双博士系列

高等学校教材配套辅导

计算机类

离散数学

教材辅导

主编　李宁春
编写　计算机类教材辅导委员会

科学技术文献出版社

高等学校教材配套辅导（计算机类）

离散数学

教材辅导

主　　编　李宁春

编　　写　计算机类教材辅导委员会

编写人员　牟玉涛　顾　佳　李菊川　陈　楠　陈　丰
张怀甫　高永军　狄　懿　垄　伟　李竞超
常慧敏　康建明　杨　军　张士新　苗红亮
王振凯　李　为　张涓义　苏　燕　韩　彬
祝贺梅　谢检平　胡东华　杨　峰　蔡贵娟
李利娟　闵　伟　高　睿　李　芹　杜清平
韩　珍　周丽红　温　晴　张晓帆　钟崇光
高　鑫　温桂荣　韩　琴　郭海权　史　进

科学技术文献出版社
Scientific and Technical Documents Publishing House
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

离散数学教材辅导/李宁春主编. -北京:科学技术文献出版社,2008. 11

ISBN 978-7-5023-3411-6

Ⅰ. 离… Ⅱ. 李… Ⅲ. 离散数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. 0158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 153605 号

出　版　者　科学技术文献出版社
地　　　址　北京市复兴路 15 号(中央电视台西侧)/100038
图书编务部电话　(010)51501739
图书发行部电话　(010)51501720,(010)51501722(传真)
邮购部电话　(010)51501729
网　　　址　http://www. stdph. com
策划编辑　科　文
责任编辑　袁其兴　杜　娟
责任校对　赵文珍
责任出版　王杰馨
发　行　者　科学技术文献出版社发行　全国各地新华书店经销
印　刷　者　富华印刷包装有限公司
版(印)次　2008 年 11 月修订版　第 1 次印刷
开　　　本　850×1168　32 开
字　　　数　247 千
印　　　张　8. 5
印　　　数　1～5000 册
定　　　价　14. 00 元

Preface 前言

“双博士”成就双博士！

本丛书的编写，以普通高等学校普遍采用的教材为蓝本，针对性强，信息含量高，具有很高的参考价值和实用意义，是考研专业课不可多得的工具与助手。

缺乏对专业课命题侧重点及考试要求的了解，已成为众多考生专业课考试失利的原因，进而与继续深造的机会失之交臂。因此，选取一本好的专业课辅导教材，对于有志于考研的莘莘学子来说，至关重要。本丛书涉及法学、金融、经管、通信电子、计算机、机械、控制理论与控制工程及其他热门专业。本书与市场上同类书相比，在内容编写方面更加细致详尽。在编排上分三部分：

1. **基本概念及考点精要**：对与本章相关的知识点进行串讲，使考生既能熟练掌握基础知识，又可把握重点、要点。

2. **典型例题、考题分析**：这一部分精选了各名校近年最新考研真题作为本书的例题，并提供详细的解析过程，强调解题思路。本部分内容既可使考生把握命题原则，又可熟悉题目类型，触类旁通。

3. **自测题及模拟训练题**：该部分为考生自行练习而提供，备有详细的解答过程。便于考生及时总结，查缺补漏。

本书附录为模拟试题，这些模拟试卷也是名校近几年的考试真题，并配有详细解析，具有非常典型的意义。

综合起来，本书凸显以下特色：

1. **专题化的编写体例**：面对普通高等学校专业课教材的泛泛的讲解，本书从更深的层次，对常考的知识点加重了讲解的力度，并与最新考试动态同步，及时补充了最新的考试内容。

2. **极富针对性的题型训练**:在每章或每部分的典型例题、模拟试题中,均编排名校近几年的考研真题,并附有详细的参考答案,实战性极强。

3. **反映各名校最新考试信息**:每章后所附的自测题及全书最后所附的全真模拟试卷,均选自各高校近几年考研真题,具有很高参考价值。

策划本丛书的指导精神是既方便于在校本科生同步学习时参考,更适合于准备参加硕士研究生入学考试的学生作为专业课辅导用书使用。

温馨提示:

✻“双博士品牌图书”是全国最大的大学教辅图书和考研图书品牌,全国有三分之一的大学生和考研学生正在使用“双博士品牌图书”。

✻来自北京大学研究生会的感谢信摘要:双博士,您好!……,首先感谢您对北京大学的热情支持和无私帮助!双博士作为大学教学辅导和考研领域全国最大的图书品牌之一,不忘北大莘莘学子和传道授业的老师,其行为将永久被北大师生感怀和铭记! 北京大学研究生会

✻现在市场上有人冒用我们的书名,企图以假乱真,因此,读者在购买时,请认准双博士品牌。

编者

2008 **年于北京大学**

目录

目录

第1章 集合论

核心考点：集合的表示与集合的基本运算、划分与覆盖、集合的笛卡尔积。
重　　点：幂集的确定、集合间的运算性质、有序对。
考试重点程度：★

1.1 基本概念及考点精要

1.1.1 集合的基本概念及表示

1. 集合的定义及常用记号

集合是没有给出精确定义的基本数学概念，直观地说，把一些事物汇集到一起组成一个整体就叫做集合，而这些事物就是这个集合的元素或成员。它可以是具体的东西，也可以是抽象的概念。通常用大写英文字母表示集合，如 A,B,X 等，用小写英文字母表示元素，如 a,b,x 等。若 a 是集合 A 中的元素(或成员)，则称"a 属于集合 A"或"a 在集合 A 中"，记作"$a\in A$"；用"$a\notin A$"表示 a 不是集合 A 中的元素，称"a 不属于集合 A"或"a 不在集合 A 中"。当 $a_1\in A,a_2\in A,\cdots,a_n\in A$ 时，常简写为 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in A$。

集合由它的元素所决定，集合中的元素具有确定性、无重复性、无序性及抽象性等特点。

(1)确定性。集合的元素一旦给定，这一集合便完全确立。集合的元素与集合之间是属于或者不属于的关系，两者有且只有一个成立，这与模糊集合不同。

(2)无重复性。集合中元素彼此不同，没有重复的元素，这与后面图论中涉及的多重集合不同，那里因为特殊原因允许有重复的元素。如 $\{1,2,2\}=\{1,2\}$。

(3)无序性。集合中元素无顺序。如$\{1,2,3\}=\{3,2,1\}$。

(4)抽象性。集合中元素可以是具体事物,可以是抽象概念,也可以是集合,不是集合的元素称为本元。如$A=\{$一本书,一支笔,$\{1,2\}\}$。

经常用到的几个集合有

(1)N,自然数集(有的教材用N表示非负整数集,用P表示正整数集,即自然数集)。

(2)Z,整数集(有的教材用I表示整数集,但一般用I表示区间$[0,1]$)。

(3)Q,有理数集。

(4)R,实数集。

(5)C,复数集。

集合中元素的个数可以是有限的,也可以是无限的,前者所对应的集合称为有限集,后者所对应的集合称为无限集。若A是有限集,表示集合中元素多少或度量集合大小的数,称为集合的基数,记作$|A|$,也记为$\#(A)$或card(A)或$K(A)$。无限集的基数在第3章讨论。显然有$|\varnothing|=0$。

2. 集合的表示

常用的表示集合的方法有列举法和描述法两种。

列举法是按任意顺序列出集合的所有元素,元素之间用逗号隔开,并把它们用花括号括起来。如$A=\{1,2,3\}$,$B=\{\cdots,-4,-2,0,2,4,\cdots\}$。

描述法是将集合中元素应当满足的条件描述出来,即给定一个条件$P(x)$,当且仅当a使条件$P(a)$成立时,$a\in A$。其一般形式为$A=\{a \mid P(a)\}$,读作“A是使$P(a)$成立的所有元素a的集合”。实际上,$P(a)$描述了一个规则或公式,使得我们有可能确定a是否在A中。

上面两种表示法中,列举法适用于元素不太多或元素的规律比较明显简单的情况。当集合含有许多元素时,用列举法是极其麻烦的。当集合含有无穷多个元素时,列举法更是无能为力。遇到这些情况,可采用描述法来表示集合。描述法刻画了集合中元素的共同特征,只要能详细说明$a\in A$的定义条件,那么就可以将集合表示成$A=\{a \mid P(a)\}$,对于元素较多或元素的规律不太明显的情况非常适用。

1.1.2 子集、集合的相等

集合的包含与相等是集合间的两种基本关系，也是集合论中的两个基本概念。

定义 1.1 设 A,B 为集合，若 B 中的每个元素都是 A 中的元素（即若 $a\in B$，必有 $a\in A$），称 B 是 A 的子集合，简称子集。这时我们说 B 被 A 包含，或 A 包含 B，记为 $B\subseteq A$ 或 $A\supseteq B$。反之，若 B 不是 A 的子集，则记作 $B\not\subseteq A$ 或 $A\not\supseteq B$。

说明：按子集的定义，显然有：$\varnothing\subseteq A$，$A\subseteq A$。

根据定义有 $B\subseteq A\Leftrightarrow$ 对任意的 $x\in B$，有 $x\in A$。

由此可得出 $B\not\subseteq A\Leftrightarrow$ 存在 $x_0\in B$，$x_0\notin A$，即只要 B 中存在一个元素 x_0，x_0 不属于 A，则 B 不是 A 的子集。

注意区分 $\subseteq$ 与 $\in$。例如 $\{a\}\not\subseteq\{\{a\},b\}$，但 $\{a\}\in\{\{a\},b\}$。$\{a,b\}\subseteq\{a,b,\{a\}\}$，但 $\{a,b\}\notin\{a,b,\{a\}\}$。

$A\in B$ 表示集合 A 是集合 B 的一个元素；$A\subseteq B$ 表示 A 中的每个元素都是 B 中的元素。属于"$\in$"是一个最基本的概念，包含于"$\subseteq$"是由属于"$\in$"定义得到的。

定义 1.2 设 A,B 为集合，如果 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则称 A 与 B 相等，记作 $A=B$。

说明：显然，所谓集合 A 与集合 B 相等，则 A 的每一个元素都是 B 的元素，B 的每一个元素也都是 A 的元素，即意味着 A 与 B 具有完全相同的元素。该定义的实质是一个集合由它的全部元素所确定。证明两个集合相等，就利用该定义判定两个集合互为子集。

若 A 与 B 不相等，则 $B\not\subseteq A$ 和 $A\not\subseteq B$ 至少有一个发生。

定义 1.3 A,B 为集合，如果 $B\subseteq A$ 且 $B\neq A$，则称 B 是 A 的真子集，记作 $B\subset A$。

定义 1.4 不含任何元素的集合叫做空集，记作 $\varnothing$（或 $\{\}$）。

空集是个很重要的概念。这里有必要提醒大家，$\varnothing$ 和 $\{\varnothing\}$ 是不相等的集合。$\varnothing$ 中不含有任何元素，而 $\{\varnothing\}$ 中含有一个元素 $\varnothing$，所以 $\varnothing\notin\varnothing$ 但 $\varnothing\in\{\varnothing\}$，且 $\varnothing\subset\{\varnothing\}$。

定理 1.1　空集是一切集合的子集，且空集是唯一的。

含有 n 个元素的集合简称 n 元集，它的含有 $m(m\leqslant n)$ 个元素的子集称做它的 m 元子集。一般地说，对于 n 元集 A，它的 0 元子集有 C_n^0 个，1 元子集有 C_n^1 个，…，m 元子集有 C_n^m，…，n 元子集有 C_n^n，所以子集总数为 $C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n$，由二项式定理不难证明这个和是 2^n，所以 n 元集有 2^n 个子集。

定义 1.5　在一个具体问题中，如果涉及的集合都是某个集合的子集，则称这个集合为全集，记作 E(或 V)。

说明:全集是个有相对性的概念。由于研究的问题不同，所取的全集也不同。

1.1.3　集合的运算及其性质

1. 集合的基本运算

给定集合 A 和 B，可以通过集合的并 $\cup$、交 $\cap$、相对补 $-$、绝对补 $\sim$、对称差 $\oplus$ 等运算产生新的集合，这也是表示集合的一种方法。

定义 1.6　设 A、B 是任意给定的两个集合，由 A 和 B 的全部元素组成的集合 S，称为 A 和 B 的并集，记作 $A\cup B$，即 $S=A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$。设 A、B 为有限集合，其元素个数分别为 $|A|$、$|B|$，则有 $|A\cup B|\leqslant|A|+|B|$。

定义 1.7　设 A、B 是任意给定的两个集合，由 A 和 B 的所有相同元素组成的集合 S，称为 A 和 B 的交集。记作 $A\cap B$，即 $S=A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$。设 A，B 为有限集合，其元素个数分别为 $|A|$、$|B|$，则 $|A\cap B|\leqslant\min(|A|,|B|)$。

定义 1.8　设 A、B 是任意给定的两个集合，由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合 S，称为 B 对于 A 的补集，或相对补，记作 $A-B$，即 $S=A-B=\{x|x\in A$ 且 $x\notin B\}$。

定义 1.9　设 E 为全集，对任意集合 A 对于 E 的补 $E-A$，称为集合 A 的绝对补，记作 $\sim A$(或 A',$\overline{A}$,A 等)，即 $\sim A=E-A=\{x|x\in E$ 且 $x\notin A\}$。

定义 1.10　设 A、B 是任意给定的两个集合，A 和 B 的对称差为集合 S，其元素或属于 A，或属于 B，但不能既属于 A 又属于 B，记作 $A\oplus B$，即 $S=A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)=\{x|x\in A$ 或 $x\in B$ 但 $x\notin A\cap B\}$，

设 A,B 为有限集合，其元素个数分别为 $|A|$、$|B|$，则 $|A\oplus B|=|A|+|B|-2|A\cap B|$。

定义 1.11 设 A、B 是任意给定的两个集合，若 $A\cap B=\varnothing$，即 A 与 B 没有公共的元素，则称 A 与 B 是不相交的。

2. 文氏图

当集合中的元素不多时，集合之间的相互关系和运算结果可以用文氏图(John Venn)形象描述，它有助于我们理解相关问题，有时对解题也很有帮助。它的优点是形象直观、易于理解，缺点是它只是起一种示意的作用，理论基础不够严谨，因此只能用于说明，不能用于证明。

文氏图使用点的集合作为一个集合的示意表示。在文氏图中，用长方形区域代表全集 E，长方形中的点均为全集 E 中的元素，用(椭)圆或其他闭曲线区域代表 E 的子集，其内部的点表示不同集合的元素。图 1-1中各图表示集合间的关系；图 1-2 中各图表示集合的 5 种基本运算，阴影(斜线)区域表示了每个图形下边所指出的集合。

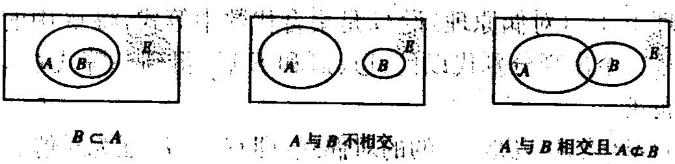

图 1-1

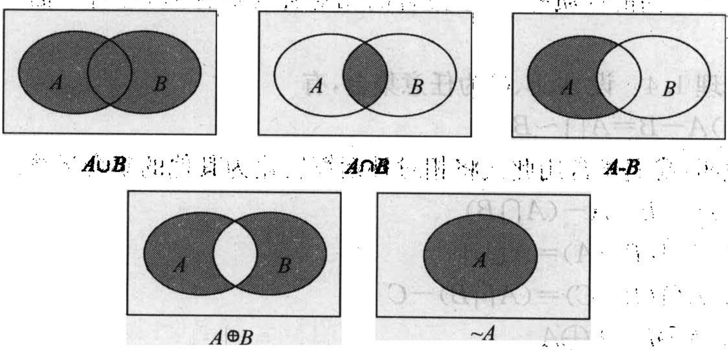

图 1-2

3. 运算的基本性质

集合的运算具有下面一些基本性质：

定理 1.2　对于全集 E 的任意子集 A、B、C，有如表 1-1 所示的性质。

表 1-1　全集 E 的任意子集 A、B、C 的性质

等幂律	$A\cup A=A$	$A\cap A=A$
结合律	$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$	$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$
交换律	$A\cap B=B\cap A$	$A\cup B=B\cup A$
分配律	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
同一律	$A\cup\varnothing=A$	$A\cap E=A$
零一律	$A\cup E=E$	$A\cap\varnothing=\varnothing$
互补律	$A\cup\sim A=E$	$A\cap\sim A=\varnothing$
德·摩根律 (De Morgan)	$\sim(A\cup B)=\sim A\cap\sim B$ $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$	$\sim(A\cap B)=\sim A\cup\sim B$ $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$
吸收律	$A\cap(A\cup B)=A$	$A\cup(A\cap B)=A$
对合律	$\sim(\sim A)=A$	

定理 1.3　(对偶原理)设 G 是集合代数中等式，将 G 中的 $\cup$、$\cap$、E 和 $\varnothing$ 的每一个出现分别代以 $\cap$、$\cup$、$\varnothing$ 和 E 后，得到一等式 G^0，称 G^0 为 G 的对偶式。

说明：显然，G 也是 G^0 的的对偶式，即 G 与 G^0 互为对偶。

可见，在上述的集合定律中，凡成对的定律都是互为对偶的。

除了上面的性质外，关于集合的相对补与对称差，还有下面一些性质。

定理 1.4　设 A、B、C 为任意集合，有

(1)$A-B=A\cap\sim B$

说明：我们通常用此式将相对补运算转化为其他的集合运算。

(2)$A-B=A-(A\cap B)$

(3)$A\cup(B-A)=A\cup B$

(4)$A\cap(B-C)=(A\cap B)-C$

(5)$A\oplus B=B\oplus A$

(6)$A\oplus\varnothing=A$；$A\oplus A=\varnothing$；$A\oplus E=\sim A$；$A\oplus\sim A=E$

(7)$(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$

(8)$A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$

说明:但 $A\cup(B\oplus C)=(A\cup B)\oplus(A\cup C)$不一定成立,如 $A=\{a,b,c\}$,$B=\{a\}$,$C=\{b\}$,则等式右边为空集,但左边非空集。

4.广义并和广义交

上面集合的并和交可以推广到 n 个集合的并和交

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$$

$$\bigcap_{i=1}^{n}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$$

上面定义中若 $n=1$,则$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1$,$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1$。

当 n 无限增大时,我们可以记作

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_i\cup\cdots$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_i\cap\cdots$$

以上定义的并和交也叫做集合的初级并和初级交。

定义 1.12 A 为集合,把 A 的所有元素的元素组成的集合称为 A 的广义并,记作$\bigcup A$。

说明:在该定义中,我们引入了一个约定:集合的元素都是集合。如 $A=\{\{0,5\},\{2,5\},\{1,3,5\}\}$ A 的元素是$\{0,5\}$,$\{2,5\}$和$\{1,3,5\}$,它们的元素构成的集合$\bigcup A$ 是$\{0,1,2,3,5\}$。这个约定的含义是很清楚的。可是对某些集合,如 $B=\{a,b,\{c,d\}\}$,它的元素 a 和 b 是由什么元素构成的集合,仅由这个式子我们是不知道的,但是根据广义并的定义可以认为 $\bigcup B=a\cup b\cup\{c,d\}$。一般来说,若 $A=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$,则 $\bigcup A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$。

定义 1.13 设 A 为非空的集合,把 A 的所有元素的公共元素组成的集合叫做 A 的广义交,记作$\bigcap A$。

说明:该定义同样引入了上面的约定,即集合的元素都是集合。若 $A=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$,则$\bigcap A=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$。

广义并和广义交具有如下性质:

对集合 A 和 B,有

(1)若 $A\subseteq B$,则$(\bigcup A)\subseteq(\bigcup B)$

(2)若 $A\subseteq B$,则$(\bigcap B)\subseteq(\bigcap A)$,其中 A 和 B 非空

(3)$\bigcup(A\bigcup B)=(\bigcup A)\bigcup(\bigcup B)$

(4)$\bigcap(A\bigcup B)=(\bigcap A)\bigcap(\bigcap B)$,其中 A 和 B 非空

5. 集合的幂集

定义 1.14　设 A 为集合,A 的所有子集构成的集合称为 A 的幂集,记为 $P(A)$(或 $p(A)$、2^A),即 $P(A)=\{B\mid B\subseteq A\}$。

说明:根据幂集的定义,因为$\varnothing\subseteq A$,$A\subseteq A$,所以:

(1)$\varnothing\in P(A)$。

(2)$A\in P(A)$。

对于幂集,若 A 是有限集,则有 $|P(A)|=2^{|A|}$。

对于幂集,还有如下面的结论:

定理 1.5　对任意集合 A,B,有

(1)若 $A\subseteq B$,则 $P(A)\subseteq P(B)$;反之,若 $P(A)\subseteq P(B)$,则 $A\subseteq B$

(2)若 $A=B$,则 $P(A)=P(B)$;反之,若 $P(A)=P(B)$,则 $A=B$

(3)$P(A)\bigcup P(B)\subseteq P(A\bigcup B)$

(4)$P(A)\bigcap P(B)=P(A\bigcap B)$

(5)$P(A-B)\subseteq(P(A)-P(B))\bigcup\{\varnothing\}$

(6)$\bigcup(P(A))=A$

集合和集合的并、交、补、幂等运算构成了集合代数的主要内容。为了书写简洁,我们规定了各种运算的优先顺序:令绝对补、幂、广义并和广义交运算为 1 类运算,初级并、初级交和相对补运算为 2 类运算。1 类运算优先于 2 类运算:在 1 类运算中,由右向左进行,在 2 类运算中其顺序由括号决定。

证明集合恒等式,常用的方法有:

(1)基本定义法。

(2)公式推导法。

(3)集合成员表法。

1.1.4　集合的笛卡尔积与无序积

笛卡尔积与无序积在后面讨论关系和图论时,都有重要应用。首先

引入有序对和无序对的概念。

定义 1.15 两个元素 a、b 组成二元组，若它们有次序之别，称为二元有序组，或称有序对或序偶，记为 $\langle a,b\rangle$，称 a 为第一分量，b 为第二分量；若它们无次序区分，称为二元无序组，或称无序对，记为 (a,b)。

说明：若 $a\neq b$ 时，$\langle a,b\rangle\neq\langle b,a\rangle$，但 $(a,b)=(b,a)$。

定义 1.16 给定两个有序对 $\langle x,y\rangle$ 和 $\langle u,v\rangle$，当且仅当 $x=u$ 和 $y=v$ 时，有序对 $\langle x,y\rangle$ 和 $\langle u,v\rangle$ 相等，亦即 $\langle x,y\rangle=\langle u,v\rangle$，当且仅当 $(x=u)$ 且 $(y=v)$。

说明：可将有序对推广到 n 元有序组，它的第一分量是 $(n-1)$ 元有序组，并记为 $\langle\langle x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}\rangle,x_n\rangle$，或记为 $\langle x_1,x_2\cdots,x_{n-1},x_n\rangle$。类似地定义两个 n 元有序组相等：$\langle x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n\rangle=\langle y_1,y_2\cdots,y_{n-1},y_n\rangle$，$(x_1=y_1)\wedge(x_2=y_2)\wedge\cdots\wedge(x_{n-1}=y_{n-1})\wedge(x_n=y_n)$。

定义 1.17 给定集合 A 和 B，取 A 中元素为第一分量，B 中元素为第二分量，构成有序对，所有这样的有序对组成的集合，称为 A 与 B 的笛卡尔积（也称为直积或叉积），记作 $A\times B$，即 $A\times B=\{\langle a,b\rangle\mid a\in A \text{ 且 } b\in B\}$。

说明：由上面定义可知若 A 和 B 有一个为空集，则 $A\times B=\varnothing$，且一般来说，$A\times B\neq B\times A$，除非 $A=B$，即笛卡尔积一般是不可交换的。

推广上面概念，可以用 n 元组定义 n 阶笛卡尔积若 $n\geqslant 1$ 为自然数，而 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个集合，它们的 n 阶笛卡儿积记作 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$，并定义为

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle\mid x_i\in A_i,i=1,2,\cdots,n\}$$

用归纳法不难证明，若 $A_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 是有穷集合，则 $|A_1\times A_2\times\cdots\times A_n|=|A_1|\times|A_2|\times\cdots\times|A_n|$。关于笛卡尔积，有下面几条性质：

定理 1.6 对任意集合 A、B、C、D，有

(1)交换律不成立，即 $A\times B\neq B\times A$，除非 $A=\varnothing$ 或 $B=\varnothing$ 或 $A=B$；

(2)结合律不成立，即 $(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C)$，除非 $A=\varnothing$ 或 $B=\varnothing$ 或 $C=\varnothing$；

(3)下列分配律成立

1) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

2) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

3) $(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$

4) $(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$

5) $A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$

6) $(B-C)\times A=(B\times A)-(C\times A)$

(4) 若 $C\neq\varnothing$，则 $A\subseteq B\Leftrightarrow A\times C\subseteq B\times C\Leftrightarrow C\times A\subseteq C\times B$；

(5) 若 A、B、C、D 非空，则 $A\times B\subseteq C\times D$ 当且仅当 $A\subseteq C$ 且 $B\subseteq D$。

定义 1.18　给定集合 A 和 B，若无序对是由 A 中元素和 B 中元素组成，所有这些无序对的集合，称为 A 和 B 的无序积，记为 $A\&B$，即 $A\&B=\{(x,y)\mid x\in A$ 且 $y\in B\}$

1.1.5　集合的覆盖与划分

定义 1.19 设 $\pi=\{A_i\}_{i\in k}$ 是集合 A 的某些非空子集合，如果集合 A 的每一元素在且只在其中之一 A_i 中，即如果：①$A_i\cap A_j=\varnothing$，当 $i\neq j$ 时；②$\bigcup\limits_{i\in k}A_i=A$，则称集合 π 是集合 A 的一个划分（也称为分划），每个 A_i 称为这个划分的一个划分块。

定义 1.20　设 $\pi=\{A_i\}_{i\in k}$ 是集合 A 的某些非空子集的集合，即如果 $\bigcup\limits_{i\in k}A_i=A$，则称集合 π 是集合 A 的一个覆盖。若 $C=\{A_\alpha\mid A_\alpha\subseteq A,A_\alpha\neq\varnothing\}$ 是集合 A 的一个覆盖，且 C 中任意元素不是其他元素的子集，则称 C 是 A 的完全覆盖。

说明：集合的覆盖与划分的区别在于覆盖不要求各个子集两两之交集为空。

1.1.6　基本计数原理

1. 抽屉原理

定理 1.7　把 $n+1$ 个物体放入 n 个盒子里，则至少有一个盒子里有两个或两个以上的物体。

推广的抽屉原理为：

定理 1.8　把 n 个物体放入 m 个盒子里，则至少有一个盒子里至少有 $\lfloor\frac{n-1}{m}\rfloor+1$ 个物体。