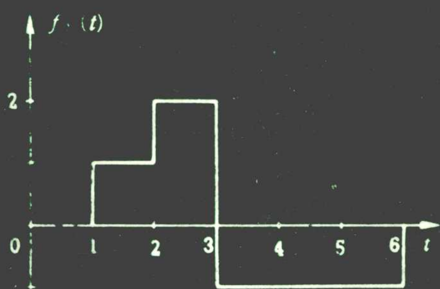
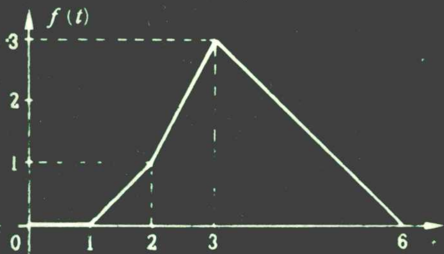
工程數學解析

黃漢邦 編著





SUPER 超級科技圖書股份有限公司

工程數學解析

Engineering Mathematics and Problems Solving

超級

作　者　黃漢邦
發行人　林國富
發行所　超級科技圖書股份有限公司
業務部　永和市林森路50號4樓
電　話　9251021
郵政劃撥帳號　1009155-4
行政院新聞局登記證局版台業字第2405號
承印者　中全盛彩色印刷廠
中和市員山路294巷9號
初　版　中華民國七十一年六月
五　版　中華民國七十五年一月
定　價　新台幣貳佰貳拾元整

序

數學是一切科學之母，工程數學更是各種工程科學的基礎。往往工程數學的良陋，可決定工科學生及工程師的素質。因此，不但學校課程中，工程數學的訓練一直很重，而且各種升學、就業考試中，工程數學都是必考科目。然而，如何能學好工程數學呢？除了平時上課須專心之外，最重要的就是要多做各式各類的題目，由解題中深切體認工程數學的精髓，並藉以驗證個人的學習是否確實。基於此一事實，以及筆者對工程數學的興趣，特將多年來的學習心得編撰成此書，以饗讀者。

筆者於民國六十九年役畢後，連續參加高考、電信特考、經濟特考、及公費留考，均僥倖及格。其間，筆者曾參閱市面上有關之書籍，發覺有的雖看似內容豐富，但錯誤甚多，製作草率，對學習工程數學或參加升學、就業考試並無多大助益，反而易使讀者誤入岐途，白費時間。因此本書特別注重校對，對各種典型題目的解答力求詳細，繪圖力求清晰正確，希望能協助讀者徹底瞭解工程數學，順利通過各類升學、就業考試，並因此打下工程數學之基礎，做爲將來升學進修、就業的本錢。

黃漢邦　謹序於
美國・安娜堡
密西根大學
民國七十一年六月

目　　錄

第一章
一階微分方程式

1-1　基本定義

凡是一個方程式含有因變數（*dependent variable*）或函數之導數者，我們就稱它為微分方程式（*differential equation*），而依此方程式中自變數（*independent variable*）的個數，又可分為：

(1)常微分方程式（*ordinary differential equation*）

僅包含一個自變數的微分方程式，如

$$y' = \cos x \quad , \quad y'' + y = e^x$$

其中 y 為因變數，x 為自變數。

(2)偏微分方程式（*partial differential equation*）

包含二個或更多個自變數的因變數之微分方程式，如

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$$

其中 v 為因變數，x，y，z 為自變數。

微分方程式的階數（*order*），就是方程式中所包含最高階導數的階數。
如 $(y')^2 + y^3 = x$ 是一階常微分方程式。
微分方程式的次數（*degree*），通常是由此方程式中最高階導數的指數（*exponent*）來決定，如

$(y'')^2 = (1 + y')^3$ 是二次

$y''' = \sqrt{x + y}$　　是一次

若一微分方程式的所有因變數及其導數的係數都是一次方時，則此方程式稱爲線性微分方程式，如一n階之線性微分方程式其通式爲：

$$p_0(x)y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=r(x) \qquad (1)$$

一微分方程式若不具此形式者，稱爲非線性微分方程式。

若一微分方程式的所有因變數及其導數的係數都是常數時，則此方程式稱爲常係數微分方程式，如

$$y''+ay'+by=0 \quad ，a，b\text{是常數。}$$

若其係數含有變數時，則稱爲變係數微分方程式，如

$$y''+f(x)y'+g(x)y=0$$

在(1)式中若$r(x)=0$，則稱爲齊次（*homogeneous*），否則稱爲非齊次（*nonhomogeneous*）。

若一n階微分方程式的解中含有n個獨立常數，則此解稱爲方程式的通解（*general solution*）。若求出通解中的任意常數使其滿足某項條件時，則此解稱爲方程式的特解（*particular solution*）。

凡是不能由通解中設定任意常數值而獲得之解，稱爲奇解（*singular solution*），例如一方程式$y=xy'+(y')^2$，其通解爲$y=cx+c^2$，而$y=-x^2/4$就不是從通解中求得的，故稱其爲奇解。

若逐一把通解中的任意常數分別置定適當的值，可逐一求得微分方程式的各個解，則稱此通解爲全解（*complete solution*）。

若一微分方程式的解不等於零，則稱爲非顯解（*nontrivial solution*）；若解等於零，則稱爲顯解（*trivial solution*）。

1-2　一階常微分方程式

現在將一些工程應用中常見的一階常微分方程式，其形式與解法敍述如下：

(1)可分離變數方程式（ *separable squation* ）

若一階微分方程式，可由代數法化簡爲如下形式

$$g(y)\,dy = f(x)\,dx \tag{1}$$

則此方程式稱爲可分離變數方程式，利用積分法則此類型方程式之解可立刻求得

$$\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx + c \tag{2}$$

其中 c 爲積分常數， f 與 g 爲連續函數。

其他常見的可分離變數方程式還有

$$f(x)G(y)\,dx = F(x)\,g(y)\,dy \tag{3}$$

$$dy/dx = M(x)N(y) \tag{4}$$

(3)式的通解可先由乘積 $F(x)G(y)$ 來除此方程式，使變數分離之後再積分以求得

$$\int [g(y)/G(y)]\ dy = \int [f(x)/F(x)]\ dx + c$$

同樣的，(4)式的通解可先由乘以 dx 再除以 $N(y)$，然後積分以求得

$$\int dy\ /N(y) = \int M(x)\,dx + c$$

(2)可化成分離形式的方程式

有些一階微分方程式是不可分離的，但經過變數變換後即可分離，如

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right) \tag{5}$$

對這種形式的方程式，可令　$y/x = u$

y 是 u 和 x 的函數，因此

$$y=ux \qquad y'=u+u'x$$

故(5)式變為 $u+u'x=g(u)$

分離變數 u 和 x 可得

$$\frac{du}{g(u)-u}=\frac{dx}{x}$$

先積分，然後以 y/x 代替 u，即可得(1)式的通解

(3)正合微分方程式（ *exact differential equation* ）

若一階微分方程式 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ (6)

可化成右邊形式 $du=(\partial u/\partial x)dx+(\partial u/\partial y)dy=0$ (7)

則稱為正合微分方程式。其通解為

$$u(x,y)=c$$

比較(6)、(7)式，可知

$$\partial u/\partial x=M, \qquad \partial u/\partial y=N$$

$$\partial M/\partial y=\partial^2 u/\partial x\partial y, \qquad \partial N/\partial x=\partial^2 u/\partial y\partial x$$

$\therefore \partial M/\partial y=\partial N/\partial x$ 是正合微分方程式之充要條件。

通常一個非正合微分方程式，乘上適當的函數後，可使其成為正合，此一函數則稱為積分因子（ *integrating factor* ），積分因子並非是唯一的。決定積分因子的方法有下列原則：

(*a*)若一階微分方程式含有 $xdx+y\,dy={}^1/_2\,d(x^2+y^2)$ 則可用 x^2+y^2 的某些函數來作因子，以使此方程式成為可積分。

(*b*)若方程式含有 $x\,dy+y\,dx=d(xy)$，則可用 $x\,y$ 的某些函數來作因子，以使此方程式成為可積分。

(*c*)若方程式含有 $x\,dy-y\,dx$，則可用 $1/x^2$ 或 $1/y^2$ 來作因子，以使此方程式成為可積分。

(4)線性一階微分方程式

線性一階微分方程式的標準形式爲

$$y' + f(x)y = r(x)$$

若 $r(x)=0$，則此方程式爲齊次（*homogeneous*），否則稱爲非齊次（*nonhomogeneous*），齊次時其通解爲

$$y(x) = c e^{-\int f(x)dx} \tag{8}$$

而非齊次時其通解爲

$$y(x) = e^{-h}\left[\int e^{h} r\, dx + c\right], \quad h = \int f(x)dx \tag{9}$$

另外非齊次者亦可以參數變化法（*variation of parameters*）求得

$$y(x) = v\left(\int \frac{r}{v} dx + c\right), \quad v = e^{-\int f(x)dx} \tag{10}$$

(5) *Bernoulli* 方程式

一次微分方程式若有 $y' + f(x)y = g(x)y^{a}$（a 爲任意實數）之形式，稱爲*Bernoulli* 方程式。若 a 不爲 0 或 1，則其爲非線性方程式，經適當之變換後可化成線性方程式。以 y^{a} 除全式，並設 $u = y^{1-a}$ 代入上式：

$$u' + (1-a)f(x)u = (1-a)g(x) \tag{11}$$

(6)皮卡疊代法（*Picard's iteration method*）

有許多一階微分方程式，無法用基本方法求得正確的解，但可用近似法求得近似解。利用皮卡疊代法可求得下列形式的初值問題之近似解：

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{12}$$

由積分可知（12）式可寫成下列形式

$$y(x) = y_0 + \int_{x0}^{x} f\,[t, y(t)]\, dt \tag{13}$$

其中 t 表示積分的變數，求（13）式的近似解步驟如下：

1 將 $y = y_0 =$ 常數代入（13）式的右邊，可得一較佳的近似値

$$y_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\,dt$$

2. 以同樣方法將 $y_1(x)$ 代入可得

$$y_2(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f[t, y_1(t)]\,dt$$

3. 似此類推，疊代法的第 n 步驟產生

$$y_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f[t, y_{n-1}(t)]\,dt$$

以此方法可得一系列的近似值

$$y_1(x),\ y_2(x),\ \cdots\cdots\cdots,\ y_n(x),\ \cdots\cdots\cdots$$