数理化自学丛书

代数

第三册

数理化自学丛书
代　数（第三册）
数理化自学丛书编委会
数学编写小组编
（原上海科技版）
上海人民出版社出版
（上海绍兴路5号）
新华书店上海发行所发行　上海商务印刷厂印刷
开本787×1092 1/32　印张12.25　字数270,000
1963年12月第1版　1977年11月新1版　1977年11月第1次印刷
统一书号：13171·218　定价：0.81元

第一章 不 等 式

在日常生活、生产实际和科学研究中，我们不但要考察量与量之间的相等关系，也要考察量与量之间的不等关系．反映在数学里，我们不但要研究等式，并且也要研究不等式．

在代数第二册里，我们曾学习过关于不等式的一些初步知识．这一章里，我们将在复习这些知识的基础上，系统地学习关于不等式的知识．

§1·1 不等式的概念

1．实数大小的比较 我们知道，两个实数 a 与 b 之间，总存在，而且只存在，下面三种关系中的一种：

(1) a 大于 b，记做 $a>b$；

(2) a 小于 b，记做 $a<b$；

(3) a 等于 b，记做 $a=b$．

我们还知道，要比较两个实数 a 和 b 的大小，只要考察它们的差就可以了，就是：

如果 $a-b$ 是正的，那末 $a>b$，如果 $a-b$ 是负的，那末 $a<b$，如果 $a-b$ 是零，那末 $a=b$；

反过来，如果 $a>b$，那末 $a-b$ 是正的，如果 $a<b$，那末 $a-b$ 是负的，如果 $a=b$，那末 $a-b$ 是零．

用式子来表示，就是：

设 a，b 为两实数，

$$\text{如果}\quad a-b\begin{cases}>0,\\<0,\\=0,\end{cases}\quad\text{那末}\quad a\begin{cases}>b,\\<b,\\=b;\end{cases}$$

$$\text{反过来，如果}\quad a\begin{cases}>b,\\<b,\\=b,\end{cases}\quad\text{那末}\quad a-b\begin{cases}>0,\\<0,\\=0.\end{cases}$$

在上面所讲的式子里，$a>b$ 和 $a<b$ 这两个式子是用不等号“>”和“<”把两个实数 a 和 b 联结起来构成的，它们都叫做**不等式**；$a=b$ 是用等号“=”把两个实数 a 和 b 联结起来构成的，它叫做**等式**.

2．代数式的值的大小比较 有时候，我们也要比较两个代数式的值的大小．这时，可以根据一个代数式的值大于、小于、或者等于另一个代数式的值，而分别用符号“>”，“<”，或者“=”把它们联结起来．在前两种情况下，就组成了不等式；在后一种情况下，就组成了等式．例如

$$3+2>4,\quad a+1<a+2$$

等等都是不等式；

$$3+2=5,\quad (a+1)^2=a^2+2a+1$$

等等都是等式.

因为单独用一个字母或数字所表示的数，也可以看做是代数式，所以我们说：

用不等号“>”或者“<”把两个代数式联结起来所成的式子叫做**不等式**；用等号“=”把两个代数式联结起来所成的式子，叫做**等式**.

象比较两个实数的大小一样，比较两个代数式的值的大小，也只要考察它们的差就可以了.

例1． 比较 $(x+3)(x-5)$ 和 $(x+2)(x-4)$ 的大小.

【解】 $(x+3)(x-5)-(x+2)(x-4)$

$$=(x^2-2x-15)-(x^2-2x-8)$$

$$=-7<0,$$

$$\therefore\quad (x+3)(x-5)<(x+2)(x-4).$$

例 2. 比较$(x^2+1)^2$和x^4+x^2+1的大小.

【解】 $(x^2+1)^2-(x^4+x^2+1)$

$$=(x^4+2x^2+1)-(x^4+x^2+1)$$

$$=x^2.$$

(1) 如果 $x=0$, 那末 $x^2=0$, 这时有

$$(x^2+1)^2-(x^4+x^2+1)=0,$$

$$\therefore\quad (x^2+1)^2=x^4+x^2+1.$$

(2) 如果 $x\neq0$, 因为不等于零的任何实数的平方都是正数, 所以 $x^2>0$. 这时有

$$(x^2+1)^2-(x^4+x^2+1)>0,$$

$$\therefore\quad (x^2+1)^2>x^4+x^2+1.$$

注 上面这两种情况, 合在一起可以写做

$$(x^2+1)^2\geqslant x^4+x^2+1.$$

这个式子表示$(x^2+1)^2$的值不小于x^4+x^2+1的值.

象这种用符号"$\geqslant$"(读做大于或等于)或者"$\leqslant$"(读做小于或等于)把两个代数式联结起来的式子, 也叫做不等式. 为了区别, 我们把用符号"$>$"或者"$<$"联结而成的不等式叫做**严格不等式**, 而用符号"$\geqslant$"或者"$\leqslant$"联结而成的不等式叫做**非严格不等式**.

例 3. 比较$(a-1)^2$和a^2+1的大小.

【解】 $(a-1)^2-(a^2+1)=(a^2-2a+1)-(a^2+1)$

$$=-2a.$$

因为字母 a 可能表示正数或负数, 也可能表示零, 所以要分做三种情况来考察:

(1) 如果 a 是正数, 那末 $-2a$ 就是负数, 这时有

$$(a-1)^2<a^2+1.$$

(2) 如果 a 是负数，那末 $-2a$ 就是正数，这时有

$$(a-1)^2>a^2+1.$$

(3) 如果 a 是零，那末 $-2a$ 也是零，这时有

$$(a-1)^2=a^2+1.$$

上面讨论的三种情况，合在一起可以写做

$$(a-1)^2\begin{cases}<a^2+1 & \text{如果 } a>0,\\ >a^2+1 & \text{如果 } a<0,\\ =a^2+1 & \text{如果 } a=0.\end{cases}$$

习　题　1·1

比较下列各题中两个代数式的值的大小：

1. $(a-5)(a-7)$和$(a-6)^2$.

2. $(a+1)(a^2-a+1)$和$(a-1)(a^2+a+1)$.

3. $(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$ 和 $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$, $(x\neq 0)$.

4. a^2+b^2和$2ab$.

[提示：按照 $a=b$ 或者 $a\neq b$ 分别考察.]

5. $(\sqrt{x}-1)^2$和$(\sqrt{x}+1)^2$.

§1·2　绝对不等式和条件不等式

在上节的例1中，我们看到不论字母 x 表示什么实数，不等式

$$(x+3)(x-5)<(x+2)(x-4)$$

总能成立．在例2中，我们看到当 $x\neq 0$ 的时候，不等式

$$(x^2+1)^2>x^4+x^2+1$$

才能成立，而当 $x=0$ 的时候，这个不等式就不成立。

如果不论用什么数值代替不等式中的字母，它都能够成立，这样的不等式叫做**绝对不等式**. 如果只有用某些范围内的数值代替不等式中的字母，它才能够成立，这样的不等式叫做**条件不等式**.

例如，不等式

$$(x+3)(x-5)<(x+2)(x-4)$$

和

$$a+1>a-2$$

都是绝对不等式；而不等式

$$(x^2+1)^2>x^4+x^2+1$$

和

$$(a-1)^2<a^2+1$$

都是条件不等式.

两边都不含有字母而能够成立的不等式，也叫做绝对不等式. 例如

$$5>3, \quad -5<-3$$

等等，都是绝对不等式.

例 1. 判断下列这些不等式中，哪些是绝对不等式，哪些是条件不等式？哪些不能成立？

(1) $\sqrt{2}>1.4$;　　　(2) $x^2+1>0$;

(3) $x^2+1<0$;　　　(4) $x+1<0$.

【解】 (1) 因为不等式 $\sqrt{2}>1.4$ 的两边都不含有字母，并且 $\sqrt{2}=1.414\cdots$ 的值确实大于 1.4，所以这个不等式是绝对不等式.

(2) 因为不论 x 是什么实数，x^2 都不是负数，因此 x^2+1 的值总大于零. 这就是说，不论 x 是什么实数，不等式 $x^2+1>0$ 总能成立，所以这个不等式是绝对不等式.

(3) 因为不论 x 是什么实数，x^2+1 的值总大于零，所以不论用什么数值代替 x，不等式 $x^2+1<0$ 都不能成立.

(4) 因为只有用比 -1 小的值代替 x, 不等式 $x+1<0$ 才能成立,所以这个不等式是条件不等式.

在含有字母的不等式中，求出字母应当取什么范围内的数值才能使不等式成立，这个手续叫做**解不等式**. 这里的字母叫做不等式的未知数，所求出的使不等式能够成立的未知数的那些数值范围,叫做**不等式的解**.

从上面所举的例子中，可以看到不等式的解可能有三种不同情况:

(1) 任何实数都是不等式的解：例如任何实数都是不等式 $x^2+1>0$ 的解. 这种不等式就是绝对不等式.

(2) 只有某些范围内的实数是不等式的解：例如只有比 -1 小的实数是不等式 $x+1<0$ 的解. 这种不等式就是条件不等式.

(3) 任何实数都不是不等式的解：例如任何实数都不是不等式 $x^2+1<0$ 的解. 通常我们说这个不等式没有解.

例 2. 通过观察,确定下列各不等式的解:

(1) $x^2<0$; (2) $(x-1)^2>0$; (3) $(x-1)^2+1>0$.

【解】 (1) 不论 x 是什么实数，x^2 的值不能小于零，这个不等式没有解.

(2) 只要 $x\neq1$, $(x-1)^2$ 的值总大于零,所以这个不等式的解是除去 $x=1$ 以外的全体实数,也就是

$$x<1 \quad 或者 \quad x>1.$$

(3) 不论 x 是什么实数,$(x-1)^2$的值都不能是负数,因此 $(x-1)^2+1$ 的值总大于零.所以这个不等式的解是全体实数.

习 题 1·2

1. 应用比较不等式左右两边两个代数式值的大小的方法，证明下

422389

列各不等式是绝对不等式:

(1) $(x+1)(x-5)<(x-2)^2$;

(2) $(a+1)\left(a^2+\frac{1}{2}a+1\right)>\left(a+\frac{1}{2}\right)(a^2+a+1)$.

2. 通过观察,确定下列各不等式的解:

(1) $x^2>0$;　　(2) $(x+1)^2<0$;

(3) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$;　　(4) $(x+1)^2>0$.

3. 把下列不等式中左边的式子先配方化成$(x+m)^2+k$的形式,再确定它的解:

(1) $x^2-2x+3>0$;　　(2) $x^2-x+1<0$;

(3) $x^2+3x+\frac{9}{4}>0$;　　(4) $x^2+x+\frac{1}{4}<0$.

§1·3 不等式的基本性质

对于等式来说,我们已经知道它具有下面这些基本性质:

(1) 如果 $a=b$, 那末 $b=a$; 反过来, 如果 $b=a$, 那末 $a=b$. (相等的对称性)

(2) 如果 $a=b$, $b=c$, 那末 $a=c$. (相等的传递性)

(3) 如果 $a=b$, 那末 $a+c=b+c$.

(4) 如果 $a=b$, 那末 $ac=bc$.

类似地,不等式也有下面这些基本性质:

性质 1. 如果 $a>b$, 那末 $b<a$; 反过来, 如果 $b<a$, 那末 $a>b$.

这个性质叫做**不等的对逆性**. 利用这个性质, 以后当我们研究不等式的时候,只需研究用一种不等号(例如用大于号“$>$”)联结起来的不等式的性质,就可以推出用另一种不等号(例如用小于号“$<$”)联接起来的不等式所具有的类似性质.

性质 2. 如果 $a>b$, $b>c$, 那末 $a>c$.

这个性质叫做**不等的传递性**. 利用这个性质，我们可以从一个不等式过渡到另一个不等式.

例如，从不等式 $\pi>3$ 和 $3>2\sqrt{2}$, 可以得出不等式

$$\pi>2\sqrt{2}.$$

性质 3. 如果 $a>b$, 那末 $a+c>b+c$.

这个性质指出：不等式的不等号两边加上一个相同的数，仍旧得到一个不等式，并且这个不等式与原来的不等式有相同的不等号.

例 1. 已知 $a+b>c$, 求证 $a>c-b$.

【证明】 在不等式 $a+b>c$ 的不等号两边同加上 $-b$, 得

$$a+b+(-b)>c+(-b),$$

$$\therefore\quad a>c-b.$$

这个例子指出：不等式中任何一项可以把它的符号变成相反的符号后，从一边移到另一边.

过去我们在解一元一次不等式的时候，就经常应用到这一法则(移项法则).

例 2. 解不等式 $3x-1>2x$.

【解】 把不等式中含有 x 的项移到不等号的左边，常数项移到不等号的右边得

$$3x-2x>1.$$

$$\therefore\quad x>1.$$

上面关于不等式的三个基本性质，都是很明显的. 现在我们进一步来研究在一个不等式的不等号两边同乘以一个数(正数、负数、或者零)的时候，将会产生怎样的结果. 我们先来看下面的例子.

例 3. 已知 $a>b$, 比较 ac 和 bc 的大小.

分析 要比较 ac 和 bc 的大小，只要考察它们的差 $ac-bc$，就是 $(a-b)c$ 是什么样性质的数就可以了．根据已知条件 $a>b$，可以知道差的一个因式 $a-b$ 一定是正数，因此，差 $(a-b)c$ 是正数、负数或者是零，要根据 c 是正数、负数或零来确定．

【解】 $$ac-bc=(a-b)c.$$

$$\because \quad a>b, \quad \therefore \quad a-b \text{ 是正数}.$$

(1) 如果 c 是正数，那末因为两个正数的积仍是正数，所以 $(a-b)c>0$，这时 $ac>bc$．

(2) 如果 c 是负数，那末因为一个正数与一个负数的积是负数，所以 $(a-b)c<0$，这时 $ac<bc$．

(3) 如果 c 等于零．那末 $(a-b)c$ 等于零，所以

$$ac=bc.$$

上面的例子，指出了不等式的第四个基本性质．

性质 4． 如果 $a>b$，那末

$$ac\begin{cases} >bc & (\text{当 } c>0 \text{ 的时候}), \\ =bc & (\text{当 } c=0 \text{ 的时候}), \\ <bc & (\text{当 } c<0 \text{ 的时候}). \end{cases}$$

过去，我们在解一元一次不等式的时候，也经常应用到这个性质．

例 4． 解不等式：

$$2(x+1)+\frac{x-2}{3}>\frac{7x}{2}-1.$$

【解】 在不等式的两边同乘以 6．得

$$12(x+1)+2(x-2)>21x-6,$$

就是 $$14x+8>21x-6.$$

移项，得

$$14x-21x>-6-8,$$

就是 $$-7x>-14.$$

在上式的两边同除以$-7\left(就是乘以-\frac{1}{7}\right)$，得

$$x<2.$$

答：原不等式的解是$x<2$.

为了讲法上的方便，当同时研究两个或几个不等式的时候，如果这些不等式里，每一个的左边都大于右边，或者每一个的左边都小于右边，那末就把这些不等式叫做**同向**不等式．例如不等式

$$3x-1>2x, \quad 3x-2x>1 \quad 和 \quad x>1$$

是同向不等式．如果两个不等式里，一个不等式的左边大于右边，而另一个不等式的左边小于右边，那末就把这两个不等式叫做**异向**不等式．例如不等式

$$-7x>-14 \quad 和 \quad x<2$$

是异向不等式．

这样，我们也可把不等式的基本性质4说成：

不等式的两边同乘以一个正数，那末得到和原不等式同向的不等式；如果同乘以一个负数，那末得到和原不等式异向的不等式；如果同乘以零，那末得到一个等式．

注意 等式的两边同乘以一个相同的数，不论是正数、负数或者零，结果总是一个等式，但不等式的两边同乘以一个相同的数，就须要根据乘数的性质来确定它的结果．

所以在应用不等式的这一性质的时候，首先必须要考察用来乘不等式两边的数（或者代数式的值）究竟是正数，是负数，还是零，否则就容易发生错误．

*例5． 解关于x的不等式

$$mx-2>x-3m. \tag{1}$$

【解】 移项得

$$(m-1)x>2-3m. \tag{2}$$

因为 $m-1$ 可能是正数或负数，也可能是零，所以需要研究三种情况：

(1) $m-1>0$，这时 $m>1$．在不等式(2)的两边同乘以正数 $\frac{1}{m-1}$，得

$$x>\frac{2-3m}{m-1}.$$

(2) $m-1<0$，这时 $m<1$．在不等式(2)的两边同乘以负数 $\frac{1}{m-1}$，得

$$x<\frac{2-3m}{m-1}.$$

(3) $m-1=0$，即 $m=1$．这时不等式(2)成为

$$0x>-1$$

的形式．很明显，不论 x 是什么实数，这个不等式都能成立．

综合上面三种情况，我们得到不等式(1)的解是：

$$x\begin{cases}>\dfrac{2-3m}{m-1}, & \text{如果 } m>1, \\ <\dfrac{2-3m}{m-1}, & \text{如果 } m<1, \\ \text{是全体实数，如果 } m=1. & \end{cases}$$

习 题 1·3

1．求证：

(1) 如果 $a>b$，$b>c$，那末 $a>c$；

(2) 如果 $a>b$，$b=c$，那末 $a>c$；

(3) 如果 $a=b$，$b<c$，那末 $a<c$．

[解法举例：(1) $\because\ a>b,\ \ b>c.$

$$\therefore\ a-b>0,\ \ b-c>0.$$

今

$$a-c=(a-b)+(b-c).$$

因为两个正数的和仍旧是正数，所以 $a-c>0$，由此可知 $a>c$.]

2．(1) 如果 $a>b$，$c=d$，是否一定能得出 $ac>bd$，为什么？

(2) 如果 $ac>bc$，是否一定能得出 $a>b$，为什么？

(3) 如果 $a<b$，是否一定能得出 $ac^2<bc^2$，为什么？

(4) 如果 $ac^2<bc^2$，是否一定能得出 $a<b$，为什么？

(5) 如果 $\frac{a}{c^2}<\frac{b}{c^2}$，是否一定能得出 $a<b$，为什么？

[解法举例：(1) 不一定．因为 c 和 d 可能同时是正数，也可能同时是负数，也可能同时是零．根据不等式基本性质 4，只有在第一种情况下，才能得到 $ac>bd$ 这一结论.]

3．比较下列各组中两个代数式的值的大小：

(1) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$ 与 $6+2\sqrt{6}$；

(2) $(\sqrt{6}+1)^2$ 与 $6+2\sqrt{6}$；

(3) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$ 与 $(\sqrt{6}+1)^2$.

4．解下列各不等式，并且在数轴上表示出它们的解：

(1) $3[x-2(x-1)]<4x$；

(2) $5-\frac{x}{3}<\frac{7}{2}-\frac{4x+1}{8}$；

(3) $x-\frac{x-1}{2}>\frac{2x-1}{3}-\frac{x+1}{6}$；

(4) $(x-\sqrt{2})^2>(x+\sqrt{2})^2$；

(5) $5(x-1)-x(7-x)<x^2$；

(6) $(x+1)^2<(x-1)^2$；

(7) $(x^2+1)(2x-3)>(x^2+1)(3x-4)$；

*(8) $3x^2-2x<x^3-6$.

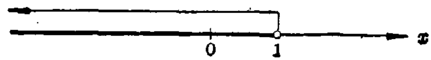
[解法举例：(7) $\because\ x^2+1>0$.

原不等式两边同除以 x^2+1，得

$$2x-3>3x-4,$$

移项得 $$-x>-1,\quad \therefore\ x<1.$$

将这个解表示在数轴上，如下图．它是从 1 这一点开始向左的那一部分数轴，但不包括 1 这一点.]



*5. 解下列关于 x 的不等式:

(1) $ax+b^2>bx+a^2\quad(a<b)$;

(2) $mx-n^3<nx-m^3\quad(m<n)$;

(3) $k(x-1)>x-2$;

(4) $(p-q)x<p^2-q^2\quad(p\neq q)$;

(5) $mx-3>2x+m$.

§1·4 一元一次不等式组

在解一些具体问题时，有时根据问题中的条件，未知数的数值范围，需要同时满足几个不等式. 例如：某天的天气预报，当天最低温度是摄氏 16 度，最高温度是摄氏 22 度，如果用 x 表示当天温度度数，那末 x 可以取值的范围，需要同时满足下面这两个不等式：

$$\begin{cases} x\geqslant 16, & (1)\\ x\leqslant 22. & (2)\end{cases}$$

我们说，不等式(1)和(2)组成一个**不等式组**.

不等式(1)的解，可用数轴上从表示数 16 的点 A 开始向右的射线 AX 来表示. 不等式(2)的解，可用数轴上从表示数 22 的点 B 开始向左的射线 BX' 来表示. 这两条射线的公共部分是线段 AB(图 1·1).

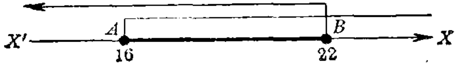


图 1·1

由此容易看到，如果 x 取大于或者等于 16 同时又小于或者等于 22 的一切数值，不等式(1)和(2)就都成立．x 的这个数值范围，就是 $16 \leqslant x \leqslant 22$，叫做这个不等式组的解．

一般地说：含有相同未知数的几个一元一次不等式所组成的不等式组，叫做**一元一次不等式组**．能使不等式组里的各个不等式都成立的未知数的值的范围，叫做这个**不等式组的解**．

从上面的例子可以看到，求不等式组的解，就是要找出不等式组里各个不等式的解的公共部分．

例 1．解下列各不等式组：

(1) $\begin{cases} x>3, \\ x>5; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x<3, \\ x<5; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x>3, \\ x<5; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x<3, \\ x>5. \end{cases}$

【解】

(1)

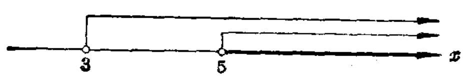


图 1·2

答：$x>5$．

(2)

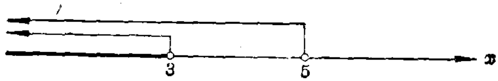


图 1·3

答：$x<3$．

(3)

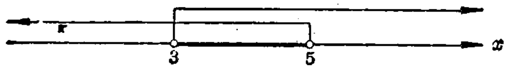


图 1·4

答：$3<x<5$。

(4)

图 1·5

答：没有解.

如果一个不等式组里的各个不等式比较复杂，那末可以先把它们化成 $x<a$ 或 $x>a$ 的形式，然后仿照例 1 那样来求出它们解的公共部分.

例 2. 解不等式组：

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{3}>-1, \\ 2(x-3)-3(x-2)<0. \end{cases}$$

【解】 原不等式组可以化成：

$$\begin{cases} x>-6, \\ x>0. \end{cases}$$

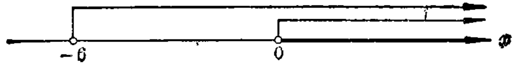


图 1·6

答：$x>0$。

例 3. 解不等式组：