2011
人大考研

权威 全面 实用

2011 考研历届数学真题题型解析（数学二）

主编 / 黄先开 曹显兵

囊括14年全部真题　　名师归纳总结71题型

全书按大纲考试要求设置结构，每章下归纳题型分类解析1997—2010年真题
题题精解，有分析，有评注，多种解法、多种思路
章章总结，将历年试题题型、分值分布情况分别列表，考试重点清晰可见
每章后附自测练习题，全部来自其余两类的历年真题，互相借鉴，触类旁通
14年试卷附录在后，供考生自测之用，其解析在正文的位置全部标明

中国人民大学出版社

考研历届数学真题题型解析(数学二)

▶ 主　编　黄先开　曹显兵
▶ 副主编　施明存　殷先军
刘喜波

2011

中国人民大学出版社
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

考研历届数学真题题型解析．数学二/黄先开，曹显兵主编. 5 版
北京：中国人民大学出版社，2010
ISBN 978-7-300-07361-3

Ⅰ. ①考…
Ⅱ. ①黄… ②曹…
Ⅲ. ①高等数学-研究生-入学考试-解题
Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 033890 号

考研历届数学真题题型解析(数学二)
主　编　黄先开　曹显兵
Kaoyan Lijie Shuxue Zhenti Tixing Jiexi (Shuxue Er)

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242(总编室)		010－62511398(质管部)
	010－82501766(邮购部)		010－62514148(门市部)
	010－62515195(发行公司)		010－62515275(盗版举报)
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.1kao.com.cn (中国 1 考网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京鑫霸印务有限公司		
规　　格	185 mm×260 mm　16 开本	**版　　次**	2006 年 6 月第 1 版
			2010 年 3 月第 5 版
印　　张	19.75	**印　　次**	2010 年 3 月第 1 次印刷
字　　数	502 000	**定　　价**	32.00 元

前言

自从1987年全国工学、经济学硕士研究生入学数学实行统一考试以来，至今已24年，共命制试卷近百份，有上千道试题。这些试题是参加命题的专家、教授的智慧和劳动的结晶，它既反映了《数学考试大纲》对考生数学知识、能力和水平的要求，展示出统考以来数学考试的全貌，又蕴涵着命题专家在《数学考试大纲》要求下的命题指导思想、原则、特点和趋势，是广大考生和教师了解试题信息、分析命题动态、总结命题规律最直接、最宝贵的第一手资料。

拥有一套内容完整、编排合理、分析透彻、解答规范、总结到位的数学历年真题，是广大准备考研学子的期盼。通过认真分析研究、了解、消化和掌握历年试题，可以发现命题的特点和趋势，找出知识之间的有机联系，总结每部分内容的考查重点、难点，归纳常考典型题型，凝练解题思路、方法和技巧，明确复习方向，从而真正做到有的放矢、事半功倍地进行复习。本书是作者在十多年收集、整理资料和进行考研数学辅导的基础上，通过对历年试题的精心分析研究，并结合授课体会和学生的需要全新编写而成的，相信能够满足考生的要求。

我们认为本书具有以下特点：

1. 内容最全面。汇集了1997年以来14年的所有试题，便于考生全面系统地把握历年试题的动态变化。在**每章后面还将其余类型试卷的相关典型真题作为习题提供，**以便考生进一步巩固相关知识，**考生有了本书后，也就相当于拥有了其余两类试卷的资料。**

2. 题型最丰富。根据考试大纲的要求，**每一章节均按题型进行归类，并对每一题型进行了分析、归纳和总结。**这样考生可通过题型研究，把握命题特点和命题思路，做到举一反三，触类旁通。

3. 解析最详尽。先分析——解题的思路、方法，然后详解——详细、规范的解答过程，再就是评注——解题思路、方法和技巧的归纳总结，所涉及的知识点、命题意图和可能延伸的考查情形。对命题思路、解题的重点难点进行这样深入细致的解析，相信有助于考生把握解题规律、拓展分析思路、提炼答题技巧，从而大大提高应试水平。

4. 对照最直接。本书在每部分的开头，先列出了考试大纲规定的内容与要求，与此相对照再进行**题型归类和分析总结，顺序与考试大纲和一般教材一**

致，便于考生对照复习。

5. 总结最完整。除每类题型均有归纳总结外，**每章还有历年考研试题按题型分布和分数的总结**，这样可以帮助考生了解每类题型考查的频率、所占的比重，从而发现命题的重点、最常考的题型，以便更有针对性地进行复习。

本书既根据考试内容按章节编排，又提供成套试卷。复习前期建议考生按章节内容与教材、经典讲义同步进行，后期可将本书作为模拟训练套题使用。尽管本书每题均有详尽的解析，但希望读者不要轻易去查看分析、详解和评注，而一定要自己先动手去进行演练。在每题做完之后，再去看书中的分析、详解和评注，仔细回顾、研究一下自己的分析、思路和解答过程与书中有什么异同；如果存在问题，应尽量查清原因，看看自己是在基本理论、基本概念与基本方法等方面有欠缺，还是在做题技巧、知识的综合与灵活运用等方面掌握不够。**注意，这样的归纳总结过程是必不可少的，其重要性甚至超过做题本身。**整本书都这样复习下来，在掌握基本理论、基本概念和基本方法上，在综合、灵活运用知识和思维能力的训练上，相信读者一定会有质的提高。

本书一方面保留了我们过去编写的历年试题解析图书的优点，同时在这次编写完善过程中，参考了众多相关的教材和复习指导书，在此不一一提及，谨对所有相关的作者表示真诚的谢意。

由于时间比较仓促，加上编者水平所限，书中难免还有不足之处，恳请广大读者批评指正。

成功来源于自信，只要广大考生充满信心，通过脚踏实地的艰苦努力，就一定能够心想事成。

编者

2010 年 2 月于北京

目　　录

第一部分　高等数学

第二部分　线性代数

附 录

P A R T O N E

第一部分

高等数学

第一章　函数、极限、连续

考试内容与要求

考试内容

函数的概念及表示法，函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性，复合函数、反函数、分段函数和隐函数，基本初等函数的性质及其图形，初等函数，函数关系的建立，数列极限与函数极限的定义及其性质，函数的左极限与右极限，无穷小量和无穷大量的概念及其关系，无穷小量的性质及无穷小量的比较，极限的四则运算，极限存在的两个准则：单调有界准则和夹逼准则，两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e},$$

函数连续的概念，函数间断点的类型，初等函数的连续性，闭区间上连续函数的性质.

考试要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，并会建立应用问题的函数关系.

2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.

5. 理解极限的概念，理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左极限、右极限之间的关系.

6. 掌握极限的性质及四则运算法则.

7. 掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法.

8. 理解无穷小量、无穷大量的概念，掌握无穷小量的比较方法，会用等价无穷小量求极限.

9. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续)，会判别函数间断点的类型.

10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)，并会应用这些性质.

题型 1.1　函数的概念及其特性

1. (97,3 分)* 设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0,\\ x+2, & x>0,\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $g[f(x)]$ 为

---

* (97,3 分)表示该题为 1997 年考研数学二真题，其分值为 3 分，下同.

(A) $\begin{cases}2+x^2,x<0,\\2-x,x\geqslant 0.\end{cases}$ (B) $\begin{cases}2-x^2,x<0,\\2+x,x\geqslant 0.\end{cases}$

(C) $\begin{cases}2-x^2,x<0,\\2-x,x\geqslant 0.\end{cases}$ (D) $\begin{cases}2+x^2,x<0,\\2+x,x\geqslant 0.\end{cases}$ 【 】

【答案】 应选(D).

【详解】 $g[f(x)]=\begin{cases}2-f(x),f(x)\leqslant 0\\f(x)+2,f(x)>0\end{cases}=\begin{cases}2-(-x),x\geqslant 0\\2+x^2,\quad x<0\end{cases}=\begin{cases}2+x^2,x<0,\\2+x,x\geqslant 0.\end{cases}$

故应选(D).

---

2. (99,3 分) 设 $f(x)$ 是连续函数,$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数,则

(A) 当 $f(x)$ 是奇函数时,$F(x)$ 必是偶函数.

(B) 当 $f(x)$ 是偶函数时,$F(x)$ 必是奇函数.

(C) 当 $f(x)$ 是周期函数时,$F(x)$ 必是周期函数.

(D) 当 $f(x)$ 是单调增函数时,$F(x)$ 必是单调增函数. 【 】

【答案】 应选(A).

【分析】 本题涉及原函数的基本特性,由于原函数有无穷多个,如何表示它是问题的关键.实际上,只要找出一个原函数,则所有的原函数就可表示出来,而$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 正好就是所需要的一个原函数.

【详解】 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 可以表示为 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C$,于是

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t+C\xlongequal{u=-t}\int_0^x f(-u)\mathrm{d}(-u)+C.$$

当 $f(x)$ 为奇函数时,$f(-u)=-f(u)$,从而有

$$F(-x)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+C=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C=F(x),$$

即 $F(x)$ 为偶函数,

故应选(A).

至于选项(B)、(C)、(D),可分别举反例如下:$f(x)=x^2$ 是偶函数,但其原函数 $F(x)=\frac{1}{3}x^3+1$,不是奇函数,可排除(B);$f(x)=\cos^2 x$ 是周期函数,但其原函数 $F(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x$ 不是周期函数,可排除(C);$f(x)=x$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内是单调增函数,但其原函数 $F(x)=\frac{1}{2}x^2$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内非单调增函数,可排除(D).

【评注 1】 有些考生将原函数写成形如:$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+C$,结果在推导 $F(-x)=F(x)$ 时遇到困难,因此特殊形式的原函数$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是值得注意的.

【评注 2】 函数的基本性质有:奇偶性、周期性、单调性和有界性,当 $f(x)$ 具有某性质时,$F(x)$ 是否也具有相应的性质?或反过来考虑,当 $F(x)$ 具有某性质时,$f(x)$ 是否也具有相应的性质?本题也可变形为考虑 $f(x)$ 与 $f'(x)$(或 $f'(x)$ 与 $f(x)$)的性质之间的关系,对

于常见的结论与反例应做到心中有数.

---

3. (01,3 分) 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f\{f[f(x)]\}$ 等于

(A)0.　　(B)1.　　(C)$\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$　　(D)$\begin{cases}0, & |x|\leqslant 1,\\ 1, & |x|>1.\end{cases}$　【　】

【答案】 应选(B).

【详解】 由于 $|f(x)|\leqslant 1$,于是 $f[f(x)]=1$,故 $f\{f[f(x)]\}=1$,故应选(B).

---

4. (05,4 分) 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数,"$M\Leftrightarrow N$"表示"M 的充分必要条件是 N",则必有

(A)$F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数.

(B)$F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数.

(C)$F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数.

(D)$F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数.　【　】

【答案】 应选(A).

【分析】 本题可直接推证,但最简便的方法还是通过反例用排除法找到答案.

【详解 1】 任一原函数可表示为 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C$,且 $F'(x)=f(x)$. 当 $F(x)$ 为偶函数时,有 $F(-x)=F(x)$,于是 $F'(-x)\cdot(-1)=F'(x)$,即 $-f(-x)=f(x)$,也即 $f(-x)=-f(x)$,可见 $f(x)$ 为奇函数;反过来,若 $f(x)$ 为奇函数,则 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为偶函数,从而 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C$ 为偶函数,故选(A).

【详解 2】 令 $f(x)=1$,则取 $F(x)=x+1$,可排除(B),(C);令 $f(x)=x$,则取 $F(x)=\frac{1}{2}x^2$,可排除(D),故应选(A).

【评注】 请读者思考 $f(x)$ 与其原函数 $F(x)$ 的有界性之间有何关系?

小结

函数的概念及其复合,包括分段函数的复合,本质上是函数关系的建立问题,而建立函数关系是进一步研究函数性质的基础. 对于函数的四个主要特性:奇偶性和周期性一般用定义检验;单调性则大多用导数符号分析;有界性往往需要结合极限与连续的性质来确定.

题型 1.2　极限概念与性质

1. (98,3 分) 设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$,则下列断言正确的是

(A) 若 x_n 发散,则 y_n 必发散.　　(B) 若 x_n 无界,则 y_n 必有界.

(C) 若 x_n 有界,则 y_n 必为无穷小. (D) 若$\frac{1}{x_n}$为无穷小,则 y_n 必为无穷小. 【 】

【答案】 应选(D).

【分析】 通过举反例用排除法或直接推导.

【详解 1】 举反例:取 $y_n = 0$,可排除(A);

取 $x_n = \begin{cases} n, n\text{ 为奇数}, \\ 0, n\text{ 为偶数}, \end{cases} y_n = \begin{cases} 0, n\text{ 为奇数}, \\ n, n\text{ 为偶数}, \end{cases}$可排除(B);

若取 $x_n = 0$,则 y_n 可为任意数列,可排除(C).

故应选(D).

【详解 2】 若$\frac{1}{x_n}$为无穷小,则$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} \cdot x_n y_n = 0$,必为无穷小,故应选(D).

---

2. (99,3 分)"对任意给定的 $\varepsilon \in (0,1)$,总存在正整数 N,当 $n \geqslant N$ 时,恒有 $|x_n - a| \leqslant 2\varepsilon$"是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的

(A) 充分条件但非必要条件. (B) 必要条件但非充分条件.

(C) 充分必要条件. (D) 既非充分条件又非必要条件. 【 】

【答案】 应选(C).

【分析】 本题考查对数列收敛性定义的理解,注意到 2ε 仍是可任意小的正数,因此上述条件也是数列收敛的充要条件. 当然也可严格推导出它与标准定义是等价的.

【详解】 由数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a $\Leftrightarrow$"对任意给定的 $\varepsilon_1 > 0$,总存在正整数 N_1,当 $n > N_1$ 时,恒有 $|x_n - a| < \varepsilon_1$",显然可推导出:"对任意给定的 $\varepsilon \in (0,1)$,总存在正整数 N,当 $n \geqslant N$ 时,恒有 $|x_n - a| \leqslant 2\varepsilon$".

反过来,若有"对任意给定的 $\varepsilon \in (0,1)$,总存在正整数 N,当 $n \geqslant N$ 时,恒有 $|x_n - a| \leqslant 2\varepsilon$",则对任意的 $\varepsilon_1 > 0$(不妨设 $0 < \varepsilon_1 < 1$,当 $\varepsilon_1 \geqslant 1$ 时,取一$\widetilde{\varepsilon_1}$,$0 < \widetilde{\varepsilon_1} < 1 \leqslant \varepsilon_1$,代替即可),取 $\varepsilon = \frac{1}{3}\varepsilon_1 > 0$,存在正整数 N,当 $n \geqslant N$ 时,恒有 $|x_n - a| \leqslant 2\varepsilon = \frac{2}{3}\varepsilon_1 < \varepsilon_1$,令 $N_1 = N - 1$,则满足"对任意给定的 $\varepsilon_1 > 0$,总存在正整数 N_1,当 $n > N_1$ 时,恒有 $|x_n - a| < \varepsilon_1$". 可见上述两种说法是等价的,故应选(C).

【评注】 在复习过程中,对基本概念要理解透彻,而不仅仅在于是否记住. 本题若真正理解了数列极限的概念,并注意到 2ε 仍是可任意小的正数,则可立即得到正确选项.

---

3. (03,4 分) 设 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{c_n\}$ 均为非负数列,且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$,$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$,则必有

(A) $a_n < b_n$ 对任意 n 成立. (B) $b_n < c_n$ 对任意 n 成立.

(C) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n c_n$ 不存在. (D) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n c_n$ 不存在. 【 】

【答案】 应选(D).

【详解 1】 本题考查极限的概念,极限值与数列前面有限项的大小无关,可立即排除(A),(B); 而极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n c_n$ 是"$0 \cdot \infty$"型未定式,可能存在也可能不存在,举反例说明即可;极限 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n c_n$ 属"$1 \cdot \infty$"型,必为无穷大量,即不存在. 故应选(D).

【详解 2】　用举反例法，取 $a_n=\frac{2}{n}, b_n=1, c_n=\frac{1}{2}n(n=1,2,\cdots)$，则可立即排除(A)，(B)，(C)，故应选(D).

小结

关于极限的存在性，以下几点是值得注意的：

1. 若 $\lim f$ 存在，$\lim g$ 不存在，则 $\lim(f\pm g)$ 一定不存在，但 $\lim fg$，$\lim\frac{f}{g}$ 可能存在，也可能不存在；

2. 若 $\lim f=l\neq 0$，$\lim g=\infty$，则 $\lim fg=\infty$；

3. 若 f 有界，$\lim g=\infty$，则 $\lim(f\pm g)=\infty$，但 $\lim fg$ 不一定为 ∞.

题型 1.3　函数极限的计算

1. (97，5 分) 求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

【分析】　本题为“$\frac{\infty}{\infty}$”型未定式，可考虑分子分母同除以最大的项，但应注意 x 为负.

【详解】　分子分母同除以 x，考虑到 x 为负，有

$$\text{原式}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}}=\frac{-2+1}{-1}=1.$$

---

2. (98，3 分) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$ ________.

【答案】　应填 $-\frac{1}{4}$.

【分析】　本题为“$\frac{0}{0}$”型未定式，可直接用洛必塔法则求解.

【详解 1】　$\text{原式}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{4x\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1-x}}$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{1}$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}.$$

【详解 2】　考虑到分母为 x^2，利用泰勒公式将分子中 $\sqrt{1-x}$ 和 $\sqrt{1+x}$ 展开到 x 的二次幂，有

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)+1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)-2}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{4}+\frac{o(x^2)}{x^2}\right)=-\frac{1}{4}.$$

【评注】 一般地，当分母(或分子)为 x^n 时，可考虑将分子(或分母)用泰勒公式展开到 x^n 进行计算，这样往往比较简便.

3.(99,5 分) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$.

【分析】 含有根式函数的极限问题，一般应先有理化，然后再用四则运算、无穷小量等价代换以及洛必塔法则等求极限.

【详解】

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x[\ln(1+x)-x]}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{\ln(1+x)-x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{\ln(1+x)-x}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\ln(1+x)-x}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\frac{1}{1+x}-1}$$

$$=-\frac{1}{2}.$$

【评注】 在利用洛必塔法则求极限之前，应尽量通过无穷小量的等价代换进行简化，另外非零因子项的极限要先计算出来，不要再放在分子、分母的求导过程中. 比如，本题有理化后，应先将 $\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}$ 项的极限求出，再用洛必塔法则去求导，这样就简便多了.

4.(00,3 分) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{\ln(1+2x^3)}=$ ________.

【答案】 应填 $-\dfrac{1}{6}$.

【分析】 结合无穷小量等价代换和洛必塔法则进行计算即可.

【详解】

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x-x}{\ln(1+2x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x-x}{2x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-1}{6x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{6x^2(1+x^2)}=-\frac{1}{6}.$$
