿两条路线来认识本书的结构：

1）第一章提出的合数标识论，是全书的理论基础；其余从第二章至第六章则是它的展开和应用。关于G氏猜想的证明，在这儿就屈尊为重要应用中的一个。

2）关于G氏猜想的证明作为全书的出发点和归宿，其余各章则成为证明的依据和基础。

读者无论循哪条路线，或同时兼顾两条路线来研读，只要有恒心，肯钻研，想必都可高步云衢，以收事半功倍之利。

本书冠以的《合数标识论》，从狭义上说是指作为全书理论基础的第一章；从广义上说则兼指这个理论基础及其展开运用这两个方面，包括整本书的全部内容。

逻辑的思维并不一定就是思维的历史。本书采用前一逻辑路线来依次给出自己的章节，这主要是想突出这样的观点：整个理论以第一章为基础，就可更好体现全书整体和局部、理论和方法、原理和应用的高度统一；正是合数标识论的旺盛生命，使好几个难度极大的问题都获得令人惊喜的成果。

现回首来看本书用合数标识法求任意多个素数、分解大数，乃至全分析大区域内所有自然数、求$\pi(N)$的理论和方法，它们在数论中的地位和价值，在信息时代实际应用的前景都值得高度重视。显然还没有证据可说这部分在理论和应用的价值方面，就一定要比关于G氏猜想证明的来得逊色。在寂无人烟的森林里干粮固然重要，但吃完了就没有了。如有支猎枪，

却可以不断猎取飞禽走兽。

实践说明，美学上的考虑具有一定方法论的意义。正是出于对自然美的憧憬和信念，作者在对与G氏猜想证明有关的，素数分布具体对称性问题研究之后，又对一般事物的对称性问题继续探讨，竟导致对称性自然法则的提出。这条外延极大的自然法则似可概括自然界和社会生活中的大量对称性现象。它以方法论姿态的出现将促使自然科学和社会科学提出新的研究课题。

根据素数分布对称性研究结果，素数宇宙高度和谐、对称的壮丽图卷，即刻就映入我们的眼帘，随之就势如破竹地假设性证明了孪生素数对、三生素数组有无穷多个的著名猜想；并坚定预言在自然数列轴上哪些点必为合数，哪些点出现素数的可能最大，在哪些区域观察到并可定义的素数分布图形，只要非对称干扰不足以使之中止，都将无穷多个对称、相同地映射出来。从宏观上和整体上把握、预见自然数列轴上素数分布的图景，这在历史上恐怕还是第一次。

我们知道根据对称性方法，假设性证明的这几个猜想中，孪生素数对有无穷多个猜想可算最为简单的，却已属希尔伯特问题（Hilbert Problems）中与G氏猜想并列的第8问题中的另一部分，也是迄今尚无从下手的世界数学难题。所以认为关于素数分布乃至一般事物对称性研究，具有重要意义和远大前程，实是有洞察力的远见卓识。

这里必须说明的是，由于历史上的原因，这些证明依据的大部分并不在有关这些证明的名目之下，而在给出证明的前面和后面的第五章。这虽然增添读者集中依据、综合整理的功夫，却可避免在文中出现令人厌烦的大量重复。作者希望这样的编排不致在读者心里造成这样的印象：作者并没有给这些证明以应有重视，因为这些证明本身并不成熟。其实要慎重告知读者的是，作者对这几个证明所化费的心血，并不亚于对G氏猜想的证明；其证明所达到的程度也不会亚于对G氏猜想的证明；其构成部分的篇幅汇集起来，也很不算少。

要在世界上找到比G氏猜想更著名的数学问题，肯定是不容易的。和它举世瞩目的重要地位相适应，在书里其竟占约半的篇页。对专写这问题的第六章当以先睹为快，但要更好、更快地理解这证明的实质，最好还是先耐心读完其他的基础部分。

近九个春秋的苦心孤诣，使作者深深感到证明G氏猜想(A)命题的极端艰难。这正如有人形容的那样：是在用手推动群山！但现在毕竟第一次从（1＋1）高峰的正面进行了登攀，对G氏猜想(A)命题直接进行了证明；第一次给出G氏猜想(A)命题以数学的理论表示；在微弱的假设下证明了G氏猜想。这个重要的成果，所会引起的震动和喜悦是可以想象的。是的，人类总是在艰深的问题面前考验自己认识客观规律的勇气和能力，有决心、有办法逐步认识那些本来就可以认识的客观规律。

实际在撰写本书之初，作者就把热烈追求简单明确的真理奉为自己研究的信条，紧紧抓住对象的主要特征，努力以清晰的方式阐明认识要点之间的联系，而把那些繁琐芜杂的次要因素抛在一边。这就自然在研究G氏猜想(A)命题的过程中，不自觉地体现了希尔伯特数学方法的原则，即使面对最为棘手的问题，也要使之尽量回复到问题的本源，回复到起始的概念，把它们一一搞清楚，并有针对性地根据问题的特征，选择特殊的数学工具和方法。

一些事情往往在不知不觉中发生。当开始给出自然数列轴上自然数中的合数表示，你并不会立即觉察到代数和几何有机结合的解析几何方法，在悄悄潜入数论金碧辉煌的领地。本书中所有概念、定理、方法的提出，几乎都以对象的“形”为基础。数和形相结合，才使与“智

力图象”密切相伴的直觉思维获得灵感，并在创造和发现中起着重要作用。

当数论的新分支纷纷打起自己的旗帜之际，本书却直接以G氏猜想(A)命题的原始形式为证明的对象，并令初等数论重振旗鼓。由此所自然采取的离散数学的方法，就大大省却将离散点问题转化为解析数学、复变函数的对象，所必会出现的种种复杂手续。看来作者又在无意中遵照潘承洞教授的这条意见："现在来看，我们认为猜想的最原始、最简单的形式也是最重要的。"[1]

尽管现代数学界对数学公理化问题，有了更为深刻的认识：包含通常逻辑和数论的一个系统，要证明其公理的相容性和完备性是不可能的。但本理论仍坚持用公理化方法来整理，以更好地展示其结构各部分的逻辑次序和联系，对理论既便于掌握、记忆和应用，又便于检查、完善和发展。

而且对全书的命题，包括G氏猜想都坚持通过逻辑演绎，从已知的定理来导出，而使之成为定理。难道还有舍此建立定理的其他途径？众所周知，数学只研究现实中的数量关系和空间形式("量"的基本含意是"结构")，而舍弃对象其他一切属性。数学一旦抽象出有关数和空间的概念，也就自然和客观具体对象相脱离，并出现自身相对独立性和内在逻辑发展的要求。数学高于自然科学的抽象性，要求理论从头至尾始终保持同样的抽象程度，而不回复到具体的对象。这决定了数学概念的思辨性和数学方法的推理性。如果一位自然科学家证明自己理论的正确要通过实验，那么一位数学家要确立一条构造出来的新定理，就必须依靠严格的逻辑证明。当某命题在证明中通过逻辑和已知定理相联系，其就和已存在的知识体系融合在一起，从而大大提高了自己的可靠程度。虽然由已知定理并不一定可以追溯到很远的公理和公设，原定义下的公理体系也并不存在。

同时还要指出的是，希尔伯特关于构成概念基础的这一准则，在本理论概念的形成上无疑自发地起过作用："把这些概念建立在一种简单而完备的公理系统之上，使新概念的精确性及其对于演绎之适用程度无论在哪方面都不会比以往的算术概念差。"[2]虽然其中的"公理系统"已被赋以新的内容。

《合数标识论》的内容是基本自足的，其含意是主要依靠理论自身的概念、定理、方法，拾级而上就可达到其结论的极峰。既然本书属初等数论的范畴，只用到初等、高等数学的部分知识，那么本书包括G氏猜想的证明，对大专院校的师生，中、小学教师，理解能力较强的高中生和广大数学爱好者都是可读的。他们根本不必为读懂本书作若干年数论、包括解析数论深奥知识的准备，数论的"困难定理"在这儿已不复存在。

正是本理论所具有的简单、初等的性质，使作者决心以讲义形式发表这部带有强烈探索性和创造性的纯粹数学理论专著。只要不作聱牙诘屈、诲涩难懂的叙述，对比较重要的部分避免跳跃和省略，准确畅晓地交待清每一个概念、定理、方法的来源，内容间的相互联系，那么这部著作从内容到形式都可成为通俗性、普及性较强的读物，而能迅速为广大读者阅读、检查、发展和应用。如果说以前还只是极少数的数论专家有资格问津数论，包括G氏猜想问题研究的高深学问，那么现在所有具有不多数学知识的青年也有机会来到这充满遐想，到处闪烁着神秘光晕的数论王国观赏、徜徉，接触并研究一些著名的难题，这本身就是数学史上值得一书的新鲜事。

---

(1)《哥德巴赫猜想》 潘承洞 潘承彪著 科学出版社 1981年2月第1版.P18

(2)《希尔伯特》康斯坦西，瑞德著 袁向东 李文林译 上海科学技术出版社 1982年6月第1版·P98·

而且作者还认为以讲义形式来阐述新的理论，更适合于说明新理论被创造出来的具体思维过程，以充分展示主观对客观规律生动的把握和反映。广大有志于创造发明，以期为科学事业作出重要贡献的大学生、中学生，较早接受一些科学方法的知识，实际体会一下它们在科研中的应用和作用，是完全必要的。

作者在自己的学习经历中痛感到，以当时的课程设置和教学方法来培养科学家是困难的。实际上在各类型的学校里，并不缺乏教授具体科学知识的内容，恰恰相反，这些内容多到往往要用"填鸭"方式来灌输，却很少设置专门训练思维能力和科学方法的课程。这显然与伟大物理学家爱因斯坦(Einstein, Albert)的主张相异。他说："发展独立思考和独立判断的一般能力，应当始终放在首位，而不应当把获得专业知识放在首位。"[1]而大哲学家黑格尔 (Hegel, G. W. F) 也以这样的警句表达了相同的意思："手段是一个比…有限目的更高的东西——犁是比由犁造成的、作为目的的、直接的享受更尊贵些。"[2]关于科学方法在科学研究中所占的地位，许多书籍都有详尽专门的论述。但是一般地谈论一件事，和实际做好一件事，究竟有质的区别。

我们的大学生、中学生的物理和数学知识，是在十几年的时间里以主要精力，通过众多的物理和数学教科书得到的。这些教科书内容丰富却篇幅有限，就是对所涉及的知识都只能提纲挈领地叙述，更勿论去阐述科学思维为得到这些知识，在发现过程中所走过的真实、困难而曲折的道路，以及所采用的科学方法和技巧。而这对于培养具有敏锐观察力、深邃洞察力，善于提出问题和解决问题，大胆创新、勇于拼搏、百折不回、一往无前的科学家却又是绝对需要的。所以作者完全赞同伟大数学家欧拉 (L. Euler) 的这个观点：如果单是做出了给科学宝库增加财富的发现，而不能坦率地阐述那些引导他做出发现的思想，那么他就没有给科学做出足够的工作。[3]而以讲义形式来撰写本书，正是贯彻这个观点的实际行动。

这里需要说明的是，虽然从实质上说本书是通俗易懂的数论读物，对处于好几个知识层次的广大读者都是可读的，但这决不意味要达到对它实质的透彻理解是唾手可得的，尤其是对那些抽象程度较高，要通过较强分析综合手段才能得到的部分更是如此。作者赞成在读本书时持认真态度，只要刻苦砧研、切磋琢磨，就必有所获。

本理论正如一切科学理论一样，也只是在一定条件下对客观规律所作的本质但又只是近似的反映，所达到的也只是相对真理的境界。形成理论形态的关键，是要通过"理想化"方法，根据问题的要求分清主次，发现、抓住、概括、突出对象主要特征，毫不犹豫地扬弃对象一切繁琐细杂、次要偶然的因素。现在整本《合数标识论》已不是对象巨细无遗、机械直接的具体反映，而是在逻辑的格点上，按逻辑的规定性，对客观规律所作本质但又是近似的描写。当客观的内在联系在纯粹理论形态上被把握，只是被理性"修正"、"改造"过的必然。

本理论也正如一切科学理论一样，都只是在发展完善中出现的相对完成形态。它将在相当长的历史时期，经反复检验、修正、完善，而逐渐发展为较成熟的理论，并沿着假设——理论——新假设——新理论的轨道继续前进。很难设想第一次端出的理论，就是终极的，而

〔1〕转引自《漫话科学假说》 杨德荣著 辽宁人民出版社 1982年11月第1版 P183.

〔2〕转引自《科学家的思维方法》 姜念涛著 云南人民出版社 1984年5月第1版 P5.

〔3〕转引自《MATHEMATICS AND PLAUSIBLE REASONING》 G. Polya vol.1. Induction and Analogy in Mathematics Princeton University Press 1954.

且在形式上也已尽善尽美。这里还没有说到，为早日把这批成果公诸于世，在时间上出现的紧迫。在书中极可能存在尚未发现的疏漏或笔误，甚至在局部上还可能存在问题，以及在文字叙述、结构安排上的粗陋。我想这些在广大读者的帮助下，都会一一被发现并得到纠正。

至于谈到对本书如出现不同的意见，那则完全是自然而且在预料之中的。你看微积分理论、极限论、数学基础论、…、天体学说、地壳学说、生物遗传学说、…、相对论、量子论、基本粒子论、…哪一个不是已辩论了几十年、上百年、几百年？这些辩论至今仍未旗偃鼓息，有的甚至还呈现方兴未艾之势。事实证明，不同学派、不同观点间实事求是的、平等的学术讨论，符合科学认识的规律，是科学认识发展的强大推动力，它既是科学事业兴旺发达的表现，又是形成科学事业兴旺发达局面的必要条件。在本书行将问世之际，完全可以预料每一个来参加讨论这本书的海内外专家、学者、广大的数学爱好者，必定会同意并实行著名的大数学家里查德·库朗 (Richard Courant)，1962年纪念希尔伯特(D. Hilbert)诞辰百年之际，在哥廷根演说中的警句："我们必须把数学当作科学长河中的一个统一和有生命的支流加以爱护，注以力量，不使它湮没在河滩中。"[1]如果在这问题上都会迟疑，那么看看这个事实吧，一个科学理论从其发端到比较成熟，往往要经历几十年、几百年的时间，跋涉异常曲折艰险的路途。世上理论和学说产生本就如此稀少，真要破土而出，更会百般艰难。而一个学说和理论，其在人类进步事业中往往起着非常巨大的作用。

人类文明的发展，在各个历史阶段与各类型理论的相互作用和反作用，是个非常重要、庞大、复杂的问题体系。在向G氏猜想等极为困难问题的挺进中，作者想到的是，既然在一定历史条件下，即使被认为是最可靠的证明了的结论，都只具有相对意义，人类只取得相对真理的认识，当然不是、也不可能在某种完全正确的终极理论指导下才生活、才发展 才去建设美好的世界。事实上人类的社会生活和科学事业却从未停止过自己前进的步伐，在今天更呈现一派生机勃勃、蒸蒸日上的景象。这一基本的事实不是就告诉我们：相对真理并不仅处于永远受检验的地位，只要思维一俟获得相对真理范畴的认识，它就立即和实际上与其应用相结合，就必然产生物质的力量，具体为人类贡献利益。而在解决那些极为困难目标时所产生的一切有价值的思维成果，都应受到高度的重视、扶植和提高，虽然它们还不是困难目标解决的本身。让每一萌动的种子都绽出鲜艳、芬芳的花朵；让每一个认识上的领先，都迅速转化为现实的领先。

还应该说明的是，在完成本书主要思想的过程中，作者并没有阅读过任何专门或比较专门的数论书籍，就是若干年前在大学、中学所获得的高等数学和初等数学的知识，也随着岁月的偷移在记忆中淡漠。这些知识只是作为潜知，在闪电般的思维中如萊塞光在形成时受到的激发，而成为直觉思维的原料。后来阅读的不多书籍，也仅是为借鉴，以使本书的叙述方式更符合读者的习惯，并为本书里每一历史上曾被如此艰难研究过的问题，提供背景材料。所以在本书自然形成这样的界线：除引用的不多的有关历史背景方面的材料，有关初等、高等数学的知识，其余都是作者独自劳动的成果。本书尽量指出有关材料的来源，虽然其中有些来自教科书和某处的，还一时查不到确切的出处。

当然人们并不会计较作者没有在本书出现的，所有杰出、伟大科学家的姓名前，都冠以相当的称呼和评价性的说明。而要全面、确切地做到这点，也非易事。但不管加上与否，作者对他们在人类进步事业上所作出的辉照日月的业绩，对他们为科学献身的高尚精神和情

---

〔1〕《希尔伯特》 康斯坦西·瑞德著　袁向东　李文林译　上海科学技术出版社 1982年6月第1版 P2

操，都一样抱着深深的崇敬和怀念之情。

本书并不仅以纯粹数学形式呈现在读者面前，它还涉及到哲学、逻辑学和科学方法论。由于对对象的把握还存在定性的操作型的方面，而“形”的概念在书中又如此突出，读者必会理解本书有较多文字出现的自然现象。由于各应用源于同一理论基础，该理论作为各应用的条件而多次出现，则也是可以理解的。

作者要感谢王长虹先生为本书提供过资料，要感谢他对本书的整理和问世所作的努力。还应指出，在读者中，是他第一个认识到本书具有开拓性的意义和重要价值。

不管现在世界数学界对数学基础问题争论得多么热烈，在数学前进的道路上还荆棘丛生，也不管整个数论的研究现在尚处于相对停滞阶段，但人类对客观规律包括数学对象认识的能动性却无法抑止，人类对客观真理包括数学规律的认识能力永无止境。从自己设置的限制中，从思维为自己造成的偏见中解脱出来，在我们面前呈现的将是海阔天空，一片阳光灿烂。

数学在物理、化学、生物、工程技术、…乃至社会科学领域所取得的伟大胜利，从最基本方面鼓舞我们奋勇前进。希尔伯特1930年在哥尼斯堡著名演说中，这句充满乐观进取精神的警句，将永久地在我们的耳畔回荡：

“Wir müssen wissen. wir merden wissen”.

“我们必须知道。我们必将知道。”[1]

---

〔1〕《希尔伯特》 康斯坦西·瑞德著 袁向东 李文林译 上海科学技术出版社 1982年6月第1版·P276

目　录

附　　表、　　图

第一章　合数标识论的建立

§1．合数标识论的几块基石

翻开本书的目录就可以发现，作者在这里所要研究的课题都只和自然数有关。素数、合数也都属于自然数。

确凿的历史资料告诉我们，人类在远古时代出于对收获成果的计数，对食物等平均分配的需要，已大量、频繁地与正整数（自然数）打起交道。对人类可以这么说，再没有任何其他数比整数更为自己所熟悉。整数反映了现实世界中最基本、最普遍、最重要的一大类数的性质。

正因为如此，数学中很早就形成专门研究整数性质和相互关系的学科——数论。我们知道数论是数学中两个最古老的分支之一，而另一分支则是几何学。实际上，初等数论基础的大部分，早在古希腊欧几里得(Euclid)不朽的《几何原本》中就已确立，这个时间大约在公元前320年。希腊文中的 arithmos 是指数，而类似的 arithmetica 甚至迟至17世纪还是指数论，数和数论的历史几乎同样悠久。中国历史有文字记载的，包括了中国古代数学家对数论所作的极其光辉的贡献，至于现代的则更不消去说。但对数论的重要性，我们恐怕迄今还没认识完全。

也正因为如此，德国数学之王高斯(Gauss，Carl Friedrich, 1777～1855）把数论置于科学之巅，他指出："数学是科学的皇后，而数论是数学的皇后"。这句著名的话引自大数学家R•柯朗（R．Courant）和H•罗宾（H．Robbins）的名著《数学是什么？》[1]，它对我们认识数论在数学和科学中的地位，数论和数学、科学的关系甚关紧要。

世界上许多大数学家都曾把自己的热情和智慧，甚至毕生的精力，都无私地奉献给这位仙姿绰约的数学皇后。这不仅是因为数论在理论和实践上表现出的一般意义下的重要性，也不仅是因为数论和其他数学分支之间有着深刻的联系，往往是在数论中首先提出的概念和方法也在其他数学分支显示出基本的重要意义，数论自身的发展推动着一大片数学分支乃至整个数学的发展。而且还因为"它有简单的基本定律，它有直接了当的概念，它有纯正的真理；"(希尔伯特语)，它是"一座仓库，贮藏着用之不尽的能引起人们兴趣的真理。"(高斯语)，它是"一幢出奇的美丽又和谐的大厦。"(希尔伯特语)[2]。这门学科古老又年青，层出不穷的新问题使数论充满了青春的血液和活力。数论王国里到处耸立的猜想，形式简单，证明却极其困难，足可激起人们神秘之感和追逐之心。在这里自可充分表现人类认识客观真理的英雄主义精神，他们的勇敢和智慧、坚韧和能力。无怪乎数论能如此强烈地吸引着几乎所有杰出数学家的想象力，它的不可抗拒的魅力虽经数千年而不衰。

但是仅从数学的角度来解释数论的魅力、用数学的经纬线来确定数论的方位，恐怕还是不

---

〔1〕 R. Courant and H. Robbins：《WHAT IS MATHEMATICS？》Oxford University Press. New York. 1964.

〔2〕 转引自《希尔伯特》康斯坦西·瑞德著　袁向东　李文林译　上海科学技术出版社　1982年6月第1版　P52

够的，而应该从广阔得多的角度来观察并认识其重要性。譬如现在全世界都注视着日本这个岛国，分析着它经济发展得这么快的原因。是资源丰富?地域广阔?…看来都不是。比较一致的意见是认为：主要地因为它有个贯彻始终、严密又严格的教育体系和制度，培养了科学技术、经济管理高素质的人材。历史告诉我们，经"明治维新"后的日本，将发展教育摆在社会发展的首位，对教育制度、内容、方法进行脱胎换骨的改革，教育所得经费居各部(省)所得之首。但从日本人自己看来，他们的教育却存在要害的问题，主要表现在教育出来的学生在思想方法上落后于西方。这正是和日本相比，"在过去500年间，西方国家的发展，特别在自然科学方面发展异常惊人"的原因之所在。日本广中平裕在《学问之发现》中谈到，与这现象密切有关的东、西方思想方法上的一个重要差异：假设是目标的前提。就假设而言，西方人与日本人大不相同，西方人偏重于先立"假设"，然后进行演绎。当你问到一些美国学生在研究什么，他们往往首先谈到各自所持的各种假设，而日本学生对此的回答则大部分属于在努力学习什么。美国学生的基本思路是首先确立假设，然后试做各种演绎，如果行不通，再改变最初的假设。[1]日本人大的创造发现少，恐怕与他们不善此道有关。长期以来他们以引进、综合、消化、改进外国的科学技术为主。这种思想方法对他们一个阶段经济的不利影响尚不明显，而且还表现出相当的适应性，但在将来更为激烈的竞争中则这种不利会逐渐明显起来。

据近年各国访日学者的印象，现在日本也在加强基础科学的研究，注重抓自己的创造和发现。可以想象，在这过程里，他们的思想方法也会随之改变，并缩短自己与西方的差距。其直接的起因是，日本已发现能够用来转化为自己应用成果的外国东西不多了，以后要多靠自己创。要自己创，就要加强基础理论研究，要有一个现代的科学思想方法。

我们知道创造发现决不是单纯演绎推理的结果，更决不是死记硬背、生搬硬套可以奏效的，而要依靠在直觉指引下的构造思维，要依靠大胆地提出合理的假设、猜想，然后才是演绎推理、证明、检验的问题。那么习惯于用这种方法来思考的民族，其创造发明的数量多、质量高就是件很自然的事情。翻一下自然科学史吧，情况难道不正是这样?而数论呢，这真可谓假设、猜想最为密集之地，它以提出猜想的斧子在荆棘丛生的荒野开辟出新路，通过假设筑起高耸入云的理论大厦。学习数论、研究数论，也就是学习、研究、树立这种先进的科学思维方法的具体可行的途径。西方长期推崇数论，为这种先进思想方法的形成、树立、发展提供肥沃的土壤。西方许多大数学家这样重视数论，我看和数论中这种向未知领域勇猛推进的思想方法有关，而这种思想方法又与一个民族征服自然、改造自然的勇气、魄力，他们自然科学的蓬勃发展有关。

现在不是提倡多维的价值观么？当你从某方位认识到对象存在某种价值，如果换一方位或许发现对象具有你原先意想不到的巨大得多、深远得多的价值。这种情况时有出现。

照一般的划分，数论分为初等数论、代数数论、解析数论、几何数论。虽然在近代，后三种数论新分支强劲崛起，但作者并不认为初等数论已是强弩之末，失却了自己进攻的锋芒。

在考虑采用哪种形式的数论来解决某问题时，我们往往忽视数学方法在学科中的转移规律：在研究数学中比较复杂的数和形之间联系的比较高级形式的时候，可以采用研究数学中比较简单的数和形之间联系的比较低级形式的方法。代数、几何、分析的概念和方法，原则可以应用于一切数学领域。如只倾向于采取新的数论形式，而弃初等数论而不顾，这样做至少是道理不充分的。

---

〔1〕 其意转引自《西方人分析问题的方法比东方人先进》《文摘报》 1987年12月6日 第475期·第四版