普通高等教育"十五"国家级规划教材

（高职高专教育）

概率论与数理统计

第二版

金炳陶　编著

高等教育出版社

普通高等教育“十五”国家级规划教材

（高职高专教育）

概率论与数理统计

（第二版）

金炳陶　编著

高等教育出版社

内容提要

本书是普通高等教育“十五”国家级规划教材，是以教育部最新制定的《高职高专教育概率论与数理统计课程教学基本要求》为依据编写的。本书在第一版基础上，从工科教学的特点出发，在内容编排上突出重点，分散难点；在理论方面坚持以必需够用为度，并注意与实践相结合。

全书共分九章，内容包括随机事件与概率计算，一维随机变量及其分布，多维随机变量及其分布，随机变量的数字特征，大数定律与中心极限定理，样本与统计量分布，参数估计，假设检验，方差分析与回归分析等。

本书可作为高等专科学校、高等职业学校、成人高等学校和本科院校举办的二级职业技术学院工科各专业数学基础课教材，也可供管理专业、财经专业及非数学类理科专业的学生和工程技术人员学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/金炳陶编著．—2版．—北京：
高等教育出版社，2004.5(2005重印)
ISBN 7-04-014705-X

Ⅰ．概... Ⅱ．金... Ⅲ．①概率论-高等学校：技术学校-教材②数理统计-高等学校：技术学校-教材
Ⅳ．O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第012772号

策划编辑 蒋 青 **责任编辑** 杨芝馨 **封面设计** 杨立新 **责任绘图** 吴文信
版式设计 金 伟 **责任校对** 尤 静 **责任印制** 陈伟光

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	北京蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京市白帆印务有限公司		
		版　　次	2000年8月第1版
开　　本	787×1092 1/16		2004年5月第2版
印　　张	12.25	**印　　次**	2005年3月第3次印刷
字　　数	290 000	**定　　价**	13.40元

物料号　14705-00

第一版前言

本书是高等专科教育、高等职业教育、成人高等教育(以下简称高职高专教育)工科类专业的基础课教材之一。本书依据教育部最新制定的《高职高专教育概率论与数理统计课程教学基本要求》,结合作者长期从事本学科科研和教学的体会编写而成,旨在培养学生运用概率统计独特的思维方式以及分析问题和解决问题的能力,并为后续课程的学习和未来的工作实践,提供必备的随机数学基础。

全书从高职高专教育及其工科教学的特点出发,取材与编排紧扣教学基本要求,坚持必需够用为度,遵循由易到难逐步加深的原则,突出重点,分散难点,强化应用,并注意理论与实际的结合。教材的概率论部分以随机变量及其分布为主体,对分布的讨论一维、多维单独成章,并在多维场合充分顾及引入统计方法的需要。而包括矩在内的数字特征,又将一维、多维汇集在随机变量函数的数学期望概念之下统一处理。数理统计侧重介绍参数估计、假设检验中的基本内容,对具体的统计方法,重点介绍在科技领域中有着广泛应用的分布拟合与检验、一元回归分析及单因素方差分析。此外,对于与工科专业有较多联系且又体现概率统计独特思路的段落,逐一给出简要的辩证分析;对于在教材中先后出现又有内在联系的部分,适时加以归纳提炼;对于可能出现繁琐的纯理论推导之处,在保全学科体系以及“三基”内容落实的前提下进行适当删节,必要时指明参考文献;对于概率计算,除少量基本题外,多数例题与实际应用联系较为紧密,并充分揭示隐含于演算过程中的综合性技巧。所有这些将有利于启发学生积极思考,引导学生掌握教材要点,促进数学修养的提高。

书稿内容简明扼要,文字简详得当,特别适合于初学者阅读。例题求解强调思路分析,书写有序规范。习题大多与实际应用有关,数量充足,难易适中,其中少量习题作为正文补充而选入。书末给出了全部习题的答案或提示。教材中凡标有“*”号的部分,包括相应的例习题,可供教师选讲或有余力的学生课外阅读。按照从紧安排的原则,除标有“*”号部分外,本书所列基本内容可以在36学时内完成。建议概率论部分大致安排20学时,数理统计部分大致安排16学时。

由于编写所依据的教学基本要求有较宽的适用面,故本书作为基础课教材,对于工科以外的管理专业、财经专业以及非数学类的理科专业等也都适用。

本书由东南大学应用数学系陈浩球教授主审。陈教授以严谨的治学态度认真审查了书稿,提出了很多有价值的意见和建议,编者在此表示衷心的感谢。

由于编者水平所限,加上时间仓促,书中难免会有不当之处,敬请读者不吝赐教。

编者

2000年2月于南京

再版前言

本书首版在2000年出版发行以来，荣幸地被众多高职高专院校工科、财经、管理等专业选作教材。历经数年教学实践，得到广大读者的厚爱。对于关心和使用本书的师生以及提出宝贵意见与建议的读者表示衷心感谢。

我国高等教育正处在从精英教育向大众化教育过渡的变革时期，本书作为高职高专的基础课教材，理应主动适应当前教学实际。为此，遵照教育部高等教育司、高等教育出版社的安排，拟对首版作一次全面修订。

本次修订再版，在基本保留原有框架的前提下，适当紧缩篇幅、删减超纲内容、突出三基训练、强化实践应用，以服从于高职高专教育培养高等技术应用型专门人才的目标。修订中变动较大的有如下六个方面。

1. 将首版中的§3.6(若干重要分布及其临界值)移后并入§6.3(统计量及其分布)。这一合并不仅压缩了篇幅、减少了重复，而且使得蕴含其间的理论有所淡化，并与统计应用尽快结合，从而改善了理论与应用脱节的弊端。

2. 为突出重点、强调应用、便于不同专业的选择，把分散在首版§8.2及§8.3中的单侧假设检验抽出来单独成节。

3. 删去首版中带有*号超纲的大部分内容，而对于少量起着承上启下作用的有*号的段落，考虑到教学和阅读的方便仍予保留，但所占篇幅不多。

4. 为使读者尽快了解各章概貌，把握重点，每章末增加了一个概括该章基本概念及其相互联系、运算法则与常用公式等内容的概要。

5. 精简了例习题中少量偏重理论或计算甚繁的题目。对于某些综合性应用性例题，在示范求解之后给出了涉及思路分析、方法技巧等方面的简要评述，引导读者积极思考，正确规范解题。为方便教学，习题保持相对稳定，数量有减无增，难度有所降低。

6. 对于首版中某些段落的文字作了必要的改动，从而使得概念表述更为确切，行文更为流畅。同时对首版中遗留的疏漏作了订正。

承担本书审稿的是南京气象学院数学系吕纯濂教授。吕教授以其渊博学识，认真细致地审阅了再版书稿，并提出了很多中肯意见，在此表示真诚的谢意。

限于编者水平，书中难免会有错误和不妥，敬请读者批评指正。

三江学院金炳陶
2003年12月于南京

出版说明

为加强高职高专教育的教材建设工作,2000年教育部高等教育司颁发了《关于加强高职高专教育教材建设的若干意见》(教高司[2000]19号),提出了“力争经过5年的努力,编写、出版500本左右高职高专教育规划教材”的目标,并将高职高专教育规划教材的建设工作分为两步实施:先用2至3年时间,在继承原有教材建设成果的基础上,充分汲取近年来高职高专院校在探索培养高等技术应用性专门人才和教材建设方面取得的成功经验,解决好高职高专教育教材的有无问题;然后,再用2至3年的时间,在实施《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》立项研究的基础上,推出一批特色鲜明的高质量的高职高专教育教材。根据这一精神,有关院校和出版社从2000年秋季开始,积极组织编写和出版了一批“教育部高职高专规划教材”。这些高职高专规划教材是依据1999年教育部组织制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》(草案)和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》(草案)编写的,随着这些教材的陆续出版,基本上解决了高职高专教材的有无问题,完成了教育部高职高专规划教材建设工作的第一步。

2002年教育部确定了普通高等教育“十五”国家级教材规划选题,将高职高专教育规划教材纳入其中。“十五”国家级规划教材的建设将以“实施精品战略,抓好重点规划”为指导方针,重点抓好公共基础课、专业基础课和专业主干课教材的建设,特别要注意选择一部分原来基础较好的优秀教材进行修订使其逐步形成精品教材;同时还要扩大教材品种,实现教材系列配套,并处理好教材的统一性与多样化、基本教材与辅助教材、文字教材与软件教材的关系,在此基础上形成特色鲜明、一纲多本、优化配套的高职高专教育教材体系。

普通高等教育“十五”国家级规划教材(高职高专教育)适用于高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院、继续教育学院和民办高校使用。

教育部高等教育司

2002年11月30日

目 录

第 1 章

随机事件与概率计算

随机事件与它的概率是本课程的两个奠基性概念，所有与此有关的内容都是全书各章以及相关学科立论之本.

本章首先在扼要阐述概率统计研究对象的同时，给出了概率的定义、性质及其计算要点；然后从事件间的关系与运算入手，讨论概率运算的各种法则；最后引入事件的独立性概念以及相应的概率计算公式.

§1.1 随机试验与样本空间

1.1.1 随机现象及其统计规律性

人们在社会实践中经常会遇到这样一类现象，它们在给定条件下其结果能否发生是不可预言的. 例如，打靶练习中，正在进行的一次射击可否中靶以及可能命中的环数都是事先不能预料的；一批新产品投放市场是畅销还是滞销，经营者往往难以把握. 所有这些揭示的是条件与结果之间的非确定性联系，其数量规律无法用函数关系描述，这种现象统称为随机现象. 它与人们熟知的确定性现象有着本质的区别. 实践表明，随机现象在少数次观测中表现出结果的不确定性，然而在做大量重复的试验时，它却是有规律可循的. 例如，在某公交车站上候车的人数，对于某一固定时刻，往往是不确定的，但车站附近每一天行人流量的峰或谷，却有明显的规律性，公交公司将据此制定行车时刻、确定班次密度，以保证居民出行的方便. 通常把在大量观测中呈现出来的规律性，称为随机现象的统计规律性.

概率论与数理统计便是以随机现象的统计规律性为研究对象的近代数学学科，它与其他学科有着紧密的联系，并在国民经济各个领域具有广泛应用.

1.1.2 随机试验与随机事件

从广泛意义上讲，对自然现象或社会现象的一次观测，可以看作在给定条件下的试验. 如果某个试验符合以下特征：

1）试验在相同条件下可以重复进行；

2）每次试验的可能结果不止一个，而且所有可能结果事先是明确的；

3）正在进行的试验在最终结果揭晓前，无法预言会发生哪一个可能结果.

那么，这类具有特定含义的试验称为随机试验. 本书此后凡提到试验都是指随机试验. 通常

把试验的每个可能结果称为随机事件，并用 $A,B,C,\cdots$ 或 $A_1,A_2,\cdots$ 大写拉丁字母表示.

例 1 已知一批产品共30件，内含正品 26 件、次品 4 件，进行从中一次取出 5 件的试验. 则

$$A_i=\text{“被取的 5 件中恰有 } i \text{ 件次品”},\quad i=0,1,2,3,4,$$

$$B=\text{“被取的 5 件中最多有 3 件次品”},$$

$$C=\text{“被取的 5 件中正品不超过 2 件”}$$

等都是随机事件. 它们具有在一次试验中可能发生也可能不发生的特点.

下面讨论随机事件的分类.

例 1 中的随机事件 $A_0,A_1,\cdots,A_4$ 都是试验的直接结果. 像这样一类随机事件称为给定试验下的基本事件.

随机事件 B 与 C 都不是试验的直接结果，它们都可以看作是由若干基本事件组合而成的. 例如，随机事件 B 必定与基本事件 A_0,A_1,A_2,A_3 之一同时发生，记为 $B=\{A_0,A_1,A_2,A_3\}$. 仿上，有 $C=\{A_3,A_4\}$. 类似于 B 与 C 这样的随机事件，称为复合事件.

另外，在例 1 的题设下，记

$$D=\text{“被取的 5 件中至少有 1 件是正品”},\quad E=\text{“被取的 5 件都是次品”}.$$

它们与上面提到的随机事件有所不同. D 是包括所有基本事件的复合事件，它在任一次试验中一定发生，像 D 这类复合事件特别称它为必然事件，用希腊字母 Ω 表示，即 D 就是 Ω. 此外，由于题设中次品一共只有 4 件，故 E 不包括任何基本事件，它在任一次试验中一定不发生，像 E 这类情形特别称它为不可能事件，并用记号 $\varnothing$ 表示，即 E 就是 $\varnothing$.

综上可知，必然事件与不可能事件实际上同属确定性范畴，都不应是随机事件. 但为了方便将它们作为随机事件的极端情形予以统一处理，同时把随机事件简称为事件.

1.1.3 样本空间及其构成特征

给定试验下全部基本事件的集合，称为样本空间. 事实上，样本空间也可以看成是一个事件，其构成表明它等同于必然事件，故样本空间也用 Ω 表示. 构成样本空间的基本事件也称为样本点，因而任一事件实际上都是样本点的集合. 于是，从集合论观点看，凡随机事件都是样本空间的子集.

样本空间的构成可以比较简单，也可以相当复杂. 它按所含基本事件的数目，可划分为有限样本空间和无限样本空间，无限场合又可分为无限可列和无限不可列两种.

样本空间的存在总是联系着某个试验. 因而面对被考察的随机试验，对于相应样本空间的构成应该给出明确描述，这是继续讨论时首先需要解决的问题.

§1.2 随机事件的概率

1.2.1 概率概念的引入

随机事件在一次试验中发生与否往往事先无法预言. 但是，在大量重复试验中，其发生可能性的大小是客观存在的，是事件本身的固有属性. 为此，把度量事件 A 在试验中发生可能性大小

的数叫做概率，并记为 $P(A)$. 这样，较大的概率 $P(A)$ 预示着相应事件 A 发生的可能性较大. 反之，则发生的可能性较小.

对于给定的事件，如何定义并求得概率，通常与试验条件有关. 下面只给出在实际中用得较多的统计定义和古典定义. 至于几何定义与公理化定义本书不再涉及，有兴趣的读者可查阅参考文献[1]，[4]中的有关章节.

1.2.2 概率的统计定义

统计定义是以大量重复试验为前提的. 为此，首先引入频率及其稳定性概念.

(1) 频率的稳定性与统计概型

定义 1 在 N 次重复试验中，事件 A 发生的次数 M(频数)与试验次数 N 的比 M/N，称为事件 A 的频率，并记为 $f_N(A)$. 于是，$f_N(A)=M/N$.

容易验证，频率 $f_N(A)$ 具有如下基本性质，即对于任一事件 A，有 $0\leqslant f_N(A)\leqslant 1$. 极端场合下，有 $f_N(\Omega)=1, f_N(\varnothing)=0$.

实践表明，当试验次数 N 逐渐增大时，频率 $f_N(A)$ 虽然不尽相同，但却稳定在某数附近. 表 1－1 中的硬币"正面朝上"(设为事件 A)的频率 $f_N(A)$ 呈现出来的稳定趋势充分说明这一点.

正是频率的稳定性为概率概念的量化提供了可行途径. 所谓统计概型就是以大量重复试验为前提，以频率的稳定性事实为依据，给概率以数量刻画的随机试验模型.

(2) 统计定义及其概率的基本性质

表 1－1 匀称硬币在投掷中正面朝上的频率表

试验序号	$N=5$		$N=50$		$N=500$	
	M	$f_N(A)$	M	$f_N(A)$	M	$f_N(A)$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.5	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512

定义 2(概率的统计定义) 在相同条件下进行的大量重复试验中，如果随着试验次数 N 的增加，事件 A 的频率 $f_N(A)$ 始终围绕某一常数 p 作稳定而微小的摆动，则称常数 p 为事件 A 的概率，即 $P(A)=p$.

由统计定义求得的概率简称为统计概率.

在统计概型下，概率是作为频率的稳定值而引入的，因而，概率也应当具备频率的基本性质. 即对于任一事件 A，有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$. 极端场合下，有 $P(\Omega)=1, P(\varnothing)=0$.

(3) 统计定义求概率的步骤

统计定义主要用于测量和了解某个事件发生的概率，原则上按两步进行：

1) 做试验取得频率 $f_N(A)=M/N$；

2) 以频率作为概率的近似,即认定 $P(A)=M/N$.

定义中的大量试验往往难以办到,实际操作时可以用一定数量试验下的频率作为概率的近似. 例如,在表1-1中由于 $N=500$ 时,频率出现了稳定趋势,于是便可认定 $P(A)=0.5$.

1.2.3 概率的古典定义

鉴于统计概型下求概率有试验量大、结果将随频率的变化而改变等不足,为此转入另一个常用概型——古典概型的讨论.

(1) 古典概型及其特点的认定

如果某个试验下只有有限个基本事件(有限性),而且每个基本事件在试验中发生的可能性相等(等可能性),则这种随机试验称为古典型随机试验,简称为古典概型.

这里需要指出的是,并不是所有随机试验都可以成为古典概型的,关键要查验它是否具备上述特点. 有限性的识别是方便的,等可能性则需要依据某种"匀称性"或"任意性"来认定. 试以投掷一枚质地均匀、结构对称的硬币为例,客观上没有理由说"正面朝上(设为事件 A)"要比"反面朝上(设为事件 B)"的可能性更大些或更小些,于是自然可认定匀称硬币在一次投掷中的 A,B 两个基本事件是等可能的.

(2) 概率的古典定义及计算实例

定义 3(概率的古典定义) 对于给定的古典概型,若样本空间中基本事件总数为 n,事件 A 包括其中的 m 个. 则事件 A 的概率为

$$P(A)=m/n, \tag{1-1}$$

其中 n 为基本事件总数,m 为事件 A 包括的基本事件数.

显然,凡属古典概型的问题,将以排列组合为工具,运用(1-1)式直接计算其概率.

由古典定义求得的概率简称为古典概率.

容易验证,在古典概型下对于任一事件 A,有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$. 极端场合下,有 $P(\Omega)=1$, $P(\varnothing)=0$.

例 1 某种产品共30件,内含正品 23 件,次品 7 件,从中任取 5 件. 试求被取的 5 件中恰有 2 件是次品的概率.

解:设 $A=$"被取的 5 件中恰有 2 件是次品".

题设的抽取是"一次取出 5 件",由于被取产品不讲究次序,故基本事件总数与组合有关,即 $n=\mathrm{C}_{30}^5$. 事件 A 包括的基本事件数 $m=\mathrm{C}_7^2\mathrm{C}_{23}^3$. 则所求概率为

$$P(A)=\mathrm{C}_7^2\mathrm{C}_{23}^3/\mathrm{C}_{30}^5=0.261\ 0.$$ ①

一般场合下,设某产品共 N 件,内含次品 M 件,"从中任取的 n 件中恰有 m 件次品(设为事件 A)"的概率为

$$P(A)=\mathrm{C}_M^m\mathrm{C}_{N-M}^{n-m}/\mathrm{C}_N^n, \tag{1-2}$$

式中 $m=0,1,2,\cdots,\min\{M,n\}$.

由本例推广所得的(1-2)式,称为概率计算的超几何公式.

例 2 某班级的42名学生分成 3 组,每组依次有 15 人,14 人,13 人. 拟从中任意抽出 3 名学

① 概率计算中,概率通常取精确到 0.000 1 的近似值,理应使用近似号. 为方便,凡属此类情况,本书一律用等号.

生参加体能测试.试求被抽的 3 名学生分属下列情形的概率：

1）来自第 1 组(A)①； 2）来自同一组(B)； 3）来自不同组(C).

解:由于事件 A、B、C 有相同的前提条件,所以概率计算中的基本事件总数是一样的.基于题中抽取与次序无关的事实,故 $n=C_{42}^3$.

1）事件 A 包括的基本事件数 $m_A=C_{15}^3$.故 $P(A)=C_{15}^3/C_{42}^3=0.039\,6$；

2）B 中基本事件数 $m_B=C_{15}^3+C_{14}^3+C_{13}^3$,则 $P(B)=(C_{15}^3+C_{14}^3+C_{13}^3)/C_{42}^3=0.096\,3$；

3）C 中基本事件数 $m_C=C_{15}^1C_{14}^1C_{13}^1$,则 $P(C)=C_{15}^1C_{14}^1C_{13}^1/C_{42}^3=0.237\,8$.

例 3 沿用例 1 的题设及事件 A 的含义,将“从中任取 5 件”改为“从中任抽 5 次、每次取出 1 件”.试在下列抽取方式下分别求概率 $P(A)$：

1）每取 1 件经检验后放回,再继续抽取下 1 件(放回抽样)；

2）每取 1 件不再放回,然后在剩下的产品中继续抽取下 1 件(不放回抽样).

解:1）放回抽样下,基本事件总数与重复排列有关,即 $n=30^5$.事件 A 包括的基本事件数 $m=C_5^2 7^2 23^3$.故所求概率为

$$P(A)=C_5^2 7^2 23^3/30^5=0.245\,3；$$

2）不放回抽样下,基本事件总数与选排列有关,即 $n=A_{30}^5$.事件 A 包括的基本事件数 $m=C_5^2A_7^2A_{23}^3$.于是所求概率为

$$P(A)=C_5^2A_7^2A_{23}^3/A_{30}^5=0.261\,0.$$

从例 1、例 3 的演算可知,题设条件虽然相同,但抽取方式不同,因而计算中所用工具迥然不同,其结果也不尽相同,初学者务必认真识别.再说例 1 中的事件 A 与本例第 2 小题中的 A 有相同概率,绝非巧合.这是因为两种抽取模式,仅仅是形式上的差别,而实质上是一致的,所以它们在概率计算中被视为等价模式.今后凡遇到此类情况,选择适当模式解题,一般讲按例 1 的一次取模式解题,便于理解和计算.

§1.3 概率的加法公式

1.3.1 事件间的关系与运算

同一试验下往往会有多个事件发生,而这些事件又不是孤立存在的.为了解事件的构成特征,并有利于简化概率计算,下面进行事件间关系与运算的讨论.

事件间的关系与运算可借助直观图示予以示意.图示方法通常是用平面上的某个矩形区域表示样本空间 Ω,而作为样本空间子集的事件则由其子区域表示,必要时画上阴影予以标出.

(1) 事件的包含与等价

若事件 A 发生必将导致事件 B 发生,则称 A 包含于 B 或称 B 包含 A,记为 $A\subset B$.

事件 A 包含于 B,意味着属于 A 的基本事件一定也属于 B,反之则不一定.其直观形象如图 1－1所示.

① 设定事件通常是解题的第一步,有时可以在抄题时把事件记号在有关段落后标出.

对于任一事件 A，有$\varnothing \subset A \subset \Omega$，其中$\varnothing \subset A$ 作为规定而引入．

若 $A \subset B$ 且$B \subset A$，则称事件 A 与B 等价，记为 $A = B$．两事件等价意味着它们由相同的基本事件构成，在试验中必将同时发生．

(2) 事件的和(并)

由事件 A 与B 至少发生一个构成的事件，称为事件 A 与B 的和(并)事件，记为 $A + B(A \cup B)$．

和事件 $A + B$ 是由A、B 中的所有基本事件构成，即 A 或B．其直观形象是图1－2中画有阴影的部分．

对于任一事件 A，$A + A = A$ 成立．

和事件的概念可推广到 3 个或更多个事件的情形．

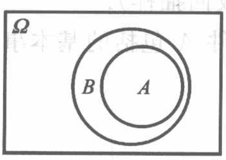

图 1－1

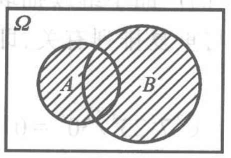

图 1－2

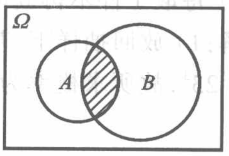

图 1－3

(3) 事件的积(交)

由事件 A 与B 同时发生构成的事件，称为事件 A 与B 的积(交)事件，记为 $AB(A \cap B)$．

积事件 AB 由A 与B 中的公共的基本事件构成，即 A 且B．其直观形象是图 1－3 中画有阴影的部分．

对于任一事件 A，$AA = A$ 成立．

积事件的概念也可推广到 3 个或更多个事件的情形．

事件求和、求积的运算满足交换律、结合律以及求积对求和、求和对求积的分配律．此外，事件和(并)、积(交)还满足

$$AB \subset A \subset A + B, \quad AB \subset B \subset A + B. \tag{1-3}$$

这一法则可形象地说成：事件求交，越交越“小”；事件求并，越并越“大”．

如果事件 A，B 有包含关系$A \subset B$，则

$$A + B = B, \quad AB = A. \tag{1-4}$$

这一法则可形象地说成：有包含关系的两事件，求并取“大”的；求交取“小”的．

特别地，对于任一事件 A，有

$$A + \Omega = \Omega, \quad A\Omega = A, \quad A + \varnothing = A, \quad A\varnothing = \varnothing.$$

(4) 不相容事件(互斥事件)

若事件 A 与B 在一次试验中不能同时发生，即满足 $AB = \varnothing$，则称事件 A 与B 是不相容(互斥)事件．两事件不互斥称为相容．

事件 A 与B 互不相容意味着它们没有公共的基本事件．其直观形象如图 1－4 所示．

若 n 个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中任意两事件不能同时发生，即有

$$A_iA_j = \varnothing, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n$$

成立,则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容.对于更多个事件也可仿此建立两两互不相容的概念.

(5) 事件的对立(互逆)

若事件 A 与 B 在一次试验中既不能同时发生,但又必定恰有一发生,即满足 $AB=\varnothing$, $A+B=\Omega$,则称事件 A 与 B 是对立(互逆)事件.

事件 A 与 B 对立意味着它们无公有基本事件,而所有基本事件又恰好充满样本空间 Ω.若以 $\bar{A}$ 表示事件 A 不发生,于是 $\bar{A}$ 实际上就是 B.故有 $A\bar{A}=\varnothing$、$A+\bar{A}=\Omega$,其直观形象如图 1－5 所示.

两事件对立一定互不相容,反之则不一定.

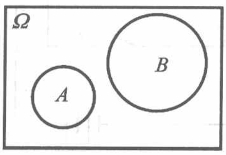

图 1－4

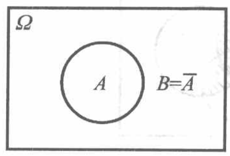

图 1－5

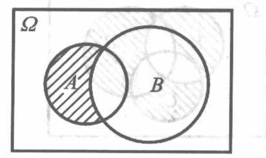

图 1－6

(6) 事件的差

由事件 A 发生与事件 B 不发生构成的事件,称为事件 A 与 B 的差,记为 $A-B$.易知,$A-B=A\bar{B}$.

差事件 $A-B$ 由属于 A 而不属于 B 的那些基本事件构成.其直观形象是图1－6中画有阴影的部分.

(7) 互斥完备事件组(样本空间的划分)

若 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 在一次试验中既不能同时发生,但又必定恰有一发生.即满足

$$A_iA_j=\varnothing,\ i\neq j,\ i,j=1,2,\cdots,n;$$

$$A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega,$$

则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成互斥完备事件组或称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是样本空间 Ω 的一个划分,其直观形象如图 1－7 所示.

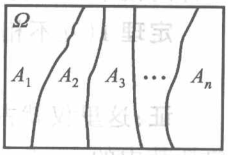

图 1－7

此外,借助图示直观,读者可自行验证如下等式都成立:

① $\overline{A+B}=\bar{A}\bar{B}$;　　② $\overline{AB}=\bar{A}+\bar{B}$;

③ $A=AB+A\bar{B}$;　　④ $A+B=A+\bar{A}B$.

其中①、②两式就是集合论中的交并对偶法则,它对于三个或更多个事件同样成立.

而③、④两式即为事件的互不相容分解——把一个事件"分解"成若干两两互不相容事件的和.例如对于④,除可以直观图示外,还可按如下方法进行验证,即

$$A+B=A+B\Omega=A+B(A+\bar{A})=A+AB+\bar{A}B=A+\bar{A}B.$$

特别需要指出的是,一个事件的互不相容分解式可以不惟一.例如,$A+B=A\bar{B}+\bar{A}B+AB$ 或 $A+B=A\bar{B}+B$ 也是成立的,这些将留给读者自行验证.

熟悉事件间的关系、运算以及由此派生出来的种种法则,并能灵活运用,对于完成某些较复杂的运算是十分有益的.

例 1　设事件 A,B,C 分别表示甲、乙、丙 3 人某项测试合格.试用 A,B,C 表示下列事件:3

人均合格(设为事件 D);3 人中至少有 1 人合格(E);3 人中恰有 1 人合格(F);3 人中至多有 1 人不合格(G). 并对事件 F 与 G 作出直观图示.

解:由题设可知

$$D = ABC; \qquad E = A + B + C;$$
$$F = A\bar{B}\,\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\,\bar{B}C \quad (\text{图 } 1-8 \text{ 所示});$$
$$G = AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC + ABC \quad (\text{图 } 1-9 \text{ 所示}).$$

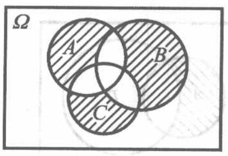

图 1－8

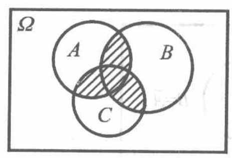

图 1－9

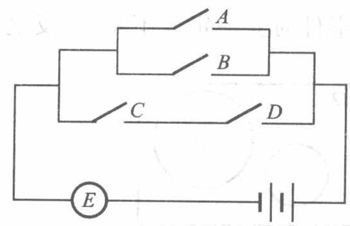

图 1－10

例 2 已知某电路系统由开关 A,B,C,D 及电源、指示灯 E 组成(图 1－10 所示). 字母 A, B,C,D 表示相应开关不合闸的事件,字母 E 表示指示灯亮的事件. 试用事件 A,B,C,D 表示事件 E 及 $\bar{E}$.

解:串联开关同时合闸,才能使电路畅通而灯亮. 而并联开关至少有一合闸即可亮灯. 于是,由题设可知

$$E = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C}\,\bar{D}, \quad \bar{E} = AB(C + D).$$

1.3.2 互不相容事件概率的加法公式

概率计算中可能会遇到某些较为复杂的问题,此时往往需要借助事件间的种种关系,从某个事件的概率出发,去求另一事件的概率. 本节和下节将进行这方面的讨论.

定理 1(互不相容事件概率的加法公式) 若 A 与 B 为互不相容事件,则有

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \tag{1-5}$$

证:这里仅就古典概型给出证明. 假设给定试验下的基本事件总数为 n,而事件 A 与 B 分别包括其中的 m_A 个与 m_B 个. 于是,由古典定义可得

$$P(A) = m_A / n, \quad P(B) = m_B / n.$$

由于 A 与 B 是互不相容事件,它们不存在公共的基本事件,所以事件 $A + B$ 包括的基本事件数恰是$(m_A + m_B)$个. 于是

$$P(A + B) = \frac{m_A + m_B}{n} = \frac{m_A}{n} + \frac{m_B}{n} = P(A) + P(B).$$

推论 1 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容,则从(1－5)式出发,运用数学归纳法可证得

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n). \tag{1-6}$$

推论 2 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 构成样本空间 Ω 的一个划分,则易证

$$P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = 1. \tag{1-7}$$