實驗設計與統計方法

實驗設計與統計方法

沈有乾著

中華書局印行

民國三十五年六月發行
民國三十五年六月初版

大學用書 實驗設計與統計方法（全一冊）

◎定價國幣四元五角

（郵運匯費另加）

著者 沈有乾

發行人 姚戟楣
中華書局有限公司代表

印刷者 中華書局永寧印刷廠
上海澳門路四六九號

發行處 各埠中華書局

（一三一一）

序

此書內容大部份卽是作者在哈佛大學教育研究院所講"教育測量21"一學程之材料，介紹實驗設計與結果處理之原理及方法，俾從事於實驗研究者有所適從．雖所引實例多屬心理學與教育學之範圍，惟工具之應用不必受原料之拘束，所論當可適用於生物科學與社會科學上多種研究．

統計學之初步概念及方法，如中心量數，參差量數與相關量數之意義及計算，在通行書籍中已有詳細之討論，無另行說明之必要．是書所注意者爲"重要性之考驗"，採用倫敦大學費學教授之方法最多．

數理之作向尙簡略，治實用之學者苦之．著書者認爲"顯然"之理，讀者每有思索終日而不得其解者．是書採用座談對話體裁，庶可隨處質疑析難，寧冒蕪雜之譏，希免晦澀云爾．

沈有乾　一九四一年二月．

實驗設計與統計

目　　錄

附　　錄

附　表

類東西而外，可以用機遇數目表，比較省事．

辛　我還有一個疑問．我們既然可以考驗虛無假設，根據考驗的結果承認或否認那位太太的宣言，爲甚麼不能直接考驗那宣言？

施　除非她宣言有萬無一失的辨別力，她的宣言不够明確，不能作推算可能結果的根據，所以有另立虛無假設的必要．

焦　爲甚麼常見的研究報告並不把虛無假設下的可能結果推算表列出來，卻總是憑所謂標準誤差，考驗實得結果的重要性？

施　這問題留待下次與有關係的許多問題一起討論罷．今天的討論成績很好，實驗的基本原理可以說都談到了．要不要請哪一位把要點列舉一下？

羅　我想今天的討論可以用三點概括起來：(1)實驗設計的第一步是提出一條明確的假設，從這假設可以推算所有的可能結果．(2)把虛無假設下的可能結果算出，做考驗實得結果的根據，實得結果在某種範圍內認爲重要，應當預先規定．(3)足以擾亂實驗結果的各種因子，應當斟酌實際情形，加以控制或機遇化．

第二次座談 樣組分配問題 次數與比率的考驗

施 不論在實驗或別種觀察,要考驗結果的重要性,必需把虛無假設下的可能結果分配情形推算清楚. 今天我們繼續討論怎樣推算虛無假設下的可能結果.

焦 據我所知,多數研究報告似乎並不推算可能結果的分配情形,他們只是憑了呆版的公式,計算一個標準誤差,決定結果的重要性.

施 我希望今天的討論可以貫通這兩種表面上完全不同的方法.

束 上次的例子限於八杯茶,其樣組分配的推算比較簡單.如用八十杯或八百杯,我們就不能也不必用上次那種方法,把整個樣組分配完全推算出來.

羅 爲甚麼可能結果的分配稱爲"樣組分配"?

施 請束君把"樣組分配"與有關係的統計術語先說明一下.

束 "樣組"是一組"樣子"(sample),與"宇宙"(universe 或 population)相對而言,宇宙指全體,樣組指其一部份.有些宇宙是有限的,例如"二十九年度國立大學一年級生的年齡",可以普遍地加以觀察或調查.但是範圍太大的宇宙,即使是有限的,實際上也只可以觀察其一部份.至於無限的宇宙,當然觀察不盡,調查不完.宇宙又可以分爲實在的與假設的,剛才所舉"二十九年度國立大學一年級生的年齡"那例子,當然是一個實在的宇宙,但如考慮投擲硬幣的可能結果,那便是一個假設的宇宙了.假設的宇宙當然不能實際觀察,也用不着實地抽取樣子,其情形可以根據假設的條件推算.比方我們要知道投擲八個硬幣的可能結果,宇宙是無數硬幣,假設的分配情形是一半正面,一半反面,假設的取樣條件是八個一組,全憑機遇,所謂"樣組分配"(sampling distribution),便是那些八個一組的許多樣組所做成的一個分配,完全可以用二項展開式決定.

施 這兒有一個例子:有 429,440 個兒童,其中 221,023 個是男的,

208,417 個是女的.虛無假設下的宇宙是男女各佔一半.現在要考驗這 429,440 個觀察與虛無假設有沒有重要的不符合處.

焦 這個樣組分配應當是可以從 $(.5+.5)^{429,440}$ 推算的.

束 我可不願意担任這個好差司.

施 我們的主要目的是研究出一種簡便的方法,可以適用於這一類的問題.我想請束君先把二項分配的大概說明一下.

束 假定宇宙里有二種東西,佔 p 與 q 之比,現在從宇宙隨機取樣,每 n 個一組,樣組分配便是一個二項分配 (binomial distribution),可以照

$$(p+q)^n$$

的展開推算.

辛 這種宇宙似乎不多.比方硬幣有兩面,當然適用,骰子有六面,能適用嗎?

羅 當然適用,六面可以分爲"一點"與"非一點"兩種,或"二點"與"非二點"兩種.

束 讓我把剛才的話修正一下.假定宇宙里某種東西佔全體的 p 部份,其餘一切東西併起來佔 q 部份,隨機抽取 n 件東西做一組樣子,那末樣組分配可從二項展開求得:

$$(p+q)^n=q^n+npq^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}p^2q^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot3}p^3q^{n-3}+\cdots$$

那就是說:全組中有 0 件某種東西的樣組佔所有的樣組中的 q^n 部份,

全組中有 1 件某種東西的樣組佔所有的樣組中的 npq^{n-1} 部份,

全組中有 2 件某種東西的樣組佔所有的樣組中的 $\frac{n(n-1)}{2}p^2q^{n-2}$ 部份,

全組中有 3 件某種東西的樣組佔所有的樣組中的 $\frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot3}p^3q^{n-3}$ 部份,

⋮

全組中有 n 件某種東西的樣組佔所有的樣組中的 p^n 部份.

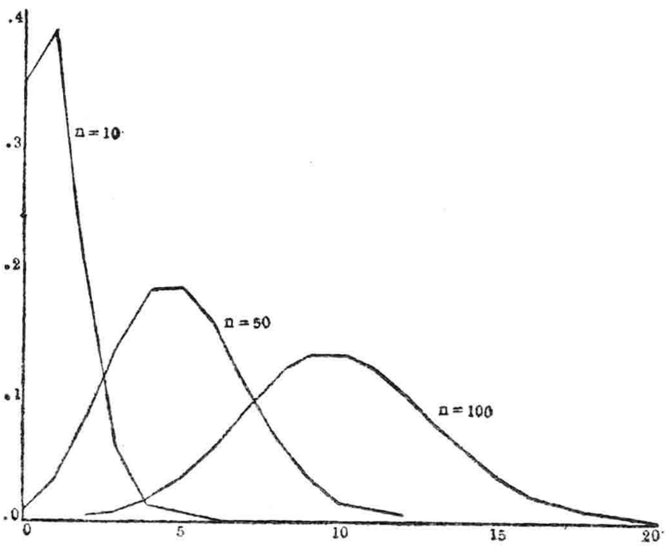
焦　一個明顯的推論是所有的樣組可以依照組中某種東西的件數分為 $n+1$ 類.

辛　再一個推論是，如 p 與 q 相等，那分配一定是對稱的.

焦　聽說 n 愈大則二項分配愈近似常態分配. 這結論大概是眞的，我可不知道怎樣推求.

羅　這結論大概限於 p 與 q 相等的條件.

東　倒並不. 說起來好像有一點奇怪，但樣組增大確乎可以減低二項分配的偏斜程度. 這本俞耳(G. U. Yule)與肯特耳(M. G. Kendall)合著的統計學(An Introduction to the Theory of Statistics)有一張很好的圖:



在這三個分配，p 都是 .1，q 都是 .9，n 等於10的時候偏斜得很利害，n 等於50的時候就好得多，n 等於 100 的時候差不多不能和對稱分配辨別. 常態分配的公式本來可以從二項分配的公式求得，俞耳這本書里就有一段證明.

羅　現在既要澈底研究二項分配，我先要問：一切次數分配是用甚

麼方法描寫敍述的?

束 一切次數分配可以從四方面研究,得到以下四種量數:(1)中心量數(measure of central tendency),(2)參差量數(measure of dispersion or variability),(3)偏斜量數(measure of skewness),(4)峻峭量數(measure of kurtosis).中心量數指示次數分配的位置,有很多種,但最重要的是算術平均數(arithmetic mean),簡稱平均數(mean).參差量數指示次數分配的展開寬窄,也不止一種,但最有用的是均方差(variance)或標準差(standard deviation).這些大概是各位早已知道的.

辛 均方差與標準差怎樣分別?

束 標準差是均方差的方根,均方差從前不大用,最近才常見於刊物.

羅 但中心量數與參差量數並不會告訴我們次數分配的形態.

束 次數分配的形態完全靠偏斜量數與峻峭量數指示.最常用的是皮耳生(Karl Pearson)教授的 β_1 與 β_2,但我們也可以採用費學教授的 γ_1 與 γ_2,四個都是抽象的數值,不像中心量數與參差量數那樣跟着所用的單位而不同.

$$\beta_1=\frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}=\frac{\left(\frac{\Sigma x^3}{N}\right)^2}{\left(\frac{\Sigma x^2}{N}\right)^3}\qquad\qquad \gamma_1=\frac{\kappa_3}{\sqrt{\kappa_2^3}}=\frac{\frac{\Sigma x^3}{N}}{\left(\frac{\Sigma x^2}{N}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

因爲 β_1 總是正的,不會是負的,所以只能指示偏斜的程度,並不指示偏斜的方向.γ_1 隨着次數分配的偏斜方向而有正負的分別.如 γ_1 是正的,高峯在左,分配稱爲"向右偏斜"(skew to the right),或"正的偏斜"(positively skew).如 γ_1 是負的,高峯在右,稱爲"向左偏斜"(skew to the left),或"負的偏斜"(negatively skew).

$$\beta_2=\frac{\mu_4}{\mu_2^2}=\frac{\frac{\Sigma x^4}{N}}{\left(\frac{\Sigma x^2}{N}\right)^2}\qquad\qquad \gamma_2=\frac{\kappa_4}{\kappa_2^2}=\frac{\frac{\Sigma x^4}{N}}{\left(\frac{\Sigma x^2}{N}\right)^2}-3$$

如 $\beta_2>3$,卽 γ_2 是正的，則分配的形態是“峻峯的”(leptokurtic). 如 $\beta_2<3$,卽 γ_2 是負的,則分配的形態是“平頂的”(platykurtic).如 $\beta_2=3$,卽 γ_2 恰是零,則分配的峻峭度是“適中的”(mesokurtic).常態分配是對稱而有適中的峻峭度的.

羅　兩個 γ 與兩個 β 沒有多大分別,但兩個 γ 似乎比較簡潔些.常態分配的兩個 γ 都是零,二項分配的兩個 γ 怎樣求算?

辛　在解決這個大問題之前,恕我插入一個小問題.爲甚麼 β 的公式里用 μ,γ 的公式里用 κ,μ 和 κ 究竟怎樣分別?

柬　μ 的定義是一貫的:

$$\mu_1=\frac{\Sigma x}{N}$$

$$\mu_2=\frac{\Sigma x^2}{N}$$

$$\mu_3=\frac{\Sigma x^3}{N}$$

$$\mu_4=\frac{\Sigma x^4}{N}$$

所以可以用一個普遍的公式概括起來,就是:

$$\mu_i=\frac{\Sigma x^i}{N}$$

幾個 κ 可不一致了:

$$\kappa_2=\mu_2$$

$$\kappa_3=\mu_3$$

但

$$\kappa_4=\mu_4-3\mu_2^2$$

κ_1 和 μ_1 也完全不同，κ_1 就是平均數,而 μ_1 卻是零:

$$\mu_1=\frac{\Sigma x}{N}=0$$

$$\kappa_1=\frac{\Sigma X}{N}=M$$

羅　可是從 κ 產生的 γ 比了從 μ 產生的 β 簡潔.

施　現在我們所討論的是理論的分配,宇宙的分配.樣組分配是所

有的可能樣組之間的分配，仍是宇宙一樣組的宇宙一的分配，並不是任何一個樣組內部的分配．在宇宙的分配，皮耳生教授的 moments 系統，即是那些 μ，與費學教授的 cumulants 系統，即是那些 κ，並無眞正重要的分別．用於一個樣組的內部分配，這兩個系統便大大的不同了．Moments 在樣組與在宇宙是不加分別的，cumulants 在宇宙是剛才講的那些 κ，在樣組是另外些 κ，κ 與 κ 的定義並不一樣，初看似乎自討麻煩．但樣組的 κ 正相當於宇宙的 κ，樣組的 μ 與宇宙的 μ 倒有出入．這一層以後還須慢慢地詳細討論，現在先向各位提到．

束　我想這塊黑版够大，可以把二項分配的四個 μ 或者四個 κ 都求出來．第一步是寫出一張表：

X	f	fX	fX^2	fX^3	fX^4
0	q^n	0	0	………	………
1	npq^{n-1}	npq^{n-1}	npq^{n-1}	………	………
2	$\frac{n(n-1)}{2}p^2q^{n-2}$	$n(n-1)p^2q^{n-2}$	$2n(n-1)p^2q^{n-2}$	………	………
3	………	………	………	………	………
4	………	………	………	………	………
⋮	⋮	⋮	⋮		

施　這樣寫法恐怕黑版不够大．爲甚麼不把各項用一個普通公式寫出來？第一列 X 就用 X，或用小寫 x，比較方便些，這小寫 x 仍是從零點出發，並不從平均數出發．第二列的 f 可以寫成

$$\frac{n!}{x!(n-x)!}p^xq^{n-x}$$

用 0，1，2，3 等替代式中 x，便是原來的 q^n，npq^{n-1} 等各項．第三列的 fX 可以寫成

$$\frac{x\,n!}{x!(n-x)!}p^xq^{n-x}$$

其餘 fX^2，fX^3，fX^4 各列寫成

$$\frac{x^2n!}{x!(n-x)!}p^xq^{n-x}\qquad \frac{x^3n!}{x!(n-x)!}p^xq^{n-x}\qquad \frac{x^4n!}{x!(n-x)!}p^xq^{n-x}$$

束　謝謝,這樣省事得多了.現在就可以寫下:

$$\mu'_1=\Sigma\left[\frac{x\,n!}{x!(n-x)!}p^xq^{n-x}\right]$$

$$\mu'_2=\Sigma\left[\frac{x^2n!}{x!(n-x)!}p^xq^{n-x}\right]$$

$$\mu'_3=\Sigma\left[\frac{x^3n!}{x!(n-x)!}p^xq^{n-x}\right]$$

$$\mu'_4=\Sigma\left[\frac{x^4n!}{x!(n-x)!}p^xq^{n-x}\right]$$

羅　μ'的定義想來是和μ差不多的，只是不用從平均數算起的差數,而用原有的數,就是不用小寫的x,而用大寫的X,對不對?

束　恕我忘了先下μ'的定義,但羅君講的一點不錯.

辛　這四個公式不是每個應當被總次數除一下嗎?

焦　但二項分配中的次數是相對的次數，總次數是一,因爲$p+q$是一,$(p+q)^n$也是一.

束　現在先求μ'_1,也就是κ_1,也就是平均數:

$$\mu'_1=\kappa_1=M=\Sigma\left[\frac{x\,n!}{x!(n-x)!}p^xq^{n-x}\right]=\Sigma\left[\frac{n!}{(x-1)!(n-x)!}p^xq^{n-x}\right]$$

$$=np\Sigma\left[\frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!}p^{x-1}q^{n-x}\right]=np(p+q)^{n-1}=np$$

羅　末了第二步妙極了.

束　現在求μ'_2,先把x^2分爲$x(x-1)$和x兩部份,所以:

$$\mu'_2=\Sigma\left[\frac{x(x-1)n!}{x!(n-x)!}p^xq^{n-x}+\frac{x\,n!}{x!(n-x)!}p^nq^{x-x}\right]$$

$$=\Sigma\left[\frac{n!}{(x-2)!(n-x)!}p^xq^{n-x}\right]+np$$

$$=n(n-1)p^2\Sigma\left[\frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!}p^{x-2}q^{n-x}\right]+np$$

$$=n(n-1)p^2(p+q)^{n-2}+np=n(n-1)p^2+np$$

施　先把μ'_3與μ'_4一起求出之後,再算μ_2,μ_3,μ_4吧.

束　求μ'_3之先,那x^3要分做三部份:

$$x^3=x(x-1)(x-2)+3x(x-1)+x$$

$$\mu'_3=\Sigma\left[\frac{x(x-1)(x-2)n!}{x!(n-x)!}+\frac{3x(x-1)n!}{x!(n-x)!}+\frac{x\ n!}{x!(n-x)!}\right]p^x q^{n-x}$$

後面兩部份剛才已經算出，

$$\Sigma\left[\frac{x\ n!}{x!(n-x)!}p^x q^{n-x}\right]=np$$

$$\Sigma\left[\frac{3x(x-1)n!}{x!(n-x)!}p^x q^{n-x}\right]=3n(n-1)p^2$$

只有第一部份尚待簡化：

$$\Sigma\left[\frac{x(x-1)(x-2)n!}{x!(n-x)!}p^x q^{n-x}\right]=\Sigma\left[\frac{n!}{(x-3)!(n-x)!}p^x q^{n-x}\right]$$

$$=n(n-1)(n-2)p^3\,\Sigma\left[\frac{(n-3)!}{(x-3)!(n-x)!}p^{x-3}q^{n-x}\right]$$

$$=n(n-1)(n-2)p^3(p+q)^{n-3}=n(n-1)(n-2)p^3$$

所以，三部份加起來，

$$\mu'_3=n(n-1)(n-2)p^3+3n(n-1)p^2+np$$

現在求 μ'_4，先把 x^4 分為四部份：

$$x^4=x(x-1)(x-2)(x-3)+6x(x-1)(x-2)+7x(x-1)+x$$

$$\mu'_4=\Sigma\left[\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)n!}{x!(n-x)!}+\frac{6x(x-1)(x-2)n!}{x!(n-x)!}+\frac{7x(x-1)n!}{x!(n-x)!}+\frac{xn!}{x!(n-x)!}\right]p^x q^{n-x}$$

後面的三部都已經算出，最後那部份是：　np

第三部份是：　$7n(n-1)p^2$

第二部份是：　$6n(n-1)(n-2)p^3$

第一部份是：　$\Sigma\left[\frac{n!}{(x-4)!(n-x)!}p^x q^{n-x}\right]$

$$=n(n-1)(n-2)(n-3)p^4\,\Sigma\left[\frac{(n-4)!}{(x-4)!(n-x)!}p^{x-4}q^{n-x}\right]$$

$$=n(n-1)(n-2)(n-3)p^4(p+q)^{n-4}$$

$$=n(n-1)(n-2)(n-3)p^4$$

四部份加起來：

$$\mu'_4=n(n-1)(n-2)(n-3)p^4+6n(n-1)(n-2)p^3+7n(n-1)p^2+np$$

羅 這推算的簡單大出乎意料之外.

束 從 μ' 算 μ,照這幾個公式就行:

$$\mu_2=\mu'_2-\mu'^2_1$$

$$\mu_3=\mu'_3-3\mu'_2\mu'_1+2\mu'^3_1$$

$$\mu_4=\mu'_4-4\mu'_3\mu'_1+6\mu'_2\mu'^2_1-3\mu'^4_1$$

μ_2 就是 κ_2,也就是均方差:

$$\mu_2=\kappa_2=\sigma^2=n(n-1)p^2+np-n^2p^2=(n^2-n)p^2+np-n^2p^2$$

$$=np-np^2=np(1-p)=npq$$

$$\mu_3=\kappa_3=n(n-1)(n-2)p^3+3n(n-1)p^2+np-3n^2(n-1)p^3$$

$$-3n^2p^2+2n^3p^3=2np^3-3np^2+np=np[2p^2-3p+1]$$

$$=np(1-p)(1-2p)=npq(q-p)$$

$$\mu_4=n(n-1)(n-2)(n-3)p^4+6n(n-1)(n-2)p^3+7n(n-1)p^2$$

$$+np-4n^2(n-1)(n-2)p^4-12n^2(n-1)p^3-4n^2p^2$$

$$+6n^3(n-1)p^4+6n^3p^3-3n^4p^4$$

$$=(3n^2-6n)p^4-(6n^2-12n)p^3+(3n^2-7n)p^2+np$$

$$=np[1-p-6p+6p^2+6p^2-6p^3+3np-3np^2-3np^2+3np^3]$$

$$=npq[1-6p+6p^2+3np-3np^2]$$

$$=npq[1-6pq+3npq]$$

$$=npq(1-6pq)+3n^2p^2q^2$$

$$\kappa_4=\mu_4-3\mu_2^2=npq(1-6pq)$$

$$\beta_1=\frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}=\frac{n^2p^2q^2(q-p)^2}{n^3p^3q^3}=\frac{(q-p)^2}{npq}$$

$$\gamma_1=\frac{q-p}{\sqrt{npq}}$$

$$\beta_2=\frac{\mu_4}{\mu_2^2}=\frac{npq(1-6pq)+3n^2p^2q^2}{n^2p^2q^2}=\frac{1-6pq}{npq}+3$$

$$\gamma_2=\frac{1-6pq}{npq}$$

羅 現在大功告成,我們可以把二項分配和常態分配好好比較一

下.

束　讓我把這兩個分配的 κ 與 γ 排列起來:

	二項分配	常態分配
κ_1	np	M
κ_2	npq	σ^2
κ_3	$npq(q-p)$	0
κ_4	$npq(1-6pq)$	0
γ_1	$\dfrac{q-p}{\sqrt{npq}}$	0
γ_2	$\dfrac{1-6pq}{npq}$	0

二項分配的 γ_1 與 γ_2 都有 n 在分母里頭,所以 n 愈大,γ_1 與 γ_2 愈小,愈近似常態分配.

辛　但是我們並未證明常態分配的 γ_1 與 γ_2 都等於零.

焦　我因爲常常聽見常態分配是對稱而有適中的峻峭度的,所以並沒有想到需要證明.

束　計算常態分配的 β_1 與 β_2 或 γ_1 與 γ_2 要用積分方法,懂得積分的人自己求起來很簡單,不懂積分的人又無從說明.

羅　微分還懂得一點,積分只得敬謝不敏了.

焦　在施先生提出的實例,n 大到四十二萬多,借用常態分配應當沒有問題.

羅　虛無假設下的宇宙是男女各佔一半,所以 p 與 q 都是二分之一,兒童的總數是四十二萬九千四百四十,就是 n.這當然並不是宇宙里的兒童的總數,是每個樣組的兒童總數,樣組分配是二項分配,其公式是:

$$(.5+.5)^{429,440}$$

這二項分配不能也不必完全寫出,但我們可以知道平均數是:

$$np=214,720$$