

高等学校理工科文化补习试用教材

初等数学

初等几何

北京市高等院校数学教材编写组编

人民教育出版社

编者的话

为了贯彻执行毛主席关于“走上海机床厂从工人中培养技术人员的道路”的指示，适应教育革命的需要，我们编写了《初等数学》作为理工科大学工农兵学员文化补习试用教材。

本书是在北京各院校文化补习教学实践的基础上编写的。编写大纲及初稿，曾得到部分学员和教师的评审。全书共分五册，即《初等代数》、《初等几何》、《三角函数》、《解析几何》及《公式和数表》。

编写过程中，我们试图打破书本与实践脱节、烦琐哲学的旧体系，联系三大革命的实际，突出基本规律及其辩证发展的线索，以便有助于培养学员分析问题和解决问题的能力。

本书的基本内容大体上反映了理工科各专业对初等数学的要求。由于各专业在教学要求和文化补习安排上有所不同，学员文化程度有差别，编写时，我们注意使本书能够适应上述不同情况。为此：

1. 列入了预备知识。初一程度的可以从预备知识开始学习，初二、三程度的可以从基本内容的有关章节开始学习。

2. 列入了选学内容，约占全书的四分之一。可以根据各专业教学的可能和不同的需要选用，也可供学员结合实践需要自学。

3. 基本内容中章节顺序可以适当变更。如在《初等代数》中，变数、坐标、图象和一次、二次函数是逐步出现的，到《三角函

教》中才概括为一般函数概念。但这些内容大都是独立成节的，因此也可以集中起来学。基本内容的深度也分了层次，以便在教学中取舍。

遵照毛主席关于“要自学”的指示，本书在基本规律的说明和例解方面比较详细，配置了较多的练习题，基本内容中各章有小结，每册末有总结。因此，本书也可作为具有高小毕业以上文化程度的工农兵青年自学之用。

由于我们受思想水平、实践经验的局限，本书离“教材要彻底改革”的要求差距很大。定稿时间仓促，没有能够更广泛的征求意见，有些缺点，如篇幅还偏大，基本规律提炼不够，有的地方叙述流于琐细等问题，未能进一步解决。热烈欢迎使用本书的同志提出宝贵意见。

一九七三年六月

目 录

基 本 内 容

引 言	1
第一章 基础知识	4
第一节 基本概念	4
线段和直线	4
角	5
圆	9
圆心角	10
第二节 相交和平行	13
相交直线的夹角	14
平行线的判定	17
平行线的性质	20
三角形内角和	23
第三节 证题举例	26
小结	31
第二章 三角形	34
第一节 全等三角形	34
画三角形	35
全等三角形的判定和应用	38
确定直角三角形的条件	42
平行四边形	45

第二节 等腰三角形	49
等腰三角形的对称性	49
圆的轴对称性	52
第三节 作图题举例	54
第四节 直角三角形	57
勾股定理	58
两类特殊的直角三角形	63
半圆和直角	65
小结	67
第三章 相似三角形	74
第一节 成比例的线段	74
平行截割定理	75
比例线段	77
平行截割比例线段	79
第二节 相似三角形	82
相似三角形的判定	82
应用举例	85
直角三角形中成比例的线段	89
小结	91
第四章 解三角形	95
第一节 锐角三角函数	95
锐角三角函数的概念	95
三角函数值	99
同角三角函数间的关系	108
第二节 解直角三角形	112
应用举例	113
等分圆周和正多边形	118

第三节 解斜三角形	121
正弦定理	122
余弦定理	129
小结	133
第五章 圆	140
第一节 一般性质	140
三点定一圆	140
圆周角	141
圆周长和圆面积	146
第二节 相切问题	148
圆和直线相切	148
两圆的公切线	152
两圆相切	155
第三节 弧长 弧度制	159
弧长和扇形面积	160
弧度制	162
小结	168
总 结	174

选 学 内 容

I 轨迹	177
轨迹概念	177
基本轨迹	179
求轨迹的例	182
连接	186
II 空间平面和直线	191
第一节 基本性质	191

第二节 平行问题	194
直线和平面平行	194
平面和平面平行	197
第三节 直线和平面相交	199
异面直线的夹角	199
直线和平面垂直	200
直线和平面斜交	203
第四节 平面和平面相交	205
二面角	205
垂面	207

基本内容

引言

生产各种产品,如六角螺帽、燕尾槽、滚珠轴承等(图 1), 都要求有一定的形状和大小。

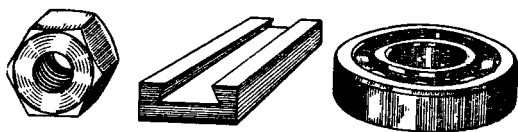


图 1

考察各种物体的形状、大小和位置关系,就产生了各种图形的概念。正如恩格斯指出的:“和数的概念一样,形的概念也完全是从外部世界得来的,而不是在头脑中由纯粹的思维产生出来的。必须先存在具有一定形状的物体,把这些形状加以比较,然后才能构成形的概念。”

如图 2,一个是木块,一个是铁块。它们的物理性质截然不同:一个轻,一个重;一个软,一个硬;等等。但是撇开这些物理性质,只看它

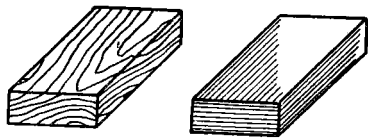


图 2

们的形状和大小,则是一样的。人们在实践中反复多次见到这种形状的物体,就形成了“长方体”的概念。这就是说,抽去物体的物理性质,只考察物体的形状和大小时,就得到了几何体或几何图形。

几何研究的对象就是从现实世界中抽象出来的各种几何图形。

实际的物体都是立体的，如一根阶梯形的轴就是立体的(图3)。为了研究物体的形状，需要从不同侧面去观察它，这样就得到了各种平面图形，如图4和图5。从这些平面图形的形状和大小，就能了解这个物体的形状和大小。



图 3

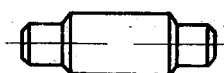


图 4



图 5

初等平面几何主要研究最基本、最常用的平面图形——直线形(由直线段组成的图形)和圆。

研究什么问题？这要从生产实践的需要来看。制造产品，测量地形，建筑房屋等等，都提出了下面的问题：

首先要根据形状定尺寸。例如，一根阶梯形的轴，定出哪些尺寸，形状大小就确定了呢？就是说，要研究确定图形的条件。

其次要根据尺寸去划线。钳工师傅要加工一个工件时，往往要先在材料上划线。就是说，要根据所给的条件去作图。

另外，加工和检验时，往往还要根据知道的尺寸去求出不知道的尺寸。就是说，要根据图形的性质，从已知的长度、角度去推求未知的长度和角度。

总之，就是要研究确定图形的条件和图形的性质，研究作图的方法，研究从已知推求未知的方法。其中，研究确定图形的条件和图形的性质，是最基本的问题。

现实世界的图形是多种多样的，就是由直线和圆组成的图形也是变化万千，当然不可能一个个地去研究。那么怎么去研究呢？

劳动人民在生产实践中积累了丰富的图形知识，也创造了研究图形的方法。如农民丈量土地，遇到地形复杂时，总是把它分成几个规则的形状来丈量。这样的实践经验说明了一个道理：复杂的图形可以分解为简单的图形来研究。

平面几何在研究图形时也是这样。如阶梯形轴的平面图，就可以分解成长方形和梯形(图6)，而长方形和梯形，又可以再分解成三角形(图7)。可见，组成直线形的基本图形是三角形。抓住这个基本图形来研究，其他直线形问题就好解决了。圆形的研究，也要借助于三角形。因此，在平面几何中，主要研究三角形。

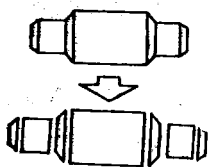


图 6

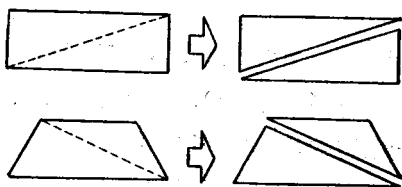


图 7

在第一章里，先讲一些有关线段、角、圆弧的基本概念和图形中角的分析方法。在后几章里，就着重研究三角形问题。

第一章 基础知识

第一节 基本概念

大多数的平面图形是由线段、角和圆弧构成的。我们先来学习关于线段、角、圆弧的基本概念。

线段和直线

最基本的平面图形是直线形，直线形的每一边都是一段直的线，叫做线段。

如一个六角螺帽的平面图形就是一个直线形(图 1-1)，叫做六边形，它的每一条边就是一条线段。

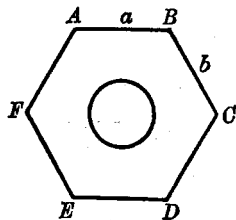


图 1-1

这六条线段两两相交于一点，这些点是六边形的顶点，也是这些线段的端点。

一个点用一个大写字母表示，不同位置的点用不同的字母来表示。如图 1-1 中的 A 、 B 、…… F 各表示一个点。

一条线段可以用表示它的两个端点的大写字母来表示，如“线段 AB ”、“线段 BC ”等；也可以用一个写字母来表示，如“线段 a ”、“线段 b ”。

把 A 、 B 两点用不同形状的线连起来(图 1-2)，可以看到线段的一个基本性质：

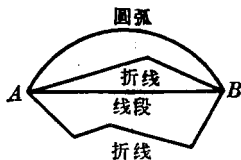


图 1-2

基本性质 1 在连接两点的线中，线段最短。(简称两点之间，线段最短。)

连接两点的线段的长度，叫做这两点间的距离。

常用的长度单位是米(m)、厘米(cm)、毫米(mm),或尺、寸等。

制图或划线时,比较两条线段的长短,或度量一条线段的长度,常用两脚规,这比用直尺量要准确一些。如图 1-3, $AB < CD$ 。

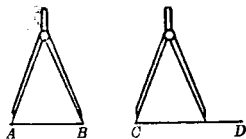


图 1-3

要分析几条线段之间的关系,常要把线段延长。线段从两端无限延长所形成的图形,叫做直线。直线是没有端点的。

直线可以用表示它上面任意两个点的大写字母来表示,如“直线 AB”;也可以用小写字母表示,如“直线 l”(图 1-4)。

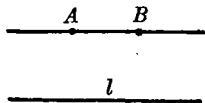


图 1-4

直线有一个基本性质:

基本性质 2 经过两点只能引一条直线。(也称两点定一直线。)

木工师傅在木板上弹墨线,瓦工师傅砌墙时拉线,都是先定两个点,就是利用了这个基本性质。

角

直线形中相交的两条边构成一个角。角的形象是很多的,如方桌面有四个角,五角星有五个角,钟表上的时针和分针也构成一个角(图 1-5)。



图 1-5

究竟什么叫角呢？

从一点引出的两条射线*所组成的图形叫做角。

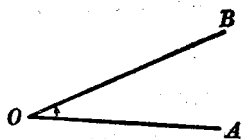


图 1-6

如图 1-6, 两条射线的共同端点 O 叫做角的顶点, 这两条射线(OA 和 OB) 都叫做角的边。

也可以把一个角看成是由一条射线 OA , 绕着它的端点 O , 从原来的位置 OA 转到另一个位置 OB 而形成的。

如果射线绕着它的端点 O 旋转, 转到和原来位置构成一条直线 (图 1-7), 这时所得的角叫做平角; 再旋转下去, 到这条射线回到它原来的位置, 这时所得到的角叫做周角。

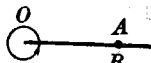





图 1-7

按角的大小, 常用下列名称: 锐角, 直角, 钝角。直角是平角的一半; 锐角比直角小; 钝角比直角大, 比平角小。

锐 角	直 角	钝 角
		

角用符号“ \angle ”表示, 如图 1-6 中的角记作 $\angle AOB$ 或 $\angle BOA$ 。注意: 表示顶点的字母 O 必须写在其他两个字母的中间。如果不会和其他角发生混淆时, $\angle AOB$ 可以简写为 $\angle O$ 。为了简便, 有时在角的里面标上数字或希腊字母来表示角, 如图 1-8 中的 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 、 $\angle \alpha$ 、 $\angle \beta$ 等。



图 1-8

* 线段从一端无限延长所形成的图形, 叫做射线。射线有一个端点。

通常度量角用的单位是度、分、秒。把直角分成 90 等份，每一份就是 1 度，记作 1° 。每 1 度又分成 60 等份，每一份是 1 分，记作 $1'$ 。每 1 分再分成 60 等份，每一份是 1 秒，记作 $1''$ 。它们是 60 进制的。

$$1^\circ = 60', \quad 1' = 60''.$$

$$1' = \frac{1^\circ}{60}, \quad 1'' = \frac{1'}{60}.$$

度量角用量角器（也称半圆仪）；如图 1-9。直角等于 90° ，平角等于 180° ，周角等于 360° 。

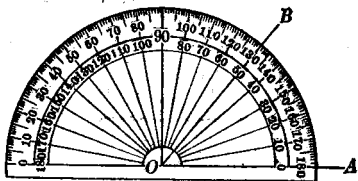


图 1-9

例 1. 把 2.6° 的零头 0.6° 用分表示。

解： $\because 1^\circ = 60', \quad \therefore 0.6^\circ = 0.6 \times 60' = 36'.$

结果得 $2.6^\circ = 2^\circ 36'.$

例 2. 把 $20^\circ 30' 15''$ 化为度。

解：先把 $15''$ 化为分： $15'' = \frac{15'}{60} = 0.25'.$

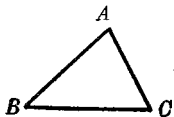
$$\therefore 30' 15'' = 30.25'.$$

再把 $30.25'$ 化为度： $30.25' = \frac{30.25^\circ}{60} \approx 0.504^\circ.$

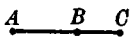
$$\therefore 20^\circ 30' 15'' \approx 20.504^\circ.$$

练 习

1. 图(1)和(2)中各有几条线段？按图中字母把它们写出来。

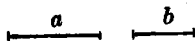


(1)



(2)

(第 1 题)



(第 2 题)

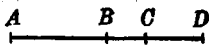
2. 已知线段 a, b 如图，画一条线段等于 $a-b$ ，一条等于 $a+b$ 。

3. 根据图形,填写下面空白:

(1) $AC = BC + (\quad)$,

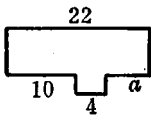
(2) $CD = AD - (\quad)$,

(3) $AC + CD = (\quad) + BD$.

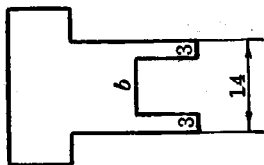


(第3题)

4. 图(1)、(2)是两个零件的平面图,长度单位是毫米.求线段 a 、 b 的长.



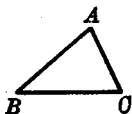
(1)



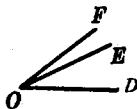
(2)

(第4题)

5. 指出图(1)、(2)中各有几个锐角. 分别把它们用大写字母表示出来.



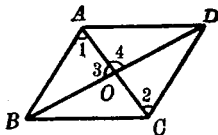
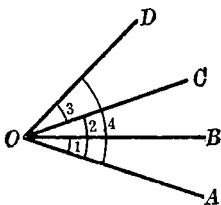
(1)



(2)

(第5题)

6. 把下列图形中用数字表示的角,改用大写字母表示:



(第6题)

7. 用量角器量出一付三角板中每个角的度数.

8. 用量角器画出 36° 、 90° 、 131° 的角.

9. 用“°”、“′”、“″”表示下列各角度:

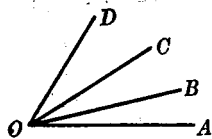
28度7分40秒, 1度18秒, 39度5分.

10. 根据图形, 填写下列空白:

(1) $\angle AOC = \angle AOB + (\quad)$,

(2) $\angle BOD - \angle COD = (\quad)$,

(3) $\angle AOD - \angle BOC = \angle AOB + (\quad)$.



(第 10 题)

11. 把下列角度化成度、分、秒:

56.28° , 109.003° , 0.35° .

12. 下列角度合多少度?

$21^\circ 30'$, $87^\circ 27'$, $105^\circ 16' 30''$.

圆

车轮, 水管的横截口等, 都是圆形的.

圆的特点是: 每个圆都有一个中心点, 圆周上各点到中心点的距离都相等.

圆的中心点叫做圆心, 常用 O 点表示. 连接圆周上任一点到圆心的线段叫做半径, 常用 R 或 r 表示(图 1-10).

一个圆的圆心 O 的位置确定了, 半径 R 的大小确定了, 这个圆的位置和大小就完全确定了.

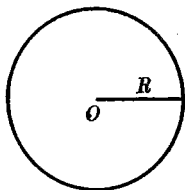


图 1-10

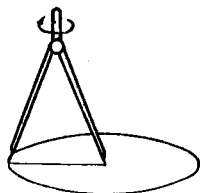


图 1-11

圆用记号“ \odot ”来表示, 以 O 为圆心的圆记作“ $\odot O$ ”.

画圆用圆规, 如图 1-11, 两脚尖之间的距离等于半径 R .

问: 车轮为什么做成圆形的?

连接圆上任意两点的线段叫做圆的弦. 经过圆心的弦叫做圆的直径. 如图 1-12 中

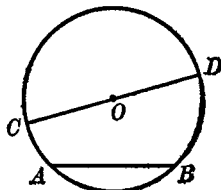


图 1-12

的线段 AB 是弦, 线段 CD 是直径: 图纸上常用 ϕ 表示直径, 如 $\phi 24$ 表示直径是 24 mm.

圆的直径把圆分成相等的两部分, 每一部分叫做半圆.

圆上任意两点间的部分叫做圆弧. 弧用符号“ $\widehat{\quad}$ ”表示, 图 1-12 中以 A, B 为端点的弧记作“ \widehat{AB} ”, 读“ AB 弧”. 通常说的弧, 指小于半圆的弧, 叫做劣弧.

两个半径相等的圆, 只要把圆心重合在一起, 这两个圆就全部重合. 所以半径相等的圆叫做等圆(图 1-13).

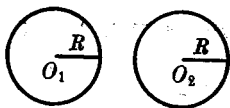


图 1-13

在同一个圆或相等的圆中, 能够重合在一起的两段弧, 叫做等弧.

圆 心 角

顶点在圆心的角叫做圆心角, 如图 1-14 中 $\angle AOB$ 是一个圆心角. A, B 是圆周上的点, 这时 \widehat{AB} 叫做圆心角 $\angle AOB$ 所对的弧; AB 弦叫做 $\angle AOB$ 所对的弦, 也叫做 \widehat{AB} 所对的弦.

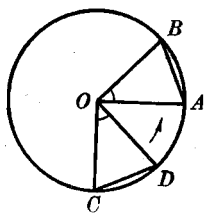


图 1-14

圆心角和它所对的弧、弦之间有什么关系呢? 在图 1-14 中, 设

$$\angle AOB = \angle COD,$$

那么以 O 点为中心, 按箭头所指方向旋转 $\angle COD$, 使 OC 和 OA 重合, OD 也必定和 OB 重合. 这时, \widehat{CD} 和 \widehat{AB} 重合, CD 弦和 AB 弦重合, 即

$$\widehat{AB} = \widehat{CD},$$

$$AB = CD.$$

这就是说, 在同一圆中, 相等的圆心角所对的弧相等, 所对