广州市中学课本

数学

SHUXUE

初中三年级

目　录

第五章　圆

第六章　不等式

第七章　函数和它的图象

第五章　圆

第一节　圆的一些重要性质

5.1 圆和弧

我们已经知道，当一条线段绕着它固定的一端（如图5—1的O）在平面内旋转一周时，它的另一端就画出一条封闭的曲线，这条封闭的曲线叫做圆，固定的点叫做这个圆的圆心，连结圆心和圆上任意一点的线段（如OA、OA'、OA''）叫做圆的半径。

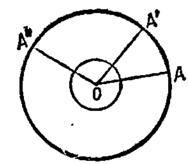


图5—1

圆用符号"⊙"来表示，以O为圆心的圆记作"$\odot O$"。

已知一个圆的圆心和半径，我们就可以用圆规作出这个圆。

从圆的形成，可以知道：

同圆的半径相等。

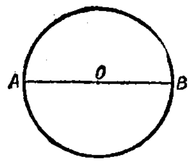


图5—2

如果两个圆的半径相等，那么把这两个圆的圆心重合在一起时，，这两个圆上所有的点就彼此完全重合，这样的两个圆叫做等圆。因此，等圆的半径相等。

经过圆心并且两个端点都在圆上的线段叫做圆的直径（如图5—2的AB）。

一个圆的直径等于它的半径的2倍。所以从同圆（或等圆）的半径相等，可以推出：

同圆（或等圆）的直径相等。

圆上任意两点间的部分叫做弧。弧用符号“⌒”来表示，以A和B为端点的弧记作$\overset{\frown}{AB}$（图5—3）。

同圆（或等圆）的两条弧可以象线段那样比较大小，同圆（或等圆）里，弧的和、差、正整数倍、等分的意义也和线段的相仿。

圆的任意一条直径的两个端点把圆分成两条相等的弧（图5—4），每一条这样的弧叫做半圆。

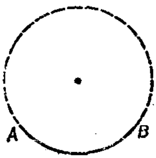


图5—3

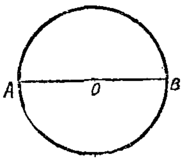


图5—4

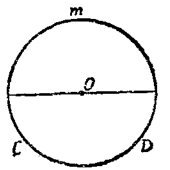


图5—5

小于半圆的弧，叫做劣弧（如图5—3中用实线表示的弧）；大于半圆的弧，叫做优弧（如图5—3中用虚线表示的弧）。通常单说弧的时候，总是指劣弧，如果指优弧，就要特别说明。例如，在图5—5中，如果单说$\overset{\frown}{CD}$，是指以C、D两点为端点的劣弧，图5—5中以C、D两点为端点的优弧要记成$\overset{\frown}{CmD}$。

练习三十六

1. 什么叫做弧？$\overset{\frown}{AB}$的长是不是A、B两点间的距离？为什么？

2. 圆是什么性质的对称图形？弧是不是对称图形？

3. 若圆的半径是r，一点到圆心的距离是l，如何判断这点是在圆内、圆上或圆外？

4. A、B两点相距12mm. 分别以A、B为圆心，10mm为半径作弧，使两弧相交于两点.求连结这两点的线段的长.

5.2 不在一直线上的三点确定一个圆

我们知道，经过两点可以作一条直线，并且只可以作一条直线，这就是说，两点确定一条直线. 那么，几点确定一个圆呢？

1. 先来看一看，经过一点A可以作几个圆（图5—6）.

很明显，以A点以外任意一点为圆心，以这点到A点的距离为半径所作的圆都经过A点（如图5—6的$\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$、$\odot O_4$）. 因此，经过一点可作无数个圆，这些圆的圆心可以任意选择.

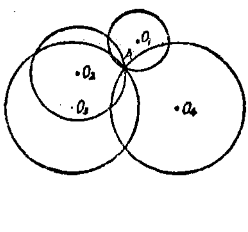


图5—6

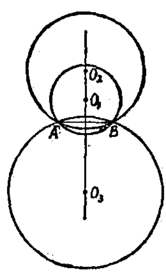


图5—7

2. 再来看一看，经过两点A和B可以作几个圆（图5—7）.

我们知道，在一条线段的垂直平分线上的点和这条线段两端的距离相等。根据这个性质可以知道，以 AB 线段的垂直平分线上的任何一点为圆心，以这点到A点（或者B点）的距离为半径所作的圆都经过A点和B点。因此，经过两点可以作无数个圆。

3。再看，经过三点A、B和C能作几个圆

（1）如果三点不在一直线上，则有下面的定理：

定理 不在一直线上的三点确定一个圆（就是说，经过不在一直线上的三点可以作一个圆，并且只可以作一个圆。）

已知：A、B、C三点不在一条直线上（图5—8）。

求证：①经过A、B、C可以作一个圆，②经过A、B、C只可以作一个圆。

证明：①连结AB、BC。分别作 AB、BC的垂直平分线MN、PQ。

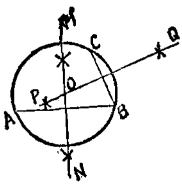


图 5 — 8

∵ A、B、C不在一条直线上，

∴ MN和PQ相交。设交点是O。

∵ $OA=OB$，$OB=OC$，

∴ $OA=OB=OC$，

∴ A、B、C在以O为圆心，以OA为半径的圆上。

∴ 经过A、B、C可以作一个圆。

②如果O'是经过A、B、C的圆的圆心。那么

$O'A=O'B$，$O'B=O'C$。

∴ O'既在MN上，又在PQ上，它就是MN和PQ的交点。

∵ MN和PQ只有一个交点。

∴ O'就是O，经过A、B、C的圆的圆心只有一个。

又∵ 这个圆的半径必须等于OA，

∴ 经过A、B、C只可以作一个圆。

（2）如果A、B、C三点在一条直线上（图5—9），那么AB和BC的垂直平分线MN和PQ平行，没有交点，所以找不到和A、B、C三点距离相等的点。因此，经过在一直线上的三点不能作圆。

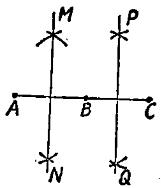


图5—9

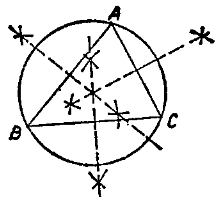


图5—10

因为三角形的三个顶点不在同一条直线上，所以经过三角形的三个顶点可以作一个圆，并且只可以作一个圆。

如果一个三角形的各个顶点都在一个圆上，那么这个三角形叫做这个圆的内接三角形，这个圆叫做这个三角形的外接圆，外接圆的圆心叫做这个三角形的外心，如图5—10，$\triangle ABC$是$\odot O$的内接三角形，$\odot O$是$\triangle ABC$的外接圆，O点是$\triangle ABC$的外心。

在图5—10中，$OA=OB=OC$，所以O点既在AB的垂直平分线上，又在BC的垂直平分线上，又在AC的垂直平分线上。由此可以得到：

定理 三角形三边的垂直平分线相交于一点，这点就是三角形的外心。

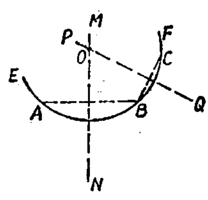


图5—11

例：求作一条已知弧的圆心。

已知：$\overset{\frown}{EF}$（图5—11）。

求作：$\overset{\frown}{EF}$的圆心。

作法：

1. 在$\overset{\frown}{EF}$上任意取三点A、B、C，连结AB和BC。

2. 分别作AB、BC的垂直平分线MN和PQ相交于O。O点就是所求作的圆心。

证明：$\because A$、B、C在$\overset{\frown}{EF}$上（所作），不在同一条直线上，

$\therefore$ A、B、C可确定一个圆（即过A、B、C可作并只可作一个圆），

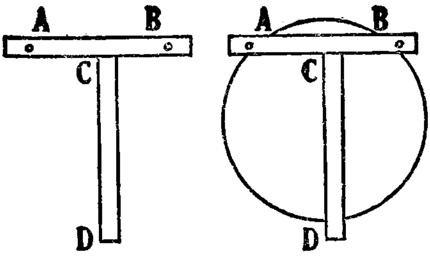
$\therefore$ $\overset{\frown}{EF}$是过A、B、C的圆的一部分。

$\because$ O是过A、B、C的圆的圆心，

$\therefore$ O点就是$\overset{\frown}{EF}$的圆心。

练习三十七

1. 画一个锐角三角形、一个直角三角形和一个钝角三角形，并且分别画出它们的外接圆（只要作出图形）。
2. 图(1)是一种找圆心的工具，A、B是两个凸起的圆钉，竖尺的一边CD垂直平分AB。按图(2)说明它的用法和道理（图见第7页）。
3. 已知半径，求作经过两个已知点的圆。
4. 画出边长为2 cm、1.5cm和2.2cm的三角形的外接圆。



（1）　　（2）

（第2题）

5.3 弧、弦、弦心距之间的关系

连结圆上任意两点的线段叫做弦（如图5—12）。圆心到一条弦的距离叫做这条弦的弦心距。如图5—12，$\odot O$ 中的 $OE \perp AB$，OE的长就是弦AB的弦心距。

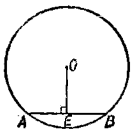


图5—12

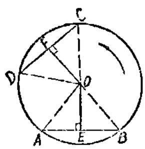


图5—13

现在，我们来研究弧、弦、弦心距之间的关系。

定理　在同圆或等圆中，如果弧相等，那么所对的弦相等，并且弦心距也相等。

已知：在$\odot O$中，$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$，$OE \perp AB$，$OF \perp CD$（图5—13）。

求证：$AB = CD$，$OE = OF$。

证明：连结OA、OB、OC、OD。把$\overset{\frown}{AB}$连同经过两

端的半径绕着圆心O，依箭头所指的方向旋转，使半径OA和半径OC重合。

$\because\quad \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$,

$\therefore\quad \overset{\frown}{AB}$和$\overset{\frown}{CD}$重合，弦$AB$和弦$CD$重合，弦心距$OE$和弦心距$OF$重合（从一点到一条直线只可以作一条垂线）。

$\therefore\quad AB=CD,\ OE=OF$。

上面是在同圆中来证明的。对于等圆来说，只要把两个圆叠合成一个圆，就和同圆的情形完全一样。以后遇到类似的问题，我们也只就同圆来研究。同理可证：

定理 在同圆或等圆中，如果弦相等，那么弦心距相等，并且弦所对的弧也相等。

定理 在同圆或等圆中，如果弦心距相等，那么弦相等，并且弦所对的弧也相等。

例 如图5—14，圆心O在$\angle A$的平分线上，$\odot O$在$\angle A$的两边上截得两条弦BC和DE。求证：

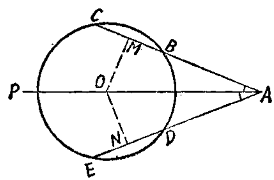


图5—14

$BC=DE$，$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{DE}$。

已知：圆心O在$\angle A$的平分线AB上，$\odot O$分别交$\angle A$的两边于B、C和D、E。

求证：$BC=DE$，$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{DE}$。

证明：作$OM\perp BC$，$ON\perp DE$，

$\because\quad O$点在$\angle A$的平分线AP上，

$\therefore\quad OM=ON$,

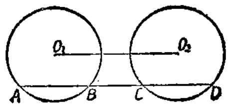
$\therefore\quad BC=DE$，$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{DE}$（在同圆中，弦心距相等的

弦相等，并且弦所对的弧也相等）。

练习三十八

1. 在圆形花坛中，要栽两行等长并且平行的花木，已栽好一行，怎样确定另一行的位置？
2. 如图，已知：$\odot O_1$和$\odot O_2$是等圆，$AD \parallel O_1O_2$，求证：$AB=CD$，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，

（第 1 题）



（第 2 题）

5.4 圆心角

顶点在圆心的角叫做圆心角，如图5—15的$\angle AOB$。

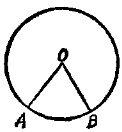


图 5—15

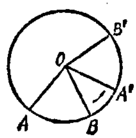


图 5—16

圆心角与它所对的弧之间有下面的关系：

定理 在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等。

已知：$\angle AOB$ 和$\angle A'OB'$都是$\odot O$的圆心角（图 5—16），它们所对的弧分别是$\overset{\frown}{AB}$和$\overset{\frown}{A'B'}$，并且$\angle AOB=$

$\angle A'OB'$。

求证： $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'}$。

证明： 把圆心角AOB连同它所对的弧依照图中箭头所指的方向旋转，使OA和OA'重合，$\overset{\frown}{AB}$顺着$\overset{\frown}{A'B'}$落下。因为$\angle AOB = A'OB'$，所以OB就和OB'重合，因此，$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'}$。

同理可证：

在同圆或等圆中，相等的弧所对的圆心角相等

我们知道，把顶点在圆心的周角分成360等份，每一份就是1°的圆心角。根据上述定理，这时整个圆周也被分成360等份，我们把每一份叫做1°的弧。由此可知，1°的圆心角所对的弧是1°的弧，1°的弧所对的圆心角是1°的角。一般地说，圆心角是$n°$，所对的弧也是$n°$（图5—17）。这个性质可以用下面的定理来叙述。

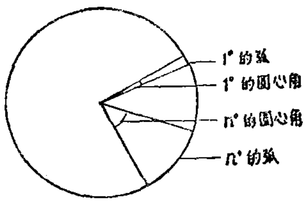


图5—17

圆心角定理 圆心角的度数等于它所对的弧的度数。

例： 图5—18是农用水管连接器的平面图。在它上面均匀分布着六个孔的孔心，问每一份弧所对的圆心角是多少度？

解： 因为连接器上的六个孔是均匀分布，所以这六个孔心把它们所在的圆周六等分，每一份弧是$\frac{360°}{6} = 60°$。根据圆心角定理可知，每一份弧所对的圆心角应是60°。

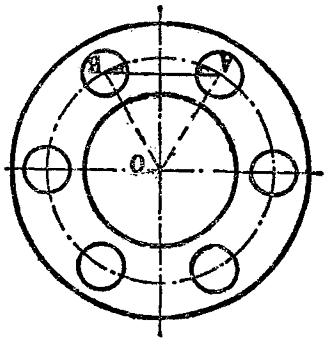
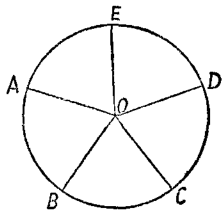


图 5 —18

练习三十九

1. 30°的圆心角所对的弧是多少度？是圆周的几分之几？90°的圆心角所对的弧呢？
2. 一条弧是 47°48′，它所对的圆心角是多少度？
3. 如图，同圆中的五个圆心角相等，求每个角的度数，并说明$\overset{\frown}{AB}$等于圆周长的$\frac{1}{5}$。



（第 3 题）

5.5 圆周角

顶点在圆上并且两边和圆相交的角叫做圆周角（如图 5—19的$\angle BAC$）。圆周角的度数与它所对的弧的度数的关系可用下面定理表述。

圆周角定理 圆周角的度数等于它所对的弧的度数的一半。

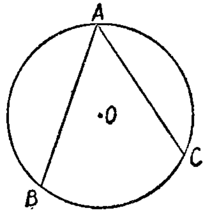


图 5 —19

已知：$\angle ABC$是$\odot O$的圆周角，$\overset{\frown}{BC}$是它所对的弧（图 5 —20）。

求证：$\angle BAC$的度数 $= \frac{1}{2}$ $\overset{\frown}{BC}$的度数。

证明：分三种情况来证明。

（1）圆心O在$\angle BAC$的一边上，如图 5 —20(1)。

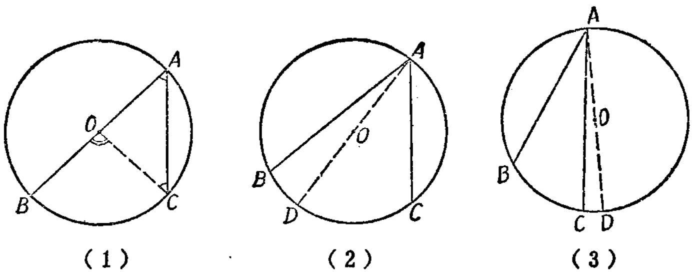


图 5 —20

作半径OC，在$\triangle OCA$中，

$\because$ $OC=OA$，

$\therefore$ $\angle BAC=\angle C$。

$\because$ $\angle BOC$是$\triangle OCA$的外角，

$\therefore$ $\angle BOC=\angle BAC+\angle C=2\angle BAC$，

$\therefore$ $\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC$。

$\because$ $\angle BOC$的度数$=\overset{\frown}{BC}$的度数，

$\therefore$ $\angle BAC$的度数$=\frac{1}{2}$ $\overset{\frown}{BC}$的度数。

（2）圆心O在$\angle BAC$内，如图5—20(2)。

作直径AD，从(1)可以知道

$\angle BAD$的度数 $=\frac{1}{2}$ $\overset{\frown}{BD}$的度数，

$\angle DAC$的度数 $=\frac{1}{2}$ $\overset{\frown}{DC}$的度数。

$\because\quad \angle BAC=\angle BAD+\angle DAC$，

$\therefore\quad \angle BAC$的度数 $=\frac{1}{2}$ $\overset{\frown}{BD}$的度数 $+\frac{1}{2}$ $\overset{\frown}{DC}$的度数

$=\frac{1}{2}$ $\overset{\frown}{BC}$的度数。

（3）圆心O在$\angle BAC$外，如图5—20(3)。

作直径AD，从(1)可以知道

$\angle BAD$的度数 $=\frac{1}{2}$ $\overset{\frown}{BD}$的度数，

$\angle CAD$的度数 $=\frac{1}{2}$ $\overset{\frown}{CD}$的度数。

$\because \angle BAC=\angle BAD-\angle CAD$，

$\therefore\quad \angle BAC$的度数 $=\frac{1}{2}$ $\overset{\frown}{BD}$的度数$-\frac{1}{2}$ $\overset{\frown}{CD}$的度数

$=\frac{1}{2}$ $\overset{\frown}{BC}$的度数。

因为圆心角的度数等于它所对的弧的度数，所以圆周角定理又可描述为：圆周角等于同弧所对的圆心角的一半。

推论1 同弧（或等弧）上的圆周角相等。

如图5—21，$\angle APB$、$\angle AQB$、$\angle ARB$是同弧上的圆周角，它们的度数都等于$\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$的度数。所以，$\angle APB=\angle AQB=\angle ARB$。

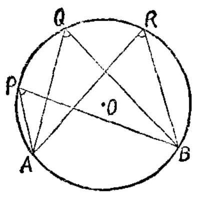


图 5 —21

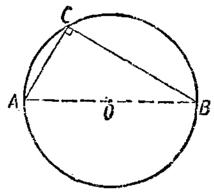


图 5 —22

推论 2 半圆上的圆周角是直角。

如图 5 —22，$\overset{\frown}{ADB}=180°$，所以$\angle ACB=90°$。

例 1：顶点在圆上的四边形的对角的和等于180°。

已知：四边形$ABCD$的顶点都在⊙O上（图 5 —23）。

求证：$\angle A+\angle C=180°$，

$\angle B+\angle D=180°$。

证明：$\because \angle A$ 的度数$=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{BCD}$的度数，

$\angle C$ 的度数$=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{BAD}$的度数，

$\therefore$ $(\angle A+\angle C)$的度数$=\dfrac{1}{2}(\overset{\frown}{BCD}+\overset{\frown}{BAO})$的度数，

$\therefore$ $(\overset{\frown}{BCD}+\overset{\frown}{BAD})$的度数$=360°$，

$\therefore$ $\angle A+\angle C=180°$ 。

同理可证 $\angle B+\angle D=180°$。

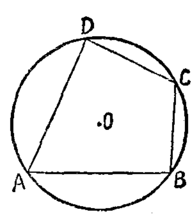


图 5 —23

顶点在一个圆上的多边形叫做这个圆内接多边形，这个圆叫做这个多边形外接圆。外接圆的圆心叫做这个多边形的外心。如图 5 —23，四边形$ABCD$是⊙O的内接四边形，⊙O是四边形$ABCD$的外接圆，圆心O叫做四边形$ABCD$的外心。根据圆内接多边形的

定义，上述例题又可描述为下述定理：

定理 圆内接四边形两对角的和等于180°。

推论 3 90° 的圆周角所对的弦是直径。

如图 5—22，$\angle ACB=90°$，所以$\overset{\frown}{AB}$的度数 = 180°，即$\overset{\frown}{AB}$是半圆，所以AB就是直径。

例 2 工人同志对圆形工件进行划线时，常用下述方法来确定圆心：如图 5—24所示，把角尺的顶点C靠在圆上，尺的两边分别与圆相交于A、B两点，画出一条弦AB；然后移动角尺的位置，用同样的方法，再画出另一条弦$A'B'$，并与AB交于O点，那么，O点就是所要求的圆心。这是什么道理呢？

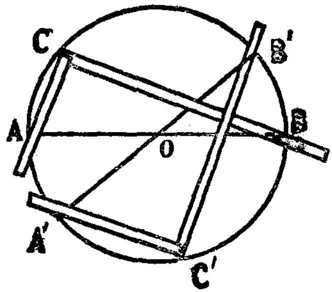


图 5—24

解：

由画图可知，$\angle ACB=90°$，$\angle A'C'B'=90°$。根据“90°的圆周角所对的弦是直径”可以断定，AB 和$A'B'$都是圆形工件的直径。又因为两条直径的交点就是圆心，所以AB和$A'B'$的交点O就是圆形工件的圆心。

练 习 四 十

1. 一条弦的长等于半径，求它所对的圆心角和圆周角的度数。
2. 如图，⊙O的内接四边形$ABCD$的对角线AC和BD把