

余介石
張通謨 編著

復興高級中學
教科書

幾何學

商務印書館發行

復興高級
學教科

余介石
張通讀
編著

江苏工业学院图书馆
幾何學
章

何學

商務印書館發行

中華民國二十三年七月初版
中華民國二十三年八月三版

高級中學用

復興幾何學 一冊

每冊定價大洋壹元

外埠酌加運費匯費

編著者

余介石 張通謨

主編人

王雲五 上海河南路

印刷所

商務印書館 上海河南路

發行所

商務印書館 上海及各埠

版權所有
必究

(本書校對者楊靜宜)

B四三四二

編輯大意

(一) 本書係完全按照最近部頒課程標準編輯,適合高中一年級之用。

(二) 按部頒標準,高中一年級上學期每週授幾何三小時,下學期每週授幾何二小時,內容分平面幾何,立體幾何二部,而在實施方法概要中,則明言立體幾何,可僅授大意,故本書將平面,立體兩部份,酌量分配,平面部分約佔全書 $\frac{3}{5}$, 立體部分約佔 $\frac{2}{5}$, 以備高中一年級上下學期之用。

(三) 部頒標準規定,高一幾何三角並授,故本書力求與本館出版的高中三角切實聯絡,同時採用,可收互相啓發之益。

(四) 本書平面部分六編,第一編論幾何基本觀念和方法,第二三兩編合述證法各種的結論(如等量,平行等)第四編論幾何度量與計算,第五六兩編分論軌跡與作圖,平面幾何重要問題,及初中未能詳授的教材,已盡備於此,更於卷首冠以初中幾何複習,以備證法中引用,立體部分三編,論空間重要立體特性與量法。

(五) 幾何一科最重系統,初高中所授教材應有親

切之聯絡，本書與徐子豪女士和著者合編的復興初中幾何密相銜接，已習過該書者，進修本書，更易得益。

(六) 初中幾何因教授時間及學生程度關係，理論未能週備，本書對此頗為注意，如對不可通約量等理，皆有較完密的討論，但仍以學生程度所能了解的為限。

(七) 軌跡與作圖，最足發展學生探求發明的能力，本書特各立專章，詳加研究。

(八) 本書習題豐富，支配勻稱，以助讀者了解各種定理及方法，教師學子對此宜特加注意。

(九) 本書純用簡潔白話講解，使學生不至生文字上的困難，以阻其學習的興趣。

(十) 算理專名，尚無標準漢譯，本書所用名詞，概從最通用者，並於初見時，附註英文原名。

(十一) 此次部頒課程標準，高中算學部分，幾何中平面部分編制最為新穎，故中西佳著雖多，均不能供他山攻錯之用，編時至感困難，著者雖係該案起草之一人，亦深苦不易着手，祇以學校需要甚急，復承段師撫羣之督責與指導，不得不勉力以赴，惟是編制方面既無成書可作依據，而時日復迫，倉卒成書，疵謬定所不免，敬乞海內方家及教師嚴加指正，俾得他日修改。

(十二) 本書論極大極小及對稱兩部分,大體根據 Schultze-Sevenoak-Schuyler: Plane Geometry,而第二三編證法各論的編制,也係師這書中 Method of proof 之意(見該書 §§70, 75, 76, 77, 94, 98, 123, 134, 145, 152, 169, 171, 185, 189, 198, 202, 309, 310, 366, 435)。又承段師撫羣特許,得於第一編內,在其所撰的混合算學教科書中,採用一部分材料,此外又曾參考友人嚴慕光先生所撰幾何證題法,第六編作圖題,大體根據日人柳原吉次所撰的幾何學軌跡及作圖;立體幾何則以 L. D. Haertter: Solid Geometry 爲藍本,謹附志於此,以示不敢掠美,並表謝忱。

民國二三年元月編者謹識

幾何學

目次

預編 初中平面幾何復習1—14

一.公理,公法. 二.直線形. 三.軌跡,共點線. 四.圓.
五.比例,相似形. 六.作圖題. 七.幾何計算. 八.幾何中
符號.

平面幾何學

第一編 緒論15—39

1.爲什麼要學幾何? 2.基本元素. 3.定義. 4.無
定義的名詞. 5.幾何的抽象性. 習題一. 6.定理與問
題. 7.證法的基礎. 8.幾何學派別. 習題二. 9.幾何
命辭. 10.命辭的通式. 11.命辭四式. 12.四式關係.
13.相關命辭的真妄. 習題三. 14.逆對辭律. 15.逆命
辭. 16.定一法. 習題四. 17.證辭法通論. 18.直接證
法. 19.舉例. 習題五. 20.間接證法. 21.歸謬法舉例.
22.窮舉法舉例. 習題六. 23.離接命辭. 24.逆定理律.
25.證法與作圖. 習題七.

第二編 證法各論40—70

26.疊合法. 27.全等三角形定理的應用. 28.輔助線. 29.輔助形. 習題八. 30.平行線與等線段或等角. 習題九. 31.倍量,半量,兩量和差. 32.圓與等角. 33.相似形與等角. 習題十. 34.不等量原則. 習題十一. 35.圖形度量法. 36.平行線判別. 37.平行四邊形. 習題十二. 38.垂直線判別. 39.直角三角形性質. 40.圓弧度量法. 習題十三. 41.證比例線段法. 42.輔助比. 習題十四. 43.比例與等量. 44.比例與平行性. 習題十五.

第三編 證法各論(續)71—91

45.點,線,圓,位置關係. 46.共線與共點. 47.共圓點證法. 48.九點圓. 習題十六. 49.證共線點的基本原則. 50.西摩松線. 習題十七. 51.尤拉線. 52.線段的正負. 53.孟氏定理. 54.孟氏定理應用. 習題十八. 55.共點線證法. 56.帥氏定理. 57.帥氏定理應用. 習題十九. 58.角的正負. 59.共點圓證法. 習題二十.

第四編 度量與計算 92—113

60.幾何度量. 61.有理數,無理數. 62.公度. 63.極限. 64.圓心角定理. 習題二一. 65.量與數. 66.畢氏定理. 67.畢氏定理推廣. 68.三角形的高. 69.三邊求

積公式. 70. 三角形分角線, 中線. 習題二二. 71. 計算與證題. 72. 多氏定理. 73. 多氏定理的逆定理. 習題二三. 74. 極大, 極小. 75. 等周形. 76. 極大面積直角三角形定理. 77. 極小周界等積三角形定理. 78. 極大面積等周三角形定理. 習題二四. 79. 極大面積內接多角形定理. 80. 極大面積定邊多角形定理. 81. 極大面積等周多角形定理. 82. 等周正多角形定理. 83. 等積正多角形定理. 習題二五.

第五編 軌跡論.....114—135

84. 心對稱. 85. 心對稱形. 86. 軸對稱. 87. 軸對稱形. 88. 對稱基本定理. 89. 兩種對稱的關係. 習題二六. 90. 軌跡. 91. 軌跡定理的充要性. 92. 軌跡四方面例解. 93. 軌跡的對稱性. 習題二七. 94. 軌跡的探求. 95. 軌跡性質的預斷. 96. 特殊點的確定. 97. 阿氏圓. 98. 等冪軸. 習題二八. 99. 基本軌跡. 100. 爲圓的軌跡. 習題二九. 101. 爲弧的軌跡. 102. 爲直線的軌跡. 103. 爲線段的軌跡. 習題三十.

第六編 作圖題.....136—158

104. 作圖規約. 105. 不可作與無解. 106. 作圖步驟. 107. 代數解析. 108. 黃金分割. 習題三一. 109. 軌跡交

截法, 110.軌跡交截法舉例, 習題三二, 111.輔助圖法, 習題三三, 112.相似形法, 113.包線, 習題三四, 114.變位法, 115.反射, 116.平移, 117.旋轉, 習題三五, 118.等積變圖, 習題三六.

立體幾何學

第七編 空間直線與平面…159—194

119.立體幾何, 120.平面, 121.平面公理, 122.平面決定法, 123.直線與平面的相交, 124.垂直, 習題三七, 125.垂面確定定理, 126.垂線成面定理, 習題三八, 127.面上垂線定理, 128.斜線定理, 129.點面距離, 習題三九, 130.直線與平面的平行, 131.不相交直線, 132.同面垂線定理, 習題四十, 133.平行線面定理, 134.不相交線定理, 習題四一, 135.同線垂面定理, 136.截線平行定理, 137.角邊平行定理, 138.平行截面定理, 習題四二, 139.二面角, 140.二面角的平面角, 141.平面角定理, 142.二面角的相等, 143.相等二面角定理, 144.二面角的分類, 145.二面角的度量, 146.垂面含線定理, 習題四三, 147.含垂線面定理, 148.垂面交線定理, 149.過線垂面定理, 150.射影, 151.直線與平面交角, 習題四四, 152.不相交線距離定理,

153.基本軌跡。習題四五。

第八編 多面角 多面體 … 195—221

154.多面角。155.全等多面角。156.對稱多面角。
157.三面角面角定理。158.多面角面角和定理。159.全等三面角定理。習題四六。160.多面體。161.正多面體。162.角柱。163.特殊角柱。164.截面。165.斷角柱。
166.角柱平行截面定理。習題四七。167.角柱側面積定理。168.全等角柱定理。169.體積。170.等積直角柱定理。171.平行六面體。172.平行六面體對面定理。習題四八。173.平行六面體等分定理。174.長方體體積。175.角柱體積。習題四九。176.角錐。177.角錐截面定理。178.角錐臺。179.正角錐。180.正角錐側面定理。習題五十。181.角錐體積。182.角錐臺體積。習題五一。

第九編 柱面 圓錐 球……222—256

183.柱面。184.柱。185.特殊柱。186.圓柱的切面。
187.圓柱與角柱。188.圓柱的極限觀。189.圓柱的度量。習題五二。190.錐面。191.錐。192.特殊錐。193.圓錐截面定理。194.圓錐的切面。195.圓錐與角錐。196.圓錐的極限觀。197.圓錐的度量。習題五三。198.錐臺。

199.角錐臺與圓錐臺. 200.圓錐臺的極限觀. 201.圓錐臺的度量. 202.旋轉面. 203.直圓錐與直圓錐臺側面積的又一公式. 204.相似直圓柱及錐. 205.相似直圓錐及錐體積比. 習題五四. 206.球. 207.球的特性. 208.球的截面定理. 209.大圓. 210.極. 211.二點定大圓定理. 212.球面距離. 213.極距離. 214.大圓特性. 習題五五. 215.小圓極距離定理. 216.大圓極點定理. 217.切線,切面. 218.切面定理. 219.球與多面體. 220.四面體內切球定理. 221.切球. 習題五六. 222.四面體外接球定理. 223.球面多角形. 224.球面三角形各邊關係定理. 225.球面上二點距離定理. 226.球面幾何學. 227.非歐幾何學. 習題五七. 228.鼓壁. 229.球面積. 230.球面積定理. 231.月形. 232.球度. 習題五八. 233.球體積. 234.球體積定理. 235.球面角錐. 236.梳形. 237.漏斗形. 238.鼓體. 習題五九.

附錄 立體幾何公式彙覽.

幾何學

預編

初中平面幾何複習

讀者在初中裏，已曾學過許多幾何學的知識，不過一則還有當待補充的地方（如軌跡和作圖方面），二則對於方法的運用，尚欠講求，這是在高中時代應當格外留意的事。但幾何學是最有系統的科目，以後研究方法和補充新材料時，處處要引用在初中已習的幾何知識。讀者對已習的幾何知識，總有不免遺忘的地方，又所學的也未必完全一致，故為稍作複習，並備引證之用起見，特彙集初中程度所應明的基本知識，*為全書之冠。

〔注意〕本篇因有備引證和作複習二個目的，在於類別之中，仍略寓按邏輯次序排列之意。

一 公理 公法

（甲）普通公理。分等量公理與不等量公理二類。

*大體以徐子豪女士與著者合編的復興初級中學教科書幾何為準，這書亦係本館印行。

(A) 等量公理 有六條.

(1) 如 $a=b, b=c$, 則 $a=c$.

(2) 如 $a=b, c=d$, 則 $a+c=b+d$.

(3) 如 $a=b, c=d$, 則 $a-c=b-d$.

(4) 如 $a=b, c=d$, 則 $ac=bd$.

特例. 如 $a=b$, 則 $na=nb$, 又 $a^n=b^n$.

(5) 如 $a=b, c=d$, 則 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$. 特例. $(\frac{a}{n}=\frac{b}{n})$

(6) 如 $a=b$, 則 $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}$.

上面各公理,可概括成一條,叫代換公理,即:在一式中的量,都可用等量來代換,而不改其結果.

(B) 不等量公理 有六條.

(1) 如 a 與 b 爲二同類量,則必合於 $a=b, a>b, a<b$ 三式之一,但不能同時合於二式.

(2) 如 $a>b, b>c$, 則必 $a>c$.

(3) 如 $a>b, c\geq d$, 則 $a+c>b+d$.

(4) 如 $a>b, c\geq d$, 則 $a-d\geq c-b$.

(5) 如 $a>b, c\geq d$, 則 $ac\geq bd$.

(6) 如 $a>b, c\geq d$, 則 $\frac{a}{d}\geq\frac{b}{c}$.

(乙) 幾何公理.

(1) 直線公理. 通過二點,有一直線,但只有一直線.

(2) 二點距離公理. 二點中間,直線段最短.

(3) 直角公理. 凡直角皆相等.

(4) 垂線公理. 過已知直線上一點,可作一垂線,但只可作一垂線.

(5) 移形公理. 凡圖形的移其位置,而不變其形狀大小.

(6) 全分公理. 全量必大於分量,而為分量總和

(7) 平行公理. 過已知線外一點,而只可作一直線,與他線平行.

(丙) 作圖公法. 有三條.

(1) 定直線公法. 過二點可作一直線.

(2) 延直線公法. 直線可任意延長.

(3) 作圓公法. 有已知中心和半徑,可作一圓.

二 直線形

(甲) 線段,角.

(1) 平角定理. 一直線同側,共頂諸角和為二直
角.

(2) 周角定理. 一點四周各角和爲四直角.

(3) 等角餘(補)角定理. 同角或等角餘(補)角必等.

(4) 對頂角定理. 二直線相交,所成對頂角必等.

(5) 分角線定理. 一角只有一分角線.

(6) 中點定理. 一線段只有一中點.

(乙) 全等三角形條件.

(1) $s.a.s.$ 二三三角形有二邊夾一角對應相等,則爲全等三角形.

(2) $a.s.a.$ 及 $a.a.s.$ 二三三角形有二角一聯邊, (或任一邊)彼此對應相等,則爲全等三角形.

(3) $s.s.s.$ 二三三角形有三邊彼此對應相等,則爲全等三角形.

(4) 全等直角三角形定理一(斜邊一銳角). 二個直角三角形,有斜邊及一銳角,對應相等,則必全等.

(5) 全等直角三角形定理二(斜邊及一腰). 二個直角三角形,有斜邊及一腰,對應相等,則必全等.

(丙) 等腰三角形.

(1) 性質定理. 等腰三角形中,對等邊的角必等.

(2) 判別定理. 如三角形有二角相等,其對邊必

等.

(丁) 不等量諸定理.

(1) 三邊關係定理. 三角形任二邊的和,總大於第三邊;任二邊的較,總小於第三邊.

(2) 外角定理. 三角形外角大於其任一內對角.

(3) 邊角關係定理. 三角形中,對大角的邊必大;對大邊的角必大.

(4) 垂線最短定理. 從線外一點,到線上的一切線段,以垂線爲最短.

(5) 非全等三角形定理. 如兩三角形二邊對應相等,則夾角大的,所對邊必大;又第三邊大的對角必大.

(戊) 平行線.

(A) 平行線判別及性質.

(1) 平行判別定理. 二直線被另一線所截,如(I)一組錯角相等,或(II)一組應角相等,或(III)同側二內或外角互補,則這二直線必平行.

(2) 平行性質定理. 二平行線被一線所截,則(I)錯角相等,(II)應角相等,(III)同側二內或外角互補.

(3) 相交線判別定理. 二直線被另一線所截,如所成同側二內角和小於二直角,則向這側延長必相交.