21 Applicable Education

21世纪应用型人才教育公共基础课通用教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

（上 册）

GAODENG SHUXUE

葛恒林　施伟斌　主编

武汉理工大学出版社

21世纪应用型人才教育公共基础课通用教材

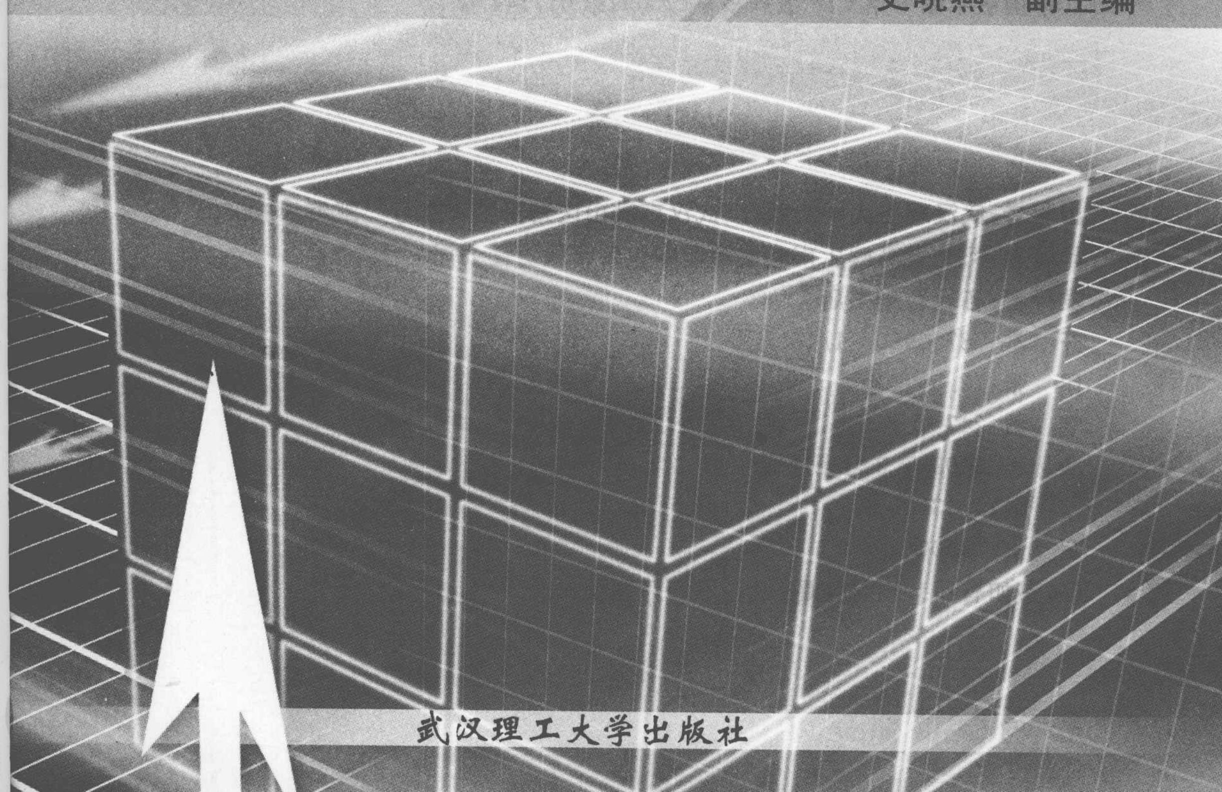
高等数学

GAODENG SHUXUE

（上册）

葛恒林　施伟斌　主编

史晓燕　副主编



武汉理工大学出版社

【内 容 提 要】

《高等数学》(上、下)是21世纪应用型人才教育公共基础课通用教材之一.

本书主要包括三部分内容,分别是微积分、线性代数初步、概率论与数理统计初步.上册的内容为微积分,下册的内容为线性代数初步和概率论与数理统计初步.在选材和叙述上概念清晰易懂,内容深浅适度,容量适当,并结合工科专业的特点,注重实践应用.同时,在例题和习题的选择上,不少题目既具有启发性、趣味性,又具有挑战性和广泛的应用性.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学·上/葛恒林,施伟斌主编.—武汉:武汉理工大学出版社,2009.2
ISBN 978-7-5629-2676-4

Ⅰ.高… Ⅱ.①葛… ②施… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第017144号

出版者:武汉理工大学出版社(武汉市洪山区珞狮路122号 邮编:430070)
印刷者:河北省高碑店市鑫宏源印刷包装有限责任公司
发行者:各地新华书店
开 本:787×960 1/16
印 张:12.5
字 数:247千字
版 次:2009年3月第1版
印 数:1—3000册
定 价:24.00元
(本书如有印装质量问题,请向承印厂调换)

前　　言

《高等数学》(上、下)是21世纪应用型人才教育公共基础课通用教材之一.

学好这门课程,能为学生毕业后从事计量分析工作提供有力的工具,同时能够极大地提高学生的逻辑思维能力和创新思维能力.编写本套教材的主要原则是在讲清必要的基本概念和基本理论的基础上,加强基本方法和基本技能的训练,利用有限的学时,使学生掌握后续课程和今后实际工作中常用的数学方法.

本套书主要包括三部分内容,分别是微积分、线性代数初步、概率论与数理统计初步.上册的内容为微积分,下册的内容为线性代数初步和概率论与数理统计初步.在选材和叙述上概念清晰易懂,内容深浅适度,容量适当,并结合工科专业的特点,注重实践应用.同时,在例题和习题的选择上,不少题目既具有启发性、趣味性,又具有挑战性和广泛的应用性.

参加本书编写的有:安徽财经大学葛恒林教授(上册第一、二、三章)、西安技师学院施伟斌副教授(上册第四、五章)、辽宁地质工程职业学院史晓艳副教授(上册第六章).由葛恒林、施伟斌老师担任主编,史晓艳老师担任副主编,最后全书由葛恒林、施伟斌老师负责总纂、修改和审定.

本书在编写过程中,得到诸多参编老师所在学校领导和北京华兴同盟文化交流有限公司的大力支持,同时得到有关专家和学者的热情帮助,书中借鉴了一些著作,在此一并致谢!

由于认识和视野的局限,本书的缺陷和不足在所难免,我们诚恳地希望读者对本书提出宝贵的意见,以使其不断地得到充实和修改.

编　者

2008年11月

目　　录

第一章　函数极限与连续

1.1　函　数

一、集　合

集合是现代数学中的一个极为重要的基本概念，在中学数学中，已对集合作过一些介绍. 为今后讨论问题的方便，这里再将其中的有关内容作一个简单的回顾.

(一)集合的概念及其表示

具有某种特征，并可以相互区别的事物的全体称之为集合，常用大写字母 A、B、C……表示. 其中每个个体事物称为该集合的元素，常用小写字母 a、b、c……表示. 例如，学校全体学生就构成一个集合，其中每一位学生都是这个集合中的一个"元素"；再如，全体自然数也构成一个集合，称自然数集. 由数组成的集合称为数集. 全体实数构成实数集，本书中如无特别说明，数均在实数范围内取值.

如果 A 是一个集合，x 是 A 的元素，则称 x 属于 A，记作 $x\in A$，x 不是 A 的元素，称 x 不属于 A，记作 $x\overline{\in} A$. 本书所讨论的集合具有确定性，即对一集合来说，任何事物或属于该集合，或不属于该集合，二者必居其一.

我们把在一定场合所考察、研究的对象的全体称为全集，记为 U. 一般地，我们把一个集合的部分元素构成的集合称为该集合的一个子集. 若 A 是 B 的一个子集，则记为 $A\subset B$，读作"A 包含于 B"或"B 包含 A".

不含任何元素的集合称为空集，记为 $\varnothing$.

表示一个集合常用的方法有列举法和描述法. 所谓列举法，是将集合的所有元素按任意顺序排列在一起，并用花括号括起来. 例如：由 a、b、c 三个元素组成的集合 A 可表示为

$$A=\{a,b,c\}$$

而描述法是在花括号内先写出构成集合的元素的通用符号，然后再写出每

一个元素都必须满足的条件或法则，并用一条竖线分隔开来. 例如，由所有不大于 1 的正数构成的集合 A，可表示为

$$A=\{x\mid 0<x\leqslant 1\}$$

由平面直角坐标系内单位圆 $x^2+y^2=1$ 内部（不包括边界）所有的点构成的平面点集 B，可表示为

$$B=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$$

全体实数构成的集合记为 R. 由于所有实数与数轴上的点之间有一一对应关系，因此以后我们常常把实数 X 也称为“点 X”.

（二）集合的运算

常见的集合运算有“并”、“交”、“差”、“补”四种，它们的记号与规则如下：

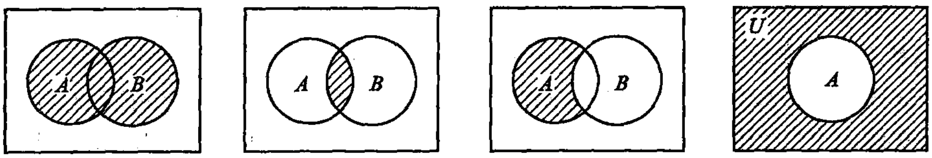
“并”：$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$

“交”：$A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$

“差”：$A-B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$

“补”：$\overline{A}=U-A=\{x\mid x\in U$ 且 $x\notin A\}$

如图 1-1 所示：



$A\cup B$　　$A\cap B$　　$A-B$　　$\overline{A}$

图 1-1

【例 1-1】　设 $A=\{x\mid 3<x<5\}$，$B=\{x\mid x>4\}$　　求：$A\cup B$、$A\cap B$、$A-B$

解：$A\cup B=\{x\mid x>3\}$

$A\cap B=\{x\mid 4<x<5\}$

$A-B=\{x\mid 3<x\leqslant 4\}$

（三）区间和邻域

微积分中，常用的集合是实数集 R 的一些子集，这些子集往往是由介于某两个实数之间的一切实数所组成，称为区间. 有如下几种：

设 a、$b\in R$ 且 $a<b$

(1)满足不等式 $a<x<b$ 的所有实数 x 的集合称为以 a、b 为端点的开区间，记作 (a,b)，即 $(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$（图 1-2）.

(2)满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的所有实数 x 的集合，称为以 a、b 为端点的闭区间，记作 $[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$（图 1-3）.

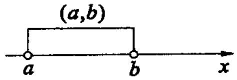


图 1-2

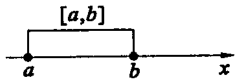


图 1-3

(3)满足不等式 $a<x\leqslant b$(或 $a\leqslant x<b$)的所有实数 x 的集合称半开区间，记作$(a,b]$，即$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$(图 1-4).

类似地，$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$.

以上三种都是以有限数 a、b 为端点的，称为有限区间. 还有以下几种无限区间：

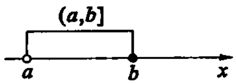


图 1-4

(4)$(a,+\infty)=\{x|a<x<+\infty\}$

$[a,+\infty)=\{x|a\leqslant x<+\infty\}$

(5)$(-\infty,b)=\{x|-\infty<x<b\}$

$(-\infty,b]=\{x|-\infty<x\leqslant b\}$

(6)$(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}=R$

微积分中常用的数集还有邻域.

由绝对值的性质可知，满足不等式 $|x-x_0|<\delta(\delta>0)$的一切实数构成的集合在数轴上是一个以点 x_0 为中心，长度为 2δ 的开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$，称为点 x_0 的 δ 邻域，如图 1-5 所示.

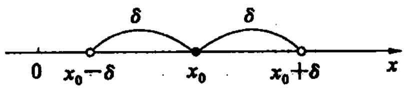


图 1-5

二、函数

(一)函数概念

客观世界的万事万物不仅在运动、变化和发展着，而且它们的运动变化有一定的规律，其规律性常表现在它们相互之间的数量关系上. 下面，我们举几个关于两个变量之间相互联系变化的例子.

【例 1-2】 自由落体运动，设物体下落的时间为 t，落下的距离为 S，假定开始下落的时刻为 $t=0$，那么 St 之间的相依关系由公式

$$S=\frac{1}{2}gt^2$$

给定，其中 g 是重力加速度，假定物体着地的时刻为 $t=T$，那么当时间 t 在闭区间$[0,T]$上任取一个数值时，上式就可以确定 S 的相应数值.

【例 1-3】 设某地一天的气温 T 用自动记录仪记录如图 1-6，当已知时刻 t_0 后，在图上就可以找出此时刻的气温 T_0.

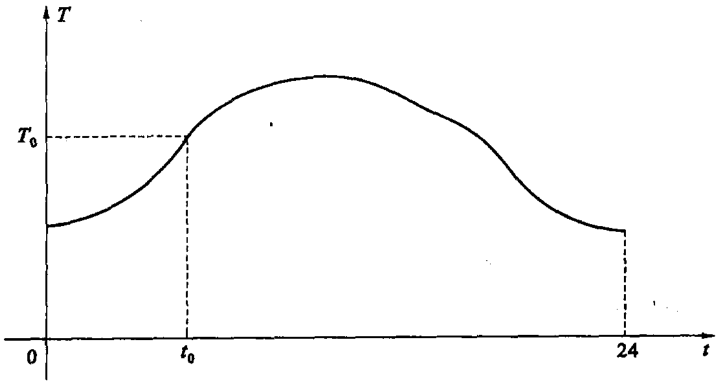


图 1-6

【例 1-4】 为了进行市场预测，调查得某企业 1～6 月份某种商品的销售量分别为 100、105、110、115、111、120 件. 将其列成表格，则月份 t 与销售量 Q 有如下对应关系：

月份 t	1	2	3	4	5	6
销售量 Q	100	105	110	115	111	120

此表格反映了销售量 Q 与月份 t 的依赖关系. 当 t 取整数 1～6 中任一个时，Q 都有唯一值与之对应.

以上三例虽各不相同，但从数学角度分析却有着共同的特征：每一个问题中都包含两个变量和一个确定的对应规则. 尽管这个对应规则的表达方式各有不同(例 1-2 由公式表达，例 1-3 由图形表达，例 1-4 由表格表达)，但都指明了两个变量依赖关系的具体内容. 根据给出的对应规则，当其中一个变量在某一范围内每取一个数值时，另一个变量就有唯一确定的数值与之对应. 我们把两个变量间存在的这种关系称为函数关系.

定义 1.1　设 D 为一个非空实数集，如果存在一个对应规则 f，使得对每一个 $x\in D$，都能由 f 唯一地确定一个实数 y，称对应规则 f 为定义在实数集 D 上的一个函数. 其中 x 称为自变量，y 称为因变量. 自变量 x 的变化范围 D 称为函数 f 的定义域，记为 $D(f)$.

如果 $x_0\in D(f)$，则称函数 f 在点 x_0 有定义；如果 $x_0\overline{\in} D(f)$，则称函数 f 在点 x_0 没有定义. 如果当自变量 x 在 $D(f)$ 内取某一数值 x_0 时，因变量 y 相应取值为 y_0，则称 y_0 为 x_0 对应的函数值，记为 $y_0=f(x_0)$，或 $y_0=f|_{x=x_0}$. 全体函数值所构成的集合，称为函数的值域，记为 $Z(f)$.

根据定义，函数是指定义域 D 上的对应规则 f，而 $f(x)$ 所表示的只是对应于自变量 x 的函数值. 由于通常我们是通过函数值 $f(x)$ 的变化来研究函数 f 的性质的，因此习惯上直接称 $f(x)$ 是 x 的函数，或 y 是 x 的函数，并把 D 上的函数 f 记为

$$y=f(x) \qquad x\in D$$

为了更好地理解函数的定义，我们再对函数概念作如下的说明：

(1)函数的实质是指定义域 D 上的对应规则 f，因此定义域和对应规则是确定函数的两个要素. 对两个函数来说，只有当定义域及对应规则完全相同时，这两个函数才是相同的.

例如，对于函数 $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$，它们的定义域都是 R，且对于 R 中的任意实数 x_0，当 $x_0\geqslant 0$ 时，这两个函数对应的函数值都是 x_0；而当 $x_0<0$ 时，这两个函数对应的函数值又都是 $-x_0$. 换句话说，这两个函数的对应规则是相同的. 因此，它们是两个相同的函数.

(2)定义中的对应规则是用 f 表示的，其实也可以用其它的字母如 g、h、φ、ψ、F…来表示. 不同的函数，可采用不同的符号来区分，如 $y=f(x)$、$y=g(x)$、$y=\varphi(x)$…，有时为了方便，也可用不同的下标来区分，如 $y=f_1(x)$、$y=f_2(x)$…等. 值得注意的是，只要定义域相同，并且 f 代表同一对应规则，则 $y=f(x)$ 和 $u=f(v)$ 就是同一个函数. 这是因为确定一个函数，主要是对应规则和定义域，至于自变量和因变量用什么字母表示则是无关紧要的.

(3)根据定义，给出一个函数一定要指出函数的定义域. 在实际问题中，函数的定义域要根据所考虑的问题的实际意义来确定. 在只给出函数的表达式 $y=f(x)$，而没有指出它的定义域时，我们就认为该函数的定义域是自明的，即定义域是使函数表达式有意义的所有 x 构成的集合.

【例 1-5】 设 $f(x)=x^2+x-3$，计算 $f(0)$、$f(2)$、$f(-2)$、$f(t+1)$、$f(t)+1$.

解：$f(0)=0^2+0-3=-3$

$f(2)=2^2+2-3=3$

$f(-2)=(-2)^2+(-2)-3=-1$

$f(t+1)=(t+1)^2+(t+1)-3=t^2+3t-1$

$f(t)+1=(t^2+t-3)+1=t^2+t-2$

【例 1-6】 求下列函数的定义域.

(1) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$

(2)$y=\lg(3-2x)+\dfrac{1}{2x-x^2}$

解:(1)要使函数有意义,必须

$$4-x^2\geqslant 0$$

即$-2\leqslant x\leqslant 2$,故函数定义域为

$$D(f)=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2\}$$

(2)因为只有当$3-2x>0$且$2x-x^2\neq 0$时函数才有意义,所以由不等式组

$$\begin{cases}3-2x>0\\ 2x-x^2\neq 0\end{cases}$$

得$x<\dfrac{3}{2}$且$x\neq 0$

故所求定义域为

$$D(y)=\left\{x\mid x<\frac{3}{2}\text{且 }x\neq 0\right\}$$

(二)函数表示法

在具体的函数中,f有不同的表示方法.在高等数学中经常使用的是解析法、列表法和图像法三种.

所谓解析法(又称公式法),是将自变量与因变量之间的对应规则用运算式子表示出来,本节例1-2、例1-5、例1-6的函数都是用解析法表示的.

解析法便于实际运算与理论分析,是函数的重要表示法,但是它也有一定的局限性,如本节例1-3给出的函数就找不到合适的公式而采用了图像法.这说明函数$f(x)$不一定是某个具体的解析表达式.

以后我们所讨论的函数,常用解析法表示.特别需要指出的是,用解析法表示函数时,有时需要在不同的范围中用不同的式子来表示,这样的函数称为分段函数.

对分段函数,我们只强调如下两点:

(1)分段函数是用几个解析式表示一个函数,而不是几个函数;

(2)分段函数的定义域是各段解析式中自变量取值范围的并集.

【例1-7】　绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$$

是定义在实数集R上的一个分段函数(图1-7).

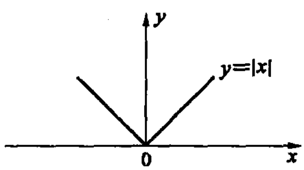


图1-7

【例 1-8】 设 $f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x^2 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 2-x & 1<x\leqslant 2\end{cases}$

试指出 $f(x)$ 的定义域，并计算 $f(-2)$、$f\left(-\frac{1}{2}\right)$、$f(0)$、$f\left(\frac{1}{2}\right)$、$f\left(\frac{3}{2}\right)$.

解：函数的定义域

$$D(f)=(-\infty,0)\cup[0,1]\cup(1,2]=(-\infty,2]$$

因为当 $x<0$ 时，$f(x)=0$，所以

$$f(-2)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$$

类似可得 $f(0)=0^2=0$　　$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$$

（三）反函数

在函数定义中，两个变量，一个叫自变量，一个叫因变量，一主一从，地位不同. 然而在实际问题中，谁是自变量，谁是因变量却并不绝对，而依所研究的具体问题而定.

先考察一个具体的例子：

设某种商品的单价为 a（a 为常量），销量为 q 时，销售收入为 R，确定销售收入 R 的函数关系是

$$R=aq \tag{1-1}$$

这里 q 是自变量，R 是因变量；而要求由销售收入 R 确定销量 q 的函数关系，只须由(1-1)式解出 q 来：

$$q=\frac{R}{a} \tag{1-2}$$

这时 R 成了自变量，而 q 成了因变量.

如果我们进一步从函数的定义域及对应规则的角度来考察，可以发现(1-1)、(1-2)两式所表示的截然不同的两个函数，而且这两个函数还有着十分密切的关系：其中任个函数都可由另一个函数来确定. 我们称具备这一特征的一对函数“互为反函数”：(1-2)式是(1-1)式的反函数，(1-1)式也是(1-2)式的反函数.

一般地，有

定义 1.2　设函数

$$y=f(x) \qquad x\in D$$

如果对于任意的 $y\in Z(f)$，在 D 中有唯一一个 x 与之对应，使 $f(x)=y$，则在 $Z(f)$ 上定义了另一个函数，这个函数称为函数 $y=f(x)$ 的反函数，记为

$$x=f^{-1}(y) \qquad y\in Z(f)$$

（注意：这里的 f^{-1} 是一个完整的符号，不能误解为 $\frac{1}{f}$ 的意思）.

例如指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq 1)$，$x\in R$，它的值域是 $(0,+\infty)$. 由于对任意的 $y\in(0,+\infty)$，按照 $y=a^x$ 都对应 R 中唯一一个 x，因此在 $(0,+\infty)$ 上又定义了一个以 y 为自变量，以 x 为因变量的函数，这就是对数函数 $x=\log_a y$，$y\in(0,+\infty)$. 由定义可知，指数函数 $y=a^x$ 与对数函数 $x=\log_a y$ 互为反函数.

显然，只有一一对应的函数才存在反函数，而且函数 $y=f(x)$ 的定义域就是反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的值域，函数 $y=f(x)$ 的值域就是反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域.

例如正弦函数 $y=\sin x$，$x\in R$ 的值域是 $[-1,1]$，而对任意的 $y\in[-1,1]$，按照 $y=\sin x$，对应的 R 中的 x 是无数个，当然就不存在反函数了. 但是，如果限定 x 的取值范围，仅在 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 中考虑，则有反正弦函数 $x=\arcsin y$，$y\in[-1,1]$.

反函数的实质决定于它所表示的对应规则 f^{-1}，至于用什么字母来表示反函数中的自变量与因变量却是无关紧要的. 习惯上，我们都是以 x 表示自变量，以 y 表示因变量，因此 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 一般表示成 $y=f^{-1}(x)$.

【例 1-9】　求函数 $y=2x+1$ 的反函数并作图表示.

解：由 $y=2x+1$ 可得

$$x=\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}$$

将 x,y 的位置互换，即得 $y=2x+1$ 的反函数

$$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$$

如图 1-8 所示.

【例 1-10】　研究函数 $y=x^2$ 反函数的存在性.

解：由 $y=x^2$ 可得 $x=\pm\sqrt{y}$. 由于 x 与 y 不是一一对应的，故 $y=x^2$ 在其定义域 R 上不存在反函数. 但是，若将函数 $y=x^2$ 限定在 $x\in[0,+\infty)$ 上，则 $x=\sqrt{y}$ 就是一一对应的了，故此时 $y=x^2$ 的反函数是 $y=\sqrt{x}$.

同理可知 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0]$ 上的反函数是 $y=-\sqrt{x}$. 如图 1-9 所示.

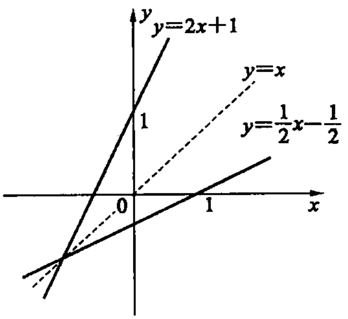


图 1-8

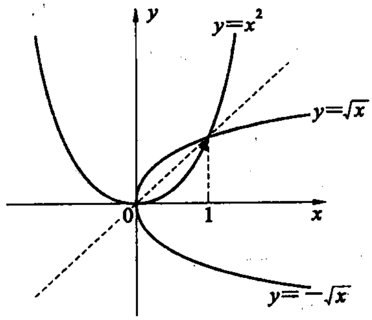


图 1-9

由于 $x=f^{-1}(y)$ 可以通过解方程 $y=f(x)$ 而得到，因此 $x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f(x)$ 可视为同解方程，故它们的图形也是相同的. 但是，若将 $x=f^{-1}(y)$ 中的 x 与 y 交换位置，即将反函数写为 $y=f^{-1}(x)$，则函数 $y=f(x)$ 的图形与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形就对称于直线 $y=x$. 这是可以用解析几何的知识来加以证明的.

三、函数的基本特性

我们约定：今后，为了叙述时方便，在不强调是开区间的情况下，称区间 (a,b) 通常是泛指以 a,b 为端点的各种区间，甚至是无限区间.

（一）函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b)（函数定义域或其子集）上有定义，如果存在一个正数 M，使得对于任意一个 $x\in(a,b)$，对应的函数值都满足不等式

$$|f(x)|\leqslant M \text{ 或 } |f(x)|<M$$

则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上有界（此时，函数的图形位于直线 $y=-M$ 与 $y=M$ 之间）；反之，如果这样的正数 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上无界（此时，函数的图形可以向上或向下无限延伸）.

例如，函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，因为存在 $M=1$，使得 $|\sin x|\leqslant 1$，而 $y=\sin x$ 的图形介于 $y=1$ 和 $y=-1$ 这两条平行线之间；又如，函数 $y=\ln x$ 的图形可以向下无限延伸，它在其定义域 $(0,+\infty)$ 上是无界的.

（二）函数的单调性

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 上有定义，对 (a,b) 上任意两点 x_1、x_2，当 $x_1<x_2$ 时，不等式

$$f(x_1)<f(x_2) \text{ 或 } f(x_1)>f(x_2)$$

恒成立，则称函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 上是单调增加（或单调减少）的，单调增加函数和单调减少函数统称为单调函数，(a,b) 称为函数的单调区间.

单调增加(或减少)函数的图形是单调上升(或下降)的,反之亦真.

(三)函数的奇偶性

设函数 $y=f(x)$,如果对于任何一个 $x\in D(f)$ 恒有 $f(-x)=f(x)$ 成立,则称 $f(x)$ 为偶函数;如果恒有 $f(-x)=-f(x)$ 成立,则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称;奇函数的图形关于坐标原点对称.

可以证明:

指数为偶数(或奇数)的幂函数 $y=x^n$,是偶(或奇)函数;常值函数 $y=C$(常数)是偶函数;

两个(或几个)偶(或奇)函数的代数和是偶(或奇)函数;两个偶(或奇)函数的积是偶函数;一个偶函数和一个奇函数的积是奇函数;

一个(非零)奇函数和一个(非零)偶函数的代数和既不是奇函数,也不是偶函数,是非奇非偶函数.

【例 1-11】 判定下列函数的奇偶性:

1. $y=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$;

2. $\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<1\\ 0, & |x|\geqslant 1\end{cases}$;

3. $f(x)=x^3-2x^2+5x-6$.

解:1. 因 $y(-x)=\ln[\sqrt{(-x)^2+1}-(-x)]$

$$=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$$

$$=-\ln(\sqrt{x^2+1}-x)=-y(x)$$

故 $y=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$ 是奇函数.

2. 因 $\varphi(-x)=\begin{cases}|\sin(-x)|, & |-x|<1\\ 0, & |-x|\geqslant 1\end{cases}$

$$=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<1\\ 0, & |x|\geqslant 1\end{cases}$$

$$=\varphi(x)$$

故 $\varphi(x)$ 是偶函数.

3. 由于 x^3+5x 是两个奇函数的和为奇函数;$-2x^2-6$ 是两个偶函数的和为偶函数;因而 $f(x)$ 作为一个奇函数和一个偶函数的和是非奇非偶函数.

(四)函数的周期性

对于函数 $y=f(x)$,如果存在正的常数 T,使得等式

$$f(x+T)=f(x), x, x+T\in D(f)$$

恒成立，则称函数 $f(x)$ 为周期函数，T 为 $f(x)$ 的一个周期.

不难看出，若 T 是周期函数 $f(x)$ 的一个周期，则 $nT(n\in N)$ 也是 $f(x)$ 的周期，通常所说的周期函数的周期是指其最小正周期，记作 T_0.

如，在初等数学里已熟知，$y=\sin x$、$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期，$y=\tan x$、$y=\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数.

一般地，函数 $y=A+B\sin(\omega x+\varphi)$ 及 $y=A+B\cos(\omega x+\varphi)$（其中 A、B、ω、φ 是常数，B、$\omega\neq 0$），是以 $T_0=\frac{2\pi}{|\omega|}$ 为周期的周期函数；函数 $y=A+B\tan(\omega x+\varphi)$ 及 $y=A+B\cot(\omega x+\varphi)$（其中 A、B、ω、φ 是常数，B、$\omega\neq 0$），是以 $T_0=\frac{\pi}{|\omega|}$ 为周期的周期函数. 如 $y=5-3\cos(2-4x)$ 是以 $T_0=\frac{2\pi}{|-4|}=\frac{\pi}{2}$ 为周期的周期函数.

对于周期函数，只须知道它的长度为 T_0 的任一区间 $[a, a+T_0]$ 的图形，将这个图形按周期重复下去，便可得该函数的全部图形.

四、复合函数与初等函数

（一）复合函数

在实际问题中，有时两个变量之间的关系并不是直接联系的，而是通过一个或几个中间变量间接联系起来的. 例如，工厂生产某种产品，设 x 表示生产量、u 表示价格、y 表示市场需求量. 假如我们仅考虑这三者之间关系，而不考虑其它因素，依经济活动分析可知，市场上该商品的需求量 y 是价格 u 的函数，而价格 u 又是生产量 x 的函数. 因此，市场需求量 y 经过价格 u 也是生产量 x 的函数，我们把这样复合而成的函数称为复合函数. 一般地定义如下：

定义 1.3　如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，且函数 $u=\varphi(x)$ 的值域与函数的 $y=f(u)$ 定义域的交集非空，那么 y 经过 u 的联系也是 x 的函数，则称这样的函数是由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数，称为复合函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$.

其中 u 叫做中间变量. 注意，并非任何两个函数都能复合成一个复合函数的. 例如，$y=\arccos u$ 与 $u=1.5+x^2$ 就不能复合成一个复合函数，这是因为 $u=1.5+x^2$ 对其定义域 $(-\infty, +\infty)$ 上的任何 x，对应的函数 u 的值都不小于 1.5，这就使得 $y=\arccos u$ 没有意义.

有了复合函数的概念，我们就可以把一个较复杂的函数看成是由几个较简单函数复合而成的，从而便于我们分析研究和进行有关的计算.