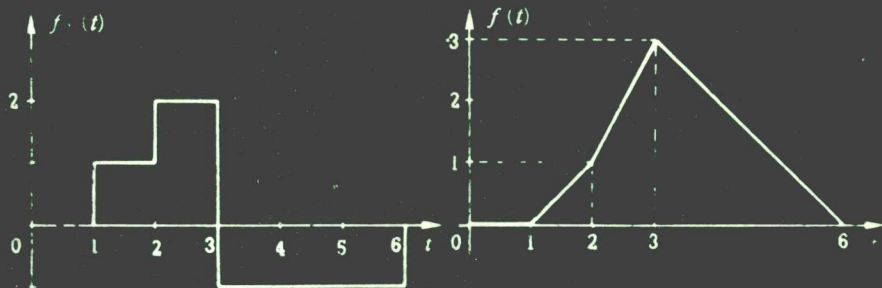


工程數學解析

黃漢邦 編著



SUPER 超級科技圖書股份有限公司

工程數學解析

Engineering Mathematics and Problems Solving

版權所有

超級

翻印必究

作者 黃漢邦

發行人 林國富

發行所 超級科技圖書股份有限公司

業務部 永和市林森路50號4樓

電話 9251021

郵政劃撥帳號 1009155-4

行政院新聞局登記證局版台業字第2405號

承印者 申全盛彩色印刷廠

中和市員山路294巷9號

初版 中華民國七十一年六月

五版 中華民國七十五年一月

定價 新台幣貳佰貳拾元整

序

數學是一切科學之母，工程數學更是各種工程科學的基礎。往往工程數學的良陋，可決定工科學生及工程師的素質。因此，不但學校課程中，工程數學的訓練一直很重，而且各種升學、就業考試中，工程數學都是必考科目。然而，如何能學好工程數學呢？除了平時上課須專心之外，最重要的就是要多做各式各類的題目，由解題中深切體認工程數學的精髓，並藉以驗證個人的學習是否確實。基於此一事實，以及筆者對工程數學的興趣，特將多年來的學習心得編撰成此書，以饗讀者。

筆者於民國六十九年役畢後，連續參加高考、電信特考、經濟特考、及公費留考，均僥倖及格。其間，筆者曾參閱市面上有關之書籍，發覺有的雖看似內容豐富，但錯誤甚多，製作草率，對學習工程數學或參加升學、就業考試並無多大助益，反而易使讀者誤入歧途，白費時間。因此本書特別注重校對，對各種典型題目的解答力求詳細，繪圖力求清晰正確，希望能協助讀者徹底瞭解工程數學，順利通過各類升學、就業考試，並因此打下工程數學之基礎，做為將來升學進修、就業的本錢。

黃漢邦 謹序於

美國·安娜堡

密西根大學

民國七十一年六月

目 錄

序

第一章 一階微分方程式	1
1-1 基本定義	1
1-2 一階常微分方程式	3
問題解析	7
第二章 高階微分方程式	31
2-1 二階線性微分方程式	31
2-2 線性二階微分方程式的解法	32
2-3 <i>Cauchy</i> 微分方程式	35
2-4 高階線性常係數微分方程式	36
2-5 聯立線性微分方程式	38
問題解析	39
第三章 微分方程式的幕級數解	61
3-1 幕級數方法	61
3-2 雷建德方程式	63
3-3 廣義幕級數法・指標方程式	66
3-4 伽瑪函數	67

3-5	<u>貝索</u> 方程式	68
	問題解析	71
第四章 <u>拉氏</u>轉換		95
4-1	<u>拉氏</u> 轉換之基本定義	95
4-2	<u>拉氏</u> 轉換之重要定理與性質	96
4-3	反 <u>拉氏</u> 轉換	98
4-4	<u>拉氏</u> 轉換的應用	101
	問題解析	103
第五章 <u>傅立葉</u>級數、積分和轉換		145
5-1	週期函數	145
5-2	<u>傅立葉</u> 級數	145
5-3	任意週期的週期函數	146
5-4	偶函數和奇函數	147
5-5	半幅展開式	149
5-6	<u>傅立葉</u> 級數的複數型	149
5-7	<u>傅立葉</u> 積分	151
5-8	<u>傅立葉</u> 轉換	153
5-9	<u>傅立葉</u> 轉換與 <u>拉氏</u> 轉換之關係	155
	問題解析	157

第六章 偏微分方程式 193

6-1 偏微分方程式	193
6-2 偏微分方程式解法	194
6-3 分離變數法	194
6-4 <u>拉氏</u> 轉換法解偏微分方程式	198
問題解析	200

第七章 矩陣與行列式 213

7-1 矩陣與行列式	213
7-2 矩陣的加法與純量乘積	215
7-3 矩陣的乘法	216
7-4 矩陣的轉置	217
7-5 線性方程式系統	218
7-6 矩陣的秩	221
7-7 反矩陣	222
7-8 行列式	223
7-9 特徵值與特徵向量	227
7-10 方矩陣函數	227
問題解析	230

第八章 向量分析 273

8-1 向量和純量 273

8-2 向量之運算 274

8-3 向量函數及其應用 278

8-4 梯度、散度及旋度 280

問題解析 283

第九章 積分定理 301

9-1 線積分 301

9-2 面積分 302

9-3 體積分 303

9-4 向量函數的積分定理 304

問題解析 308

第十章 複數與複數積分 327

10-1 複數之基本定義與性質 327

10-2 複數之表示法與基本運算 328

10-3 複變函數 330

10-4 高奇 - 利曼方程式、拉氏方程式 332

10-5 複數 z 的基本函數 333

10-6	複數積分	334
	問題解析	339
第十一章	映圖法	359
11-1	z 函數之幾何表示法	359
11-2	簡易基本映圖	359
11-3	保角映圖	361
11-4	線性分式轉換	362
11-5	<i>Schwarz-Christoffel</i> 轉換	364
	問題解析	366
第十二章	數列與級數	377
12-1	數列	377
12-2	級數	378
12-3	幕級數	381
12-4	<u>泰勒</u> 級數	382
12-5	<u>勞倫斯</u> 級數	383
	問題解析	385
第十三章	殘數積分法	401
13-1	殘數理論	401
13-2	特殊實數積分之求值	402
	問題解析	405

第十四章 機率 433

14-1 集合	433
14-2 排列與組合	434
14-3 機率	436
14-4 一維隨機變數	439
14-5 二維隨機變數	442
14-6 隨機變數的性質	444
14-7 離散隨機變數及其分配	447
14-8 連續隨機變數及其分配	452
問題解析	455

附錄一 歷年高等考試考題彙編 473

(一) 60年高等考試工程數學試題	473
(二) 61年高等考試工程數學試題	475
(三) 62年高等考試工程數學試題	476
(四) 63年高等考試工程數學試題	477
(五) 64年高等考試工程數學試題	478
(六) 66年高等考試工程數學試題	480
(七) 69年高等考試工程數學試題	482
(八) 70年高等考試工程數學試題	483
(九) 71年高等考試工程數學試題	484

(十)	72年高考電機技師電工數學試題	486
-----	-----------------------	-----

(十一)	73年高考電機技師電工數學試題	488
------	-----------------------	-----

附錄二 歷年各類特考考題彙編	489
-----------------------	------------

(一)	60年電信特考工程數學試題	489
-----	---------------------	-----

(二)	61年國防特考工程數學試題	490
-----	---------------------	-----

(三)	61年3月電信特考工程數學試題	490
-----	-----------------------	-----

(四)	61年9月電信特考工程數學試題	492
-----	-----------------------	-----

(五)	63年電信特考工程數學試題	493
-----	---------------------	-----

(六)	63年鐵路特考工程數學試題	494
-----	---------------------	-----

(七)	64年港務特考工程數學試題	495
-----	---------------------	-----

(八)	65年鐵路特考工程數學試題	496
-----	---------------------	-----

(九)	67年電信特考工程數學試題	497
-----	---------------------	-----

(十)	69年電信特考工程數學試題	499
-----	---------------------	-----

(十一)	70年鐵路特考電工數學試題	500
------	---------------------	-----

附錄三 歷年各研究所考題彙編	503
-----------------------	------------

(一)	70年清大機械研究所工程數學試題	503
-----	------------------------	-----

(二)	70年清大計管研究所工程數學試題	506
-----	------------------------	-----

(三)	70年清大計管研究所線性代數試題	507
-----	------------------------	-----

(四)	70年台大機械研究所工程數學試題	509
-----	------------------------	-----

(五)	70年成大機械研究所工程數學試題	510
-----	------------------------	-----

(六)	70年淡大機械研究所工程數學試題	513
-----	------------------------	-----

(七)	71年台大電機研究所工程數學試題	514
-----	------------------------	-----

(八)	71年台大機械研究所工程數學試題	516
-----	------------------------	-----

(九)	71年清大機械研究所工程數學試題	517
-----	------------------------	-----

(十)	71年交大機械研究所工程數學試題	520
-----	------------------------	-----

(十一)	71 年交大機械研究所工程數學試題·····	522
(十二)	72 年清大動機研究所工程數學試題·····	523
(十三)	72 年交大機械研究所工程數學試題·····	525
(十四)	72 年興大應用數學研究所工程數學試題·····	528
(十五)	72 年台大電機研究所工程數學試題·····	529
(十六)	73 年台大資訊工程研究所工程數學試題·····	531
(十七)	73 年清大計算機管理決策研究所試題·····	532
(十八)	73 年台大電機工程研究所工程數學試題·····	534
(十九)	73 年清大機械研究所工程數學試題·····	538
(二十)	73 年交大控制研究所工程數學試題·····	540
(廿一)	73 年台大機械研究所工程數學試題·····	543
(廿二)	73 年成大航空所應用數學試題·····	544

參考書目

547

第一章

一階微分方程式

1-1 基本定義

凡是一個方程式含有因變數 (*dependent variable*) 或函數之導數者，我們就稱它為微分方程式 (*differential equation*)，而依此方程式中自變數 (*independent variable*) 的個數，又可分為：

(1) 常微分方程式 (*ordinary differential equation*)

僅包含一個自變數的微分方程式，如

$$y' = \cos x, \quad y'' + y = e^x$$

其中 y 為因變數， x 為自變數。

(2) 偏微分方程式 (*partial differential equation*)

包含二個或更多個自變數的因變數之微分方程式，如

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$$

其中 v 為因變數， x, y, z 為自變數。

微分方程式的階數 (*order*)，就是方程式中所包含最高階導數的階數。如 $(y')^2 + y^3 = x$ 是一階常微分方程式。

微分方程式的次數 (*degree*)，通常是由此方程式中最高階導數的指數 (*exponent*) 來決定，如

$$(y'')^2 = (1 + y')^3 \text{ 是二次}$$

$$y''' = \sqrt{x + y} \text{ 是一次}$$

2 工程數學解析

若一微分方程式的所有因變數及其導數的係數都是一次方時，則此方程式稱為線性微分方程式，如 $-n$ 階之線性微分方程式其通式為：

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = r(x) \quad (1)$$

一微分方程式若不具此形式者，稱為非線性微分方程式。

若一微分方程式的所有因變數及其導數的係數都是常數時，則此方程式稱為常係數微分方程式，如

$$y'' + ay' + by = 0, \quad a, b \text{ 是常數。}$$

若其係數含有變數時，則稱為變係數微分方程式，如

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$$

在(1)式中若 $r(x) = 0$ ，則稱為齊次(homogeneous)，否則稱為非齊次(nonhomogeneous)。

若一 n 階微分方程式的解中含有 n 個獨立常數，則此解稱為方程式的通解(general solution)。若求出通解中的任意常數使其滿足某項條件時，則此解稱為方程式的特解(particular solution)。

凡是不能由通解中設定任意常數值而獲得之解，稱為奇解(singular solution)，例如一方程式 $y = xy' + (y')^2$ ，其通解為 $y = cx + c^2$ ，而 $y = -x^2/4$ 就不是從通解中求得的，故稱其為奇解。

若逐一把通解中的任意常數分別置定適當的值，可逐一求得微分方程式的各個解，則稱此通解為全解(complete solution)。

若一微分方程式的解不等於零，則稱為非顯解(nontrivial solution)；若解等於零，則稱為顯解(trivial solution)。

1-2 一階常微分方程式

現在將一些工程應用中常見的一階常微分方程式，其形式與解法敘述如下：

(1) 可分離變數方程式 (*separable equation*)

若一階微分方程式，可由代數法化簡為如下形式

$$g(y) dy = f(x) dx \quad (1)$$

則此方程式稱為可分離變數方程式，利用積分法則此類型方程式之解可立刻求得

$$\int g(y) dy = \int f(x) dx + c \quad (2)$$

其中 c 為積分常數， f 與 g 為連續函數。

其他常見的可分離變數方程式還有

$$f(x) G(y) dx = F(x) g(y) dy \quad (3)$$

$$dy/dx = M(x) N(y) \quad (4)$$

(3) 式的通解可先由乘積 $F(x) G(y)$ 來除此方程式，使變數分離之後再積分以求得

$$\int [g(y)/G(y)] dy = \int [f(x)/F(x)] dx + c$$

同樣的，(4) 式的通解可先由乘以 dx 再除以 $N(y)$ ，然後積分以求得

$$\int dy / N(y) = \int M(x) dx + c$$

(2) 可化成分離形式的方程式

有些一階微分方程式是不可分離的，但經過變數變換後即可分離，如

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right) \quad (5)$$

對這種形式的方程式，可令 $y/x = u$

y 是 u 和 x 的函數，因此

4 工程數學解析

$$y = ux \quad y' = u + u'x$$

故(5)式變為 $u + u'x = g(u)$

分離變數 u 和 x 可得

$$\frac{du}{g(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

先積分，然後以 y/x 代替 u ，即可得(1)式的通解

(3) 正合微分方程式 (*exact differential equation*)

若一階微分方程式 $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ (6)

可化成右邊形式 $du = (\partial u / \partial x)dx + (\partial u / \partial y)dy = 0$ (7)

則稱為正合微分方程式。其通解為

$$u(x, y) = c$$

比較(6)、(7)式，可知

$$\partial u / \partial x = M, \quad \partial u / \partial y = N$$

$$\partial M / \partial y = \partial^2 u / \partial x \partial y, \quad \partial N / \partial x = \partial^2 u / \partial y \partial x$$

$\therefore \partial M / \partial y = \partial N / \partial x$ 是正合微分方程式之充要條件。

通常一個非正合微分方程式，乘上適當的函數後，可使其成為正合，此一函數則稱為積分因子 (*integrating factor*)，積分因子並非是唯一的。決定積分因子的方法有下列原則：

(a) 若一階微分方程式含有 $x dx + y dy = \frac{1}{2} d(x^2 + y^2)$ 則可用 $x^2 + y^2$ 的某些函數來作因子，以使此方程式成為可積分。

(b) 若方程式含有 $x dy + y dx = d(xy)$ ，則可用 xy 的某些函數來作因子，以使此方程式成為可積分。

(c) 若方程式含有 $x dy - y dx$ ，則可用 $1/x^2$ 或 $1/y^2$ 來作因子，以使此方程式成為可積分。

(4) 線性一階微分方程式

線性一階微分方程式的標準形式爲

$$y' + f(x)y = r(x)$$

若 $r(x) = 0$ ，則此方程式爲齊次 (*homogeneous*)，否則稱爲非齊次 (*nonhomogeneous*)，齊次時其通解爲

$$y(x) = c e^{-\int f(x) dx} \quad (8)$$

而非齊次時其通解爲

$$y(x) = e^{-h} \left[\int e^h r dx + c \right], \quad h = \int f(x) dx \quad (9)$$

另外非齊次者亦可以參數變化法 (*variation of parameters*) 求得

$$y(x) = v \left(\int \frac{r}{v} dx + c \right), \quad v = e^{-\int f(x) dx} \quad (10)$$

(5) Bernoulli 方程式

一次微分方程式若有 $y' + f(x)y = g(x)y^a$ (a 爲任意實數) 之形式，稱爲 Bernoulli 方程式。若 a 不爲 0 或 1，則其爲非線性方程式，經適當之變換後可化成線性方程式。以 y^a 除全式，並設 $u = y^{1-a}$ 代入上式：

$$u' + (1-a)f(x)u = (1-a)g(x) \quad (11)$$

(6) 皮卡疊代法 (*Picard's iteration method*)

有許多一階微分方程式，無法用基本方法求得正確的解，但可用近似法求得近似解。利用皮卡疊代法可求得下列形式的初值問題之近似解：

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (12)$$

由積分可知 (12) 式可寫成下列形式

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[t, y(t)] dt \quad (13)$$

其中 t 表示積分的變數，求 (13) 式的近似解步驟如下：

1 將 $y = y_0 = \text{常數}$ 代入 (13) 式的右邊，可得一較佳的近似值

6 工程數學解析

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_0) dt$$

2 以同樣方法將 $y_1(x)$ 代入可得

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[t, y_1(t)] dt$$

3 似此類推，疊代法的第 n 步驟產生

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[t, y_{n-1}(t)] dt$$

以此方法可得一系列的近似值

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), \dots$$