高职高专“十一五”规划教材

高等数学

张明昕◎主编　　张树江◎主审

化学工业出版社

高职高专“十一五”规划教材

高等数学

张明昕　主　编
王宏杰　副主编
张树江　主　审

化学工业出版社
·北京·

本书主要内容包括极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分与定积分。教材特点是淡化理论，突出实用，通俗易懂，对加强学生对数学的应用意识和兴趣，培养学生用数学的原理和方法解决问题的能力有益处。

本书可作为高职高专各专业通用的高等数学教材，也可供各行业数学爱好者阅读参考。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/张明昕主编. 一北京：化学工业出版社，2009.7

高职高专“十一五”规划教材

ISBN 978-7-122-05347-3

Ⅰ. 高… Ⅱ. 张… Ⅲ. 高等数学-高等学校：技术学院-教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 086644 号

责任编辑：于　卉　李春成　石　磊　　文字编辑：孙凤英

责任校对：周梦华　　装帧设计：关　飞

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号　邮政编码 100011）

印　　刷：北京市振南印刷有限责任公司

装　　订：三河市宇新装订厂

787mm×1092mm　1/16　印张 11¼　字数 274 千字　　2009 年 8 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899

网　　址：http://www.cip.com.cn

凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：23.00 元

前　言

本书是作者经过多年教学实践和在吸收“十五”规划教材成果的基础上编写而成的。本书主要内容包括极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分与定积分。本书力求用通俗的语言阐述高等数学中的基础知识和基本概念。在保持学科科学性和完整性的前提下，突出应用与计算，淡化理论，充分考虑高职学生的特点，增加趣味性和启发性的小问题等，教材内容注意高、中、低的结合，尽量满足各种不同层次学生的需求。本书可作为高职高专各专业通用的高等数学教材，这几年随着我国高等教育尤其是高职高专教育的飞速发展，无论是学生的实际水平还是相关专业课对高等数学知识的需要，原有的教材无论从内容上还是从体系上都不适应当今高职学生的特点。为了深化教育教学改革、全面推进素质教育、培养创新人才，适应高职教育大众化的发展趋势，我们依据《高职高专高等数学课程教学基本要求》，在总结多年教学改革经验的基础上，结合高职院校各专业学生的特点，编写了本教材。

在本书的编写过程中，我们主要遵循以下原则。

1. 淡化理论，突出实用。本书在理论上以学生易理解和不影响教学体系为尺度，多注重以几何图形直观启发学生。

2. 通俗易懂。结合学生实际水平，在教材内容处理上力求通俗易懂，深入浅出。在介绍基本理论和重要定理时，没有采用传统的严谨数学论证方法，而是注重以实例引入概念和定理，并最终回到数学应用的思想，加强学生对数学的应用意识和兴趣，培养学生用数学的原理和方法解决问题的能力。

3. 把方法的应用程序化、步骤化。

4. 在每章或每节开始，用尽可能短的语言点题，以便起到承上启下的作用，增加可读性。每章给出小结，方便学生复习和总结。

本书由张明昕任主编（辽宁石油化工大学），王宏杰任副主编（辽宁石油化工大学），张树江任主审（辽宁石油化工大学），本书具体编写情况为：第一、二、三章由张明昕编写，第四、五、六章由王宏杰编写，丁平（辽宁石油化工大学）、程文光（辽宁石油化工大学）也参与了本教材的编写。

本书在编写过程中参考国内外教材和书籍，借鉴和吸收其他同行的研究成果，在此表示衷心感谢。

由于编者水平有限，加之时间比较仓促，书中难免有不妥之处，恳请广大读者批评指正。

编　者

2009 年 4 月

目　录

第一章　函数极限与连续

高等数学可以说是变量数学，它的研究对象、研究方法与初等数学相比都有相当大的差异. 它主要研究对象是函数，它的主要内容是微积分学，它的主要手段是以极限为工具，并在实数范围内研究函数的变化率及其规律性，从而产生微积分的基本概念及性质. 本章主要介绍函数的概念及其基本性质；数列与函数的极限及其基本性质；连续函数的概念及其基本性质，为进一步学好函数的微积分打下一个良好的基础.

教学要求

1. 理解函数的定义、分段函数、初等函数的概念，会作较简单函数的图像.
2. 理解复合函数的复合过程，能分解复合函数为若干个简单的初等函数.
3. 掌握基本初等函数的图像及主要性质.

第一节　函数的概念

一、几个基本概念

1. 常量与变量

在日常生活或生产实践中，观察某一个事件的结果往往是用一个量的形式来表现的，在观察的某一个过程中始终保持不变的量称之为常量，经常变化的量称之为变量. 通常用小写字母 a、b、c 等表示常量，用小写字母 x、y、z 等表示变量.

例如：圆周率 π 是永远不变的量，它是一个常量；某商品的价格在一定的时间段内是不变的，所以，在这段时间内它也是常量；又如一天中的气温，工厂在生产过程中的产量都是不断变化的量，这些量都是变量.

注意：

(1) 常量和变量是相对的，它们依赖于所研究的过程和所研究的对象，在不同的过程中，常量和变量是可以转化的，如商品的价格，某段时间是常量，另一段时间就有可能是变量了；

(2) 从几何意义上来表示，常量对应数轴上的定点，变量对应数轴上的动点.

2. 集合、区间

集合是表示具有同一种属性的全体.

例如：某班的全体学生组成一个集合；长虹集团 2005 年度的所有产品组成一个集合；所有正有理数仍组成一个集合等.

有关集合的运算、集合的表示等方面的基本知识，中学数学已有介绍，这里就不一一赘述了.

下面介绍高等数学中常用的数集及其简明表示符号.

开区间：$(a,b)=\{x|a<x<b\}$；

闭区间：$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$；

左半开区间（或右半闭区间）$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$；

右半开区间（或左半闭区间）$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$；

上述四个区间的长度都是有限长的，因此把它们统称为有限区间.

无穷区间有：

$(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}$；$(a,+\infty)=\{x|x>a\}$；$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$；$(-\infty,b)=\{x|x<b\}$；$(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\}$.

如无特别声明，可用如下符号表示一些常用数集：

R——实数集；**Q**——有理数集；**Z**——整数集；**N**——自然数集.

二、函数的概念

定义 1 设 x，y 是两个变量，D 是 **R** 上的非空数集，对任意的 $x\in D$，通过某一个确定对应关系（或对应法则）f，在实数集 **R** 上有唯一的一个 y 与之对应，则称 f 是从 D 到 **R** 上的一个函数（也称为定义在 **D** 上的函数），记为：

$$f\colon D\to\mathbf{R},\ x\mapsto y$$

简记为：
$$y=f(x).$$

通常把 x 称为自变量，y 称为因变量（或 x 的函数），x 的取值范围称为函数的定义域（就是本定义中的 D）. 一般情况下，用 D_f 表示函数的定义域. 当取 $x=x_0$ 时，按照对应法则 f，有 $y_0=f(x_0)$ 与之相对应，并称其为函数在点 x_0 处的函数值；当 x 在区域 D 上取遍时，所对应的函数值的全体称为函数的值域，记为 R_f. 即

$$R_f=\{y\,|\,y=f(x),x\in D_f\}$$

对于函数概念，以下几点是值得注意的：

（1）以上函数定义基本上是按照初等数学中所描述的方式给出的，它指的是单值函数；

（2）函数的实质是对应关系（或对应法则），只要两个变量之间能找到一种对应，就说它们之间确定了一个函数；

（3）确定函数有两个要素，这就是定义域与对应关系；

（4）函数之间可以定义加、减、乘、除等运算，但是运算必须在所有函数都有意义的公共范围内进行.

有关函数的相等、函数的定义域、值域、函数的四则运算等概念在中学数学课本中已有介绍，这里就不再复述了.

下面来看几个具体的例子.

例 1 由关系式 $x^2+y^2=1$ 能确定两个变量 x 与 y 之间的一种对应关系，可以说是一个函数关系，但它不是我们所指的函数. 比如 $x=0$ 时，相应的 y 可以等于 1，也可以等于 -1. 其实它们是 $y=+\sqrt{1-x^2}$, $y=-\sqrt{1-x^2}$ 这样两段函数，这类函数称为多值函数.

例 2 函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

的定义域为 **R**，值域为 $[0,+\infty)$，它称为绝对值函数，其图像如图 1-1. 通常这类函数称为分段函数.

所谓分段函数是指：函数在定义域的不同范围内的函数表达式不同，它实质上是一个函数，不能理解为两个或多个函数.

例 3 函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

称为符号函数，这也是分段函数，记为 $\operatorname{sgn}x$，它的定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=\{-1,0,1\}$，它的图形如图 1-2 所示. 对任何实数 x 都有下列关系式：$x=\operatorname{sgn}x|x|$ 成立，所以它起着一个符号的作用.

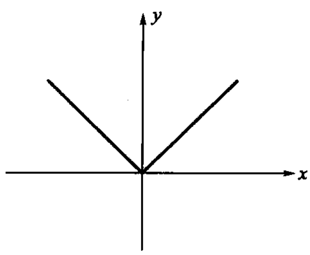

图 1-1

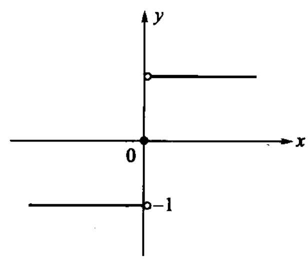

图 1-2

例 4 狄立克莱函数（Dirchlet）

$$y=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数时}\\ 0, & x\text{ 为无理数时}\end{cases}$$

它的定义域是 $D_f=(-\infty,+\infty)$，值域是 $R_f=\{0,1\}$.

三、函数的表示法

（1）解析法（公式法） 把两个变量之间的关系直接用数学式子表示出来，必要的时候还可以注明函数的定义域、值域，这种表示函数的方法称之为**解析法**. 这在高等数学中是最常见的函数表示法，它便于我们进行理论研究. 如：例 1，例 2 等.

（2）表格法 就是把自变量和因变量的对应值用表格形式列出. 这种表示法有较强的实用价值，比如三角函数表、常用对数表等.

（3）图示法 用某坐标系下的一条曲线反映自变量与因变量的对应关系的方法. 比如，气象台自动温度计记录了某地区的一昼夜气温的变化情况，这条曲线在直角坐标系下反映出来的就是一个函数关系. 这种方法，几何直观性强，函数的基本性态一目了然，看图就基本上都知道了，但它不利于理论研究.

四、函数的性质

微积分学的主要研究对象是函数，既然要对函数进行研究，自然要对函数有哪些基本几何性质有一定的了解，下面我们将逐一进行介绍.

（1）函数的单调性 设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若对任意的 $x,y\in I$，当 $x<y$ 时，有 $f(x)\leqslant f(y)$ ［或 $f(x)\geqslant f(y)$］，则称 $f(x)$ 在区间 I 上为单调增加函数（或单调减少函数）；

若对任意的 $x,y\in I$，当 $x<y$ 时，有 $f(x)<f(y)$ [或 $f(x)>f(y)$]，则称 $f(x)$ 在区间 I 上为严格单调增加函数（或严格单调减少函数）.

单调增加函数（或单调减少函数）、严格单调增加函数（或严格单调减少函数）统称为单调函数（也称函数具有单调性）.

在几何上，单调增加（减少）函数的图形是沿 x 轴的正向渐升的（或渐降的）. 如图 1-3、图 1-4 所示.

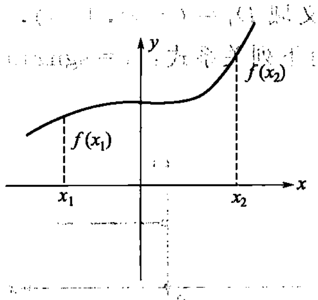

图 1-3

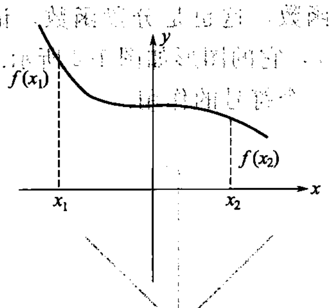

图 1-4

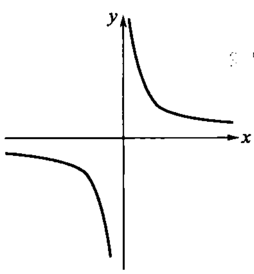

图 1-5

例 5 函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,0]$ 上严格单调递减，而在区间 $[0,+\infty)$ 上却严格单调递增，这在考虑函数的单调性时，是要特别注意的问题. 函数的单调性是函数在一个有定义区间内的特征性质，在不同的区间上可能有不同的单调性. 即便在各个不同的区间内单调性相同，但在整个定义域内仍有可能不单调.

比如，函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，函数如图 1-5 所示，它不是单调函数，但它在 $(-\infty,0)$ 或 $(0,+\infty)$ 上分别单调递减.

(2) **函数的有界性** 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若存在 $M>0$，使得对任意 $x\in I$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界，否则称为无界.

如果存在 $M>0$，使得对任意 $x\in I$，恒有 $f(x)\leqslant M$ [或者 $f(x)\geqslant M$]，那么称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有上界（或下界）. 其几何特征如图 1-6.

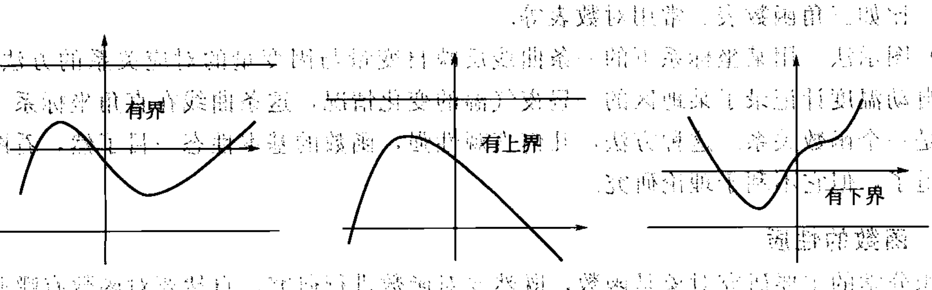

图 1-6

显然，$f(x)$ 在区间 I 上有界等价于它在区间 I 上既有上界又有下界.

例如，三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 是有界函数. 因为对任意的 $x\in\mathbf{R}$，都有 $|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$，因此它们在整个数轴上有界.

函数 $y=\frac{1}{x}$ 在$(0,+\infty)$内无上界，但有下界（0 为一个下界）；而在$(-\infty,0)$内无下界，但有上界（0 为一个上界）．它在定义域内是无界的，但是它在任何不包含原点的闭区间上是有界的．

（3）函数的奇偶性　设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，即对 $\forall x\in D$，有 $-x\in D$（如图 1-7）．

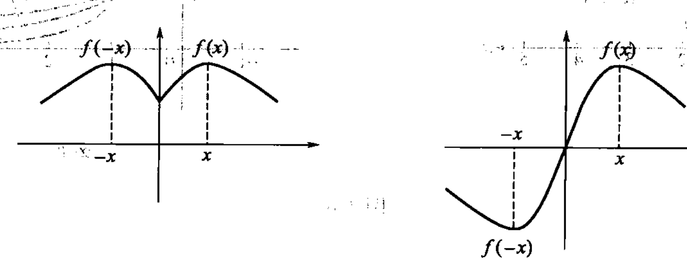

图 1-7

① 若对 $\forall x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；

② 若对 $\forall x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数．

从几何特征来说，偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称．

例如：$y=x^2,y=x^4,y=\cos x$ 等都是偶函数；而 $y=x^3,y=\sin x$ 等都是奇函数．

对于定义域相同的函数来说，有如下结论：

偶（奇）函数的和仍为偶（奇）函数；

两个偶（奇）函数的积为偶函数；

一偶一奇两个函数的积为奇函数．

但是，不是任何函数都有奇偶性的，如：$y=x+1$ 既不是奇函数也不是偶函数．

（4）函数的周期性　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在常数 $T>0$，使得对 $\forall x\in D$，有 $x\pm T\in D$，并且有 $f(x\pm T)=f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，并称 T 是函数 $f(x)$ 的**一个周期**．

值得注意的是：一个函数如果是周期函数的话，它就有无穷多个周期，我们通常所说的周期，是指它的最小的正周期．

周期函数一定存在**一个周期**，它的几何特征是：以一个周期为跨度，把曲线划断，各段曲线再移到一起，它们完全重合．

可是，周期函数不一定存在最小正周期．比如：$y=2$ 就是一个以任意正实数为**一个周期**的周期函数，由于不存在最小正实数，所以 $y=2$ 不存在周期．

五、初等函数

1．基本初等函数

下列六种函数统称为基本初等函数．

（1）常数函数 $y=c$（c 为常数），其图形为一条平行或重合于 x 轴的直线．

（2）幂函数 $y=x^{\alpha}$（α 为实数），其在第一象限内的图形如图 1-8 所示．

（3）指数函数 $y=a^x$（$a>0,a\neq1$），定义域为 **R**，值域为$(0,+\infty)$，图形如图 1-9(a) 所示．

（4）对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq1)$，定义域$(0,+\infty)$，值域为 **R**，图形如图 1-9(b)

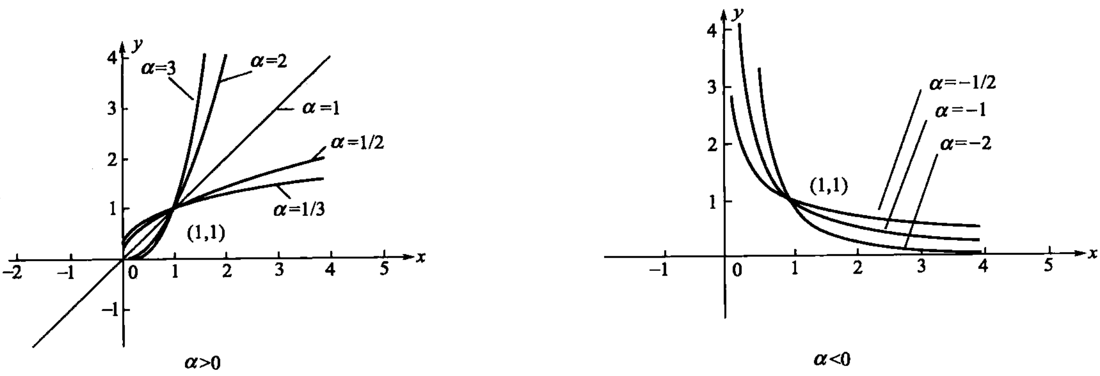

图 1-8

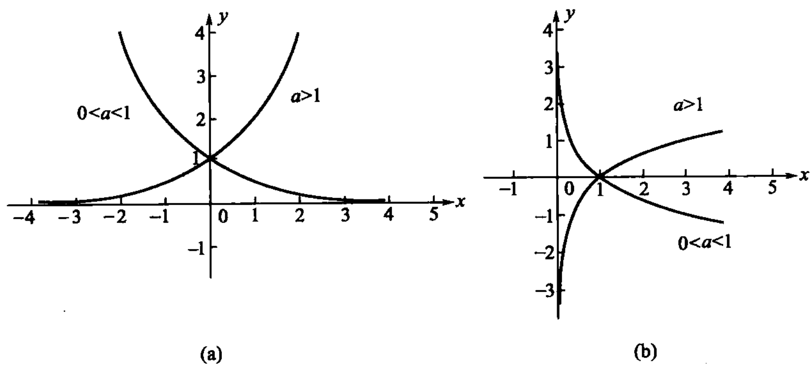

图 1-9

所示.

(5) 三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$，其中正弦函数 $y=\sin x$ 和余弦函数 $y=\cos x$ 的定义域都为 $\mathbf{R}$，值域都为$[-1,1]$，正切函数 $y=\tan x$ 的定义域为$\left\{x \mid x\in\mathbf{R},\text{且 } x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z\right\}$，值域为 $\mathbf{R}$，这三个函数的图形如图 1-10 所示.

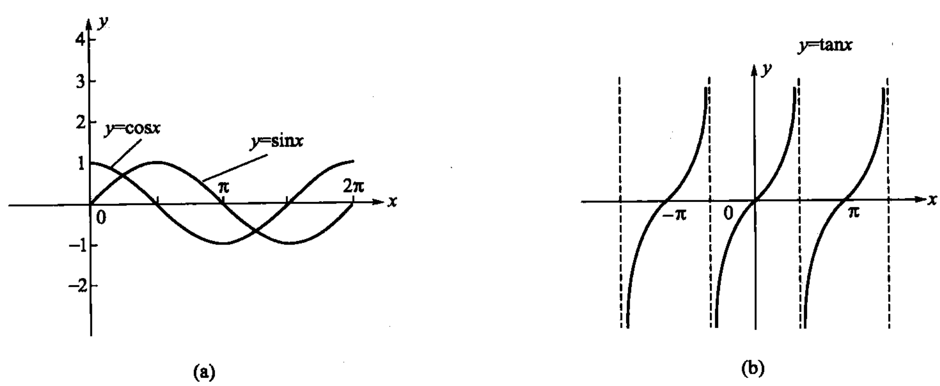

图 1-10

(6) 反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$，其中反正弦函数

$y=\arcsin x$ 与反余弦函数 $y=\arccos x$ 的定义域都为 $[-1,1]$，值域分别为 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 和 $[0,\pi]$. 反正切函数 $y=\arctan x$ 的定义域 $\mathbf{R}$，值域为 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，这三个函数的图形如图 1-11所示.

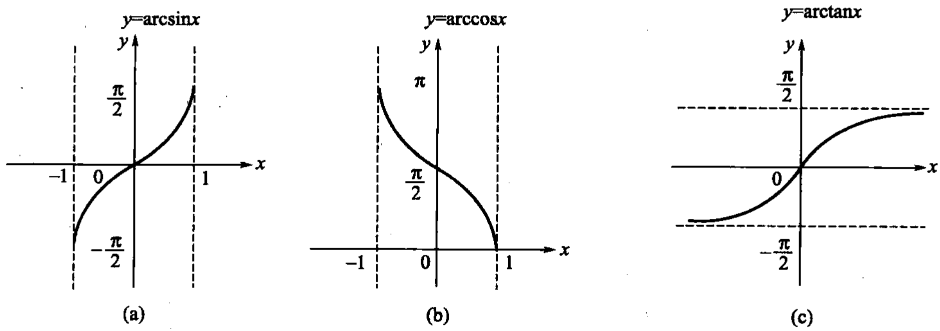

图 1-11

2. 复合函数

在日常生活或生产实践中，表现事物之间的关系往往是错综复杂的，因此在数学中表示自然规律、生产规律的函数结构也是复杂的. 通常情况下，我们遇到的函数往往不是基本初等函数，而是由这些基本初等函数所构造的较为复杂的函数. 也就是说需要把两个或两个以上的函数组合成另一个新的函数.

如由 $y=\sqrt{u}$，$u=1-x^2$，当 $|x|\leqslant 1$ 时，通过变量 u 就建立了变量 x 与变量 y 之间的对应关系，即 $y=\sqrt{1-x^2}$，$|x|\leqslant 1$；这时称 y 是 x 的复合函数.

定义 2　设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，函数 $u=\varphi(x)$ 的值域是 R_y，当 $D_f\cap R_y\neq\varnothing$ 时，$\forall x\in D_{fo y}=\{x|x\in R_y,\varphi(x)\in D_f\}$，有函数 $\varphi(x)$ 的值在 D_f 的范围内，这样通过变量 u 就得到 y 与 x 之间的对应关系，称为**复合函数**. 记为

$$y=f\{\varphi(x)\}\quad x\in D_{foy}$$

其中，y 是因变量，u 是中间变量，x 是自变量.

按定义的要求可知，构建复合函数的前提条件就是：**内层函数的值域与外层函数的定义域的交不空**. 也就是说，内层函数必须有函数值落在外层函数的定义域内. 否则就会成为无意义的函数.

比如：$y=\sqrt{u}$，$u=\sin x-2$，复合起来 $y=\sqrt{\sin x-2}$ 在实函数范围内就无意义了.

例 6　设 $f(x)=\dfrac{2}{2-x}$，求 $f[f(x)]$.

解　$f[f(x)]=\dfrac{2}{2-f(x)}=\dfrac{2}{2-\dfrac{2}{2-x}}=\dfrac{2-x}{1-x}$

它的定义域是 $(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$.

例 7　$y=\sqrt{2+\sin(1+\ln x)}$ 是由以下简单函数

$$y=\sqrt{u},u=2+\sin v,v=1+\ln x \text{ 复合而成的.}$$

有时在实际应用中既要知道由简单函数构造成复合函数，同时也要会从复合函数中分解

为简单函数.

3. 反函数

函数反映的是因变量随着自变量的变化而变化的规律，用另一种语言来说的话，就是：**有两个变量，一个是主动变量（自变量 x），另一个是被动变量（因变量 y），主动变量一旦取定了，被动变量也相继唯一确定.** 但是变量之间的制约是相互的，在我们研究的不同领域里，经常需要更换这两个变量的主次关系，当这种主次关系对换后，仍然成为函数关系，这就是我们所要介绍的反函数.

设函数 $y=f(x)$ 的定义域是 D_f，值域是 R_f，若对 $\forall y\in R_f$，有唯一的一个 $x\in D_f$，使得 $f(x)=y$. 这就定义了 R_f 上的一个函数，此函数称为 $y=f(x)$ 的反函数. 记为 $x=f^{-1}(y)$，$y\in R_f$. 这时 $y=f(x)$ 称为**直接函数**.

由反函数的定义不难发现，$y=f(x)$ 存在反函数当且仅当 f 是 D_f 到 R_f 的一一对应关系，并且反函数的定义域是直接函数的值域，反函数的值域是直接函数的定义域.

当我们把反函数与直接函数的图像描在同一坐标系下（直角坐标系），我们会发现，两图关于直线 $y=x$ 对称.

在数学上，我们总习惯用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，为了满足习惯记法的需要，最后我们会把反函数 $x=f^{-1}(y)$ 记为 $y=f^{-1}(x)$.

既然这样，在几何上，直接函数与其反函数有何关系呢？其实它们的图像关于直线 $y=x$ 对称.

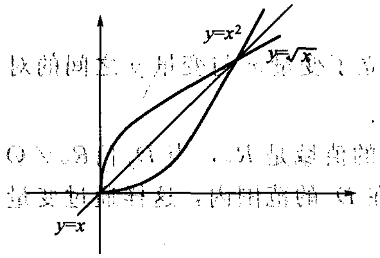

图 1-12

通常把反函数记为 $y=f^{-1}(x)$，$f(x)$ 与 $f^{-1}(x)$ 互为反函数. 它们在同一直角坐标系下是关于直线 $y=x$ 对称的.

例如：

$$y=f(x)=x^2,\ x\in[0,+\infty)$$

$$y=f^{-1}(x)=\sqrt{x},\ x\in[0,+\infty)$$

（如图 1-12）.

4. 初等函数

前面已经说过，在实际问题中我们遇到的不仅是基本初等函数，而且往往是较为复杂的函数，也就是指初等函数.

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合运算得到的，并能用一个解析式表示的函数称为初等函数.

如：$y=\sqrt[3]{x^2-1}+\lg(1+x)-\sin[\ln(x^3-2)]$. 在高等数学中讨论的函数主要是初等函数.

5. 建立函数关系举例

运用函数解决实际问题，通常先要找到这个实际问题中的变量与变量之间的依赖关系，然后把变量间的这种依赖关系用数学解析式表达出来（即建立函数关系），最后进行分析、计算.

例 8 如图 1-13，从边长为 a 的正三角形铁皮上剪一个矩形，设矩形的一条边长为 x，周长为 P，面积为 A，试分别将 P 和 A 表示为 x 的函数.

解 设矩形的另一条边长为 $\frac{a-x}{2}\tan 60°=\frac{\sqrt{3}(a-x)}{2}$

该矩形周长 $P=\sqrt{3}(a-x)+2x=(2-\sqrt{3})x+\sqrt{3}a$，$x\in(0,a)$

矩形面积 $A=\frac{\sqrt{3}(a-x)}{2}x=\frac{\sqrt{3}}{2}ax-\frac{\sqrt{3}}{2}x^2$，$x\in(0,a)$

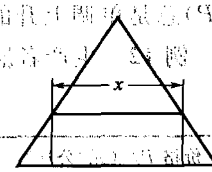

图 1-13

例 9 电力部门规定，居民每月用电不超过 30 度（kW·h，下同）时，每度电按 0.5 元收费，当用电超过 30 度但不超过 60 度时，超过的部分每度按 0.6 元收费，当用电超过 60 度时，超过部分按每度 0.8 元收费，试建立居民月用电费 G 与月用电量 W 之间的函数关系.

解 当 $0\leqslant W\leqslant 30$ 时，$G=0.5W$

当 $30<W\leqslant 60$ 时，$G=0.5\times 30+0.6\times(W-30)=0.6W-3$

当 $W>60$ 时，$G=0.5\times 30+0.6\times 30+0.8\times(W-60)=0.8W-15$

所示
$$G=f(W)=\begin{cases}0.5W & 0\leqslant W\leqslant 30\\ 0.6W-3 & 30<W\leqslant 60\\ 0.8W-15 & W>60\end{cases}$$

六、经济与商务中的几个常用函数

1. 需求函数

需求是指消费者在一定的价格水平上对某种商品的有支付能力的需要. 因此，需求是以消费者货币购买力为前提，它相对应商品的某一价格水平而言. 人们对某一商品的需求受许多因素的影响，如价格、收入、替代品、偏好等. 一般研究中，需求主要是价格的函数，记为 $Q=D(P)$，其中 P 表示价格，Q 表示需求量，D 表示某个函数对应法则. 依实际意义，需求函数 $Q=D(P)$ 总是单调下降的，一般存在反函数，其反函数 $P=D^{-1}(Q)$ 也称为需求函数.

例 10 已知某地区每月对某型号电视机的需求量 Q（架）与价格 P（千元）的函数关系为
$$Q=65+\frac{125}{(P-0.3)^2}\quad(1\leqslant P\leqslant 2)$$

例 11 市场上小麦的需求量（每月）如表 1-1.

表 1-1

价格 P/（元/公斤）	1	2	3	4	5	6	7	8
需求量 Q/百万公斤	30	25	20	15	12	10	9	8

注：1 公斤 = 1 千克，下同.

画出需求函数的曲线，见图 1-14.

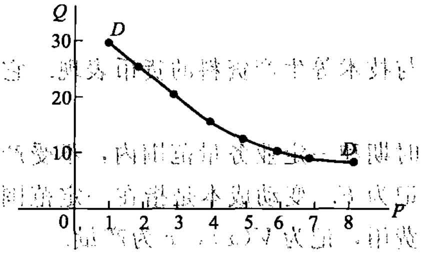

图 1-14

这条曲线说明，小麦的需求量是价格的减函数，即当 P 增加时，Q 下降. 这一性质在经济学称为**需求下倾斜规律**.

2. 供给函数

供给函数是生产者或销售者在一定价格水平上提供给市场的商品量.

供给量受诸多因素的影响. 一般而言，它主要是价格的函数，记为 $Q=S(P)$. 依实际意义，供给函数 $Q=$

$S(P)$总是单调上升的，一般存在反函数，其反函数 $P=S^{-1}(Q)$也称为供给函数.

例 12 生产者愿意提供的小麦数量如表 1-2 所示（每月）. 画出图，见图 1-15.

表 1-2

价格 P/（元/公斤）	1	2	3	4	5	6	7	8
供给量 Q/百万公斤	0	2	4	5	7	10	16	25

这条供给曲线向上倾斜，说明当小麦的价格较高时，农民愿意并有能力增加小麦的产量. 这一性质在经济学称为**供给向上倾斜规律**.

现在把例 11 与例 12 所给需求曲线与供给曲线结合起来分析，如图 1-16.

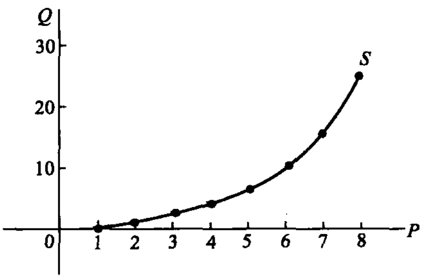

图 1-15

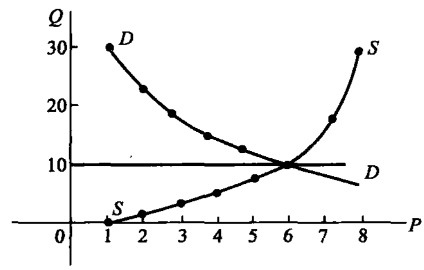

图 1-16

需求曲线 $Q=D(P)$与供给曲线 $Q=S(P)$相交处的价格 $P=6$（元），在这一个价格上，消费者愿意购买的小麦量为 10（百万公斤），生产者愿意提供小麦的数量为 10（百万公斤），两者处于平衡状态. 这时 $P=6$（元）称为它们的均衡价格.

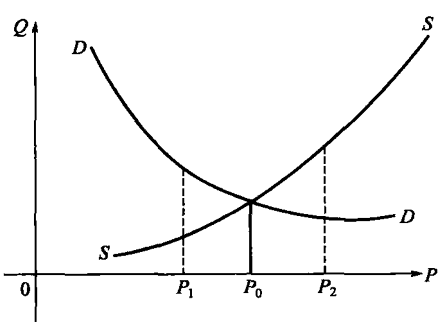

图 1-17

需求曲线 $Q=D(P)$与供给曲线 $Q=S(P)$相交处的价格 P_0称为**均衡价格**（如图 1-17）.

在 P_1处，商品供不应求，商品的价格将提高. 在 P_2处，供过于求，商品价格有下降的趋势. 在 P_0处. 供给量等于需求量，价格平衡.

这里需要说明的是在需求函数和供给函数中的作为自变量的价格 P 并不一定按实数值连续变化的. 如例 11 和例 12 中 P 限制在某个范围且仅取正整数值. 我们在研究时为方便，将其连续化，并给出相应的近似拟合的解析表达式，由此所得的结果是实际情形的近似. 在经济与商务分析中所应用大部分函数都有类似情况.

3. 成本函数

成本是指生产制造产品所投入的原材料、人的劳动力与技术等生产资料的货币表现. 它是产量的函数，记为 $C(x)$，其中 x 为产量.

成本包括固定成本和变动成本. 固定成本是指在一定时期和一定业务量范围内，不受产量增减变动影响的成本. 例如厂房、机器、管理等费用，记为 F. 变动成本是指在一定范围内随产量数量变化而变化的成本. 例如，原材料、燃料等费用，记为 $V(x)$，x 为产量.

一定时期的总成本函数为：

$$C(x)=F+V(x)$$

单位成本函数（也称为平均成本函数）为：

$$\overline{C}(x)=\frac{C(x)}{x}=\frac{F}{x}+\frac{V(x)}{x}$$

4. 收益函数与利润函数

销售收益是生产者出售一定量的产品所得到的全部收入，记为 R.

当在销售过程中价格不动，则销售收益等于产品单价 P 与销售量 Q 的乘积，即

$$R=PQ$$

当把销售量看成是价格的函数时，即 $Q=D(P)$（需求函数），则有

$$R=PD(P)$$

即收益函数是价格的函数.

当把价格看成是销售量的函数，设销售量为 x，单价为 $P(x)$，则销售收益为

$$R=P(x)x$$

即销售收益是销售量的函数. $R(x)$也称为收益函数.

单位收益函数为

$$\overline{R}(x)=\frac{R(x)}{x}=\frac{xP(x)}{x}=P(x)$$

在成本函数中，当产量 x 等于销售量时，总利润函数为

$$L(x)=R(x)-C(x)$$

第二节　数列的极限

从极限产生的历史背景来看，极限是从解决微分学与积分学的实际问题中产生的. 在人们的日常生活中，经常用到这样的描述：用市场变化趋势来研究产品需求量的状况；用学校发展的趋势来分析学校未来的前途等，这种趋势用在数学上就是极限，**极限是变量变化的终极状态**.

极限是微积分学中一个基本概念，微分学与积分学的许多概念都是由极限引入的，并且最终由极限知识来解决. 因此它在微积分学中占有非常重要的地位.

一、极限概念的引入

我国春秋战国时期的《庄子 · 天下篇》中说："一尺之棰，日取其半，万世不竭"，这就是极限的最朴素思想.

在这个过程中可以试想一下，一根棒子，每天取其一半，尽管永远取不完，可到了一定的时候，还能看得见吗？看不见意味着什么？不就是没了吗？终极的时候，就彻底地没有了. 它的终极状态就是零. 那么我们如何去理解这个终极状态和零呢？

公元 3 世纪，我国数学家刘徽的割圆术，就是用圆内接正多边形的周长逼近圆的周长的极限思想来近似计算圆周率 π 的. 他说："割之弥细，所失弥少，割之又割，以致不可再割，则与圆合体而无所失矣！"

直到 17 世纪 60 年代～18 世纪初，牛顿（Newton，1642—1727）和莱布尼兹（Leib-